矩阵光学导论

竺庆春　陈时胜　译
邓锡铭　沃新能　校

上海科学技术文献出版社

矩阵光学导论

竺庆春
陈时胜 译

邓锡铭
沃新能 校

上海科学技术文献出版社

(沪)新登字301号

矩阵光学导论

邵庆春 陈时胜 译

[illegible] 沃新能 校

上海科学技术文献出版社出版发行
(上海市武康路2号)
全国新华书店经销
上海科技文献出版社昆山联营厂印刷

*

开本 787×1092 1/32 印张 10.5 字数 254,000
1991年10月第1版 1991年12月第1次印刷
印数：1—1,500
ISBN 7-80513-867-2/O·63
定价：6.50元
《科技新书目》252-306

译 者 序

罗彻斯特光学院被誉为美国光学家的摇篮，本书是作者为该院四年级光学专业编写的教程。

光学系统是由许多光学面组成的，任何光线通过光学系统时都可以根据经典的光学方法来追迹。为了求得该系统最终所成像的位置，必须计算每个面所成像的位置，再将这个面所成的像作为下一个面的物依次计算下去。随着光学系统的复杂和光学元件的增加，这样逐面地分析计算十分困难和繁琐。应用矩阵方法来处理就变得简洁方便了，即只要用一个矩阵就能表示该系统的输入与输出的全部关系，而且特别适于用计算机追迹。1960年新型光源——激光器的诞生，使矩阵方法更显示其处理谐振腔及光束传输等一系列复杂问题的优越性。而且通过使用这一方法，打通了过去经典光学中几何光学和物理光学之间的鸿沟；使光学与其他学科紧密地联系起来，冲破传统概念的束缚，从而充分显示其多用途性。所以，人们在这个领域中，无论在理论上和应用上都做了大量工作。尽管如此，在我国早期的光学教程或光学专著中几乎未涉及矩阵光学内容，近年来虽有不少国内学者发表应用矩阵光学方法处理激光谐振腔及光束传输的论文，并在一些大学激光物理教程中也收集了矩阵光学的内容，但材料分散，迄今还未有一本专著系统、全面地论述这个课题。本书的出版，将弥补国内在此领域中的空缺。

本书的章节基本上是为教学目的编排的，可作为我国理工

大学光学、电子光学的大学生或研究生的入门教材，亦可供从事光学及激光专业的科研人员参考。

本书共分五章，集中于两个论题，其一是近轴成像问题，第二是偏振问题。并附有带详细解答的例题，其形式、种类多样，数量充足，既有巩固基础知识的题目，又有具有一定难度的提高性题目，因而很适于教学和自学。

第一章是为不熟悉线性代数的人准备的矩阵计算知识。在引进正交矩阵、变换矩阵和行列式的基本概念后，讨论了矩阵的反演和对角线化。

第二章描述一个同心光学系统的近轴光学矩阵方法。介绍了用光线转移矩阵描述光线距轴线的高度和光线与轴线所交角度的方向余弦以及两者之间的变化。指出如何从矩阵信息中推演光学系统的特性，以及反之如何从实验上来确定矩阵元。章末是将光线转移矩阵推广到包含有反射和折射的情况。

第三章介绍如何用单个等效矩阵来表示光线在谐振腔之间的往返传播。指出只要将矩阵对角线化，就可容易地区别稳定与不稳定谐振腔，对于前者，其特征值和特征矢量皆为复数，后者则皆为实数。如果考虑模的匹配，光线转移矩阵也能容易地计算激光束在腔外传输时所产生的衍射性质。最后介绍将这些方法推广到类透镜分布介质的情况。

第四章讨论了偏振光所涉及的两种矩阵方法。在讨论偏振光的产生和分析后，引入了表示偏振的斯托克斯参数和 4×4 米勒矩阵，以解决偏振和非偏振的问题；其次介绍了琼斯矩阵元或麦克斯韦列的实验确定法；并列举了用米勒算法和琼斯算法求解的实例。

第五章涉及的是矩阵方法对光在单轴晶体中传播的应用。

书的最后引入六个附录，分别论述了斯托克斯参数、米勒矩阵、琼斯矩阵等公式的推导。

在翻译过程中，除原文中明显的刊误已予以订正外，其余一律尊重原著。由于译校者水平有限，书中难免错漏，敬请同行和读者指正。

目　录

第一章　矩阵计算导论

1.1 引　　言

在本书中，我们将考虑如何把矩阵代数的一些简单概念有效地应用到光学成像和光的偏振等问题中。本章的讨论主要是针对至今未曾学过矩阵或行列式的读者；讨论是初步的，而且所涉及到的内容仅是为了了解本书其余各章节所必备的知识。

1857 年，数学家凯莱(Cayley)引进了矩阵概念，他将矩阵作为一个普通的速记记号，以列出一个完整列阵的线性联立方程组。矩阵列阵的计算规则与普通的数式稍有不同。不过，人们很快就发现了其运算规则并得到了发展。在 20 世纪 20 年代，当海森伯(Heisenberg)引进了量子力学的矩阵形式之后，物理学家对矩阵方法就愈感兴趣了。尽管在许多工程计算中都已采用了矩阵，不过，在光学中应用矩阵还是近期的事。

早在 1771 年，范德蒙德(Vandermonde)就提出了行列式，本书对此只占用较小的篇幅。最初将行列式称为“结式”，因为它是在用逐次消元法解方程组时出现的。在我们将要处理的大部分光学问题中，其行列式全等于 1，因而，这就为计算结束时的验算提供了方便。

现在来考虑如何引进矩阵的概念。假设有一对线性方程组

$$U = Ax + By$$
$$V = Cx + Dy$$

式中，A, B, C 和 D 都是已知常量，x 和 y 则都是变量。如果 x 和 y 都已知，那就能用这些方程组计算 U 和 V。对于大多数用

途，最方便的方法是将常量和变量分开证明。于是，将一对方程组写成：

$$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

该方程与上面的一对方程组的含义完全一样。把一对方括弧内的每一组记号都看作是一个整体，并称之为矩阵。$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$和$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$称为"列矩阵"或"列矢量"，因为每个矩阵只有一个列。

一般的矩阵是一个记号按行与列安排的矩形列阵。矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$有两行和两列，称为"二阶方阵"。以后将会遇到象$[P \quad Q]$这种形式的"行矩阵"（有时称为"行矢量"），其中的各个记号都称为"矩阵元素"，可将行矩阵水平地写成一行的形式。只有一个元素的矩阵刚好是一个普通的数字，或者是一个纯量。

如果每个矩阵只用一个记号表示，那么，可以更简略地写出一对方程组：

$$C_2 = SC_1$$

其中，C_1 表示列矩阵$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$，$C_2$ 表示列矩阵$\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$，$S$ 表示方矩阵$\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}$。

现在，假设 U 和 V 与另一对变量（比如说，另一对方程中的 L 和 M，）依次连接起来，因而：

$$L = PU + QV$$
$$M = RU + TV$$

写成矩阵形式：

$$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} U \\ V \end{bmatrix}$$

亦即：
$$C_3=KC_2$$

其中 C_3 表示$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}$，$K$ 表示$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix}$。当然，可用 x 和 y 分别来代替 U 和 V，而 U 和 V 分别确定了求 L 和 M 的方程组，因而，该方程组改为：

$$L=P(Ax+By)+Q(Cx+Dy)$$
$$M=R(Ax+By)+T(Cx+Dy)$$

即
$$L=(PA+QC)x+(PB+QD)y$$
$$M=(RA+TC)x+(RB+TD)y$$

可以将它写成

$$\begin{bmatrix} L \\ M \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA+QC & PB+QD \\ RA+TC & RB+TD \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

即
$$C_3=FC_1$$

其中 F 表示 $\begin{bmatrix} PA+QC & PB+QD \\ RA+TC & RB+TD \end{bmatrix}$。不过，另外还可以写成：

$$C_3=KC_2=K(SC_1)$$

若上式是个普通的代数方程，则可重新写为

$$C_3=KSC_1=(KS)C_1$$

它只不过是改变了括弧的位置。将 KS 称为 K 和 S 的乘积。

再与上述连有 C_1 和 C_3 的方程进行比较，可写成下面两式：

$$C_3=KSC_1 \quad 和 \quad C_3=FC_1$$

于是
$$F=KS$$

也就是说，F 是 K 和 S 的乘积。

我们希望在矩阵中采用类似的方法，但必须定义两个矩阵的乘积，因为在普通代数里只定义了数之间的乘积。

1.2 矩阵乘法

现在来定义矩阵乘法，以便将上式从普通代数转化成矩阵代数。为此，用矩阵 S 乘矩阵 K，得到积矩阵 F，以定义两个矩阵的乘积，即

$$\begin{bmatrix} P & Q \\ R & T \end{bmatrix}\begin{bmatrix} A & B \\ C & D \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} PA+QC & PB+QD \\ RA+TC & RB+TD \end{bmatrix}$$

检查上式右端的矩阵结构(乘积)，就容易看出这个矩阵是如何形成的。

在上式右端的矩阵中，其左上角元素为第一行第一列。它是取矩阵 K 的第一行(即 $[P \quad Q]$)与矩阵 S 的第一列$\left(\text{即}\begin{bmatrix} A \\ C \end{bmatrix}\right)$中相对应的元素相乘(即行的第一个元素乘以列的第一个元素，行的第二个元素乘以列的第二个元素)，得乘积 PA 和 QC，并将它们相加而得 $PA+QC$。

按照同样的方法，可以从 K 的第一行元素和 S 的第二列元素，构成 F 的第一行第二列的元素。从 K 的第二行元素和 S 的第一列元素，构成 F 的第二行第一列的元素。最后，从 K 的第二行元素和 S 的第二列元素，构成 F 的第二行第二列的元素。

在某些应用中，对矩阵元素加以下标是有益的。例如，将一个列矩阵 A 写为：

$$A=\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \end{bmatrix}$$

下标表示该元素在列矩阵中的位置。将一个方矩阵 S 写成：

$$S=\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix}$$

式中，第一个下标表示该元素在方阵中的行数，第二个下标表示

该元素在方阵中的列数。若用下标来重新表示两个方阵 K 和 S，则：

$$K=\begin{bmatrix}K_{11} & K_{12}\\ K_{21} & K_{22}\end{bmatrix} \quad 和 \quad S=\begin{bmatrix}S_{11} & S_{12}\\ S_{21} & S_{22}\end{bmatrix}$$

于是，乘积 $F=KS$ 变成

$$\begin{bmatrix}F_{11} & F_{12}\\ F_{21} & F_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}K_{11}S_{11}+K_{12}S_{21} & K_{11}S_{12}+K_{12}S_{22}\\ K_{21}S_{11}+K_{22}S_{21} & K_{21}S_{12}+K_{22}S_{22}\end{bmatrix}$$

即

$$\begin{bmatrix}\sum_{i=1}^{2}K_{1i}S_{i1} & \sum_{i=1}^{2}K_{1i}S_{i2}\\ \sum_{i=1}^{2}K_{2i}S_{i1} & \sum_{i=1}^{2}K_{2i}S_{i2}\end{bmatrix}$$

这就给出了一个表示矩阵中任何一个元素的一般公式：

$$F_{RT}=\sum_{i=1}^{i_{max}}K_{Ri}S_{iT}$$

其中 F_{RT} 表示 F 的第 R 行第 T 列的元素，K 和 S 也照此类推。（这里使用的求和符号表示，重复的下标 i 要逐次地取所有的可能值，有时它被省略了）。

至今，我们只是讨论到 2×2 矩阵和 2×1 列矩阵；但是，矩阵的概念远比这些内容丰富得多。在本书中，我们还需用 2×2，3×3 和 4×4 方阵，2×1，3×1 和 4×1 列矩阵以及 1×2，1×3 和 1×4 行矩阵。上述所有矩阵的含义都是按同样方式来定义的。例如，如果有含有四个未知元的四个方程组：

$$\begin{aligned}B_1&=K_{11}A_1+K_{12}A_2+K_{13}A_3+K_{14}A_4\\ B_2&=K_{21}A_1+K_{22}A_2+K_{23}A_3+K_{24}A_4\\ B_3&=K_{31}A_1+K_{32}A_2+K_{33}A_3+K_{34}A_4\\ B_4&=K_{41}A_1+K_{42}A_2+K_{43}A_3+K_{44}A_4\end{aligned}$$

这些方程组既可表示成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \\ B_3 \\ B_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & K_{13} & K_{14} \\ K_{21} & K_{22} & K_{23} & K_{24} \\ K_{31} & K_{32} & K_{33} & K_{34} \\ K_{41} & K_{42} & K_{43} & K_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \end{bmatrix}$$

也可表示成更简略的形式

$$B = KA$$

在这种情况下，就可用方程

$$B_{R1} = \sum_{i=1}^{4} K_{Ri} A_{i1}$$

来计算列矩阵 B 的第 R 个元素。

应当指出，形成积矩阵元的上述规则仍可应用到用 A 代替 S，用 B 代替 F 的情况；不过，因为 A 和 B 现在都是 4×1 列矩阵，所以 F 和 S 的第二个下标(T)都仅仅是 1。于是，可以写得更加简单：

$$B_R = \sum_{i=1}^{4} K_{Ri} A_i$$

(其中 B 和 A 显然都是矢量。)

这条矩阵乘法规则十分重要，以后将会经常用到。学生通过练习许多习题来全部熟悉掌握这条规则，是非常重要的。下面作一些说明。

1.2.1

若 $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 5 & 7 \end{bmatrix}$ 和 $B = \begin{bmatrix} 2 & 6 \\ 1 & -4 \end{bmatrix}$

则

$$AB = \begin{bmatrix} (1\times2)+(3\times1) & (1\times6)(3\times-4) \\ (5\times2)+(7\times1) & (5\times6)(7\times-4) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2+3 & 6+(-12) \\ 10+7 & 30+(-28) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 \\ 17 & 2 \end{bmatrix}$$

但

$$BA=\begin{bmatrix}(2\times1)+(6\times5) & (2\times3)+(6\times7)\\(1\times1)+(-4\times5) & (1\times3)+(-4\times7)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2+30 & 6+42\\1-20 & 3-28\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}32 & 48\\-19 & -25\end{bmatrix}$$

读者应当注意，AB 和 BA 完全不同。在矩阵乘法中，乘法的次序必须保持不变：方程 $AB=BA$ 不成立。用数学术语来讲，矩阵乘法是不可交换的。

1.2.2

若 $C=\begin{bmatrix}3 & 1 & 4\\2 & 1 & 6\\1 & 3 & 4\end{bmatrix}$ 和 $D=\begin{bmatrix}-5\\3\\1\end{bmatrix}$

则

$$CD=\begin{bmatrix}(3\times-5)+(1\times3)+(4\times1)\\(2\times-5)+(1\times3)+(6\times1)\\(1\times-5)+(3\times3)+(4\times1)\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}-15+3+4\\-10+3+6\\-5+9+4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-8\\-1\\8\end{bmatrix}$$

如果希望求乘积 DC，那么，首先用 D 的第一行元素与 C 的第一列元素相乘。而 D 的第一行只有一个元素 $[-5]$，但 C 的第一列却有 3 个元素 $\begin{bmatrix}3\\2\\1\end{bmatrix}$。因此，这种乘积不能成立。只有当左乘矩阵 C 的列数和右乘矩阵 D 的行数相同；乘积 CD 才能成立，这时，C 和 D 是“相容”的。

1.2.3

令 $E=[3\quad 1\quad 4]$ 和 $F=\begin{bmatrix}1 & 5 & 9\\ 2 & 4 & -3\\ 6 & 1 & 3\end{bmatrix}$

则

$$\begin{aligned}EF&=[(3\times1)+(1\times2)+(4\times6)\quad(3\times5)+(1\times4)+(4\times1)\quad(3\times9)-(1\times3)+(4\times3)]\\&=[(3+2+24)\quad(15+4+4)\quad(27-3+12)]\\&=[29\quad 23\quad 36]\end{aligned}$$

倘若将相乘的次序颠倒，则乘积 FE 不能成立，因为 F 有三列，而 E 仅有一行。

1.2.4

令 $H=[3\quad 1\quad 6]$ 和 $K=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 7\end{bmatrix}$

若将 H 作为左乘因子，K 作为右乘因子，则它们是相容的，因为 H 有三行，K 也有三列。于是

$$HK=[(3\times2)+(1\times4)+(6\times7)]=(6+4+42)=52$$

它只是一个普通的数字。

现在来考虑用 K 左乘 H 时会出现什么结果。这两个矩阵仍然是相容的，因为 K 只有一列，H 也只是一行。于是

$$KH=\begin{bmatrix}2\\ 4\\ 7\end{bmatrix}[3\quad 1\quad 6]=\begin{bmatrix}2\times3 & 2\times1 & 2\times6\\ 4\times3 & 4\times1 & 4\times6\\ 7\times3 & 7\times1 & 7\times6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}6 & 2 & 12\\ 12 & 4 & 24\\ 21 & 7 & 42\end{bmatrix}$$