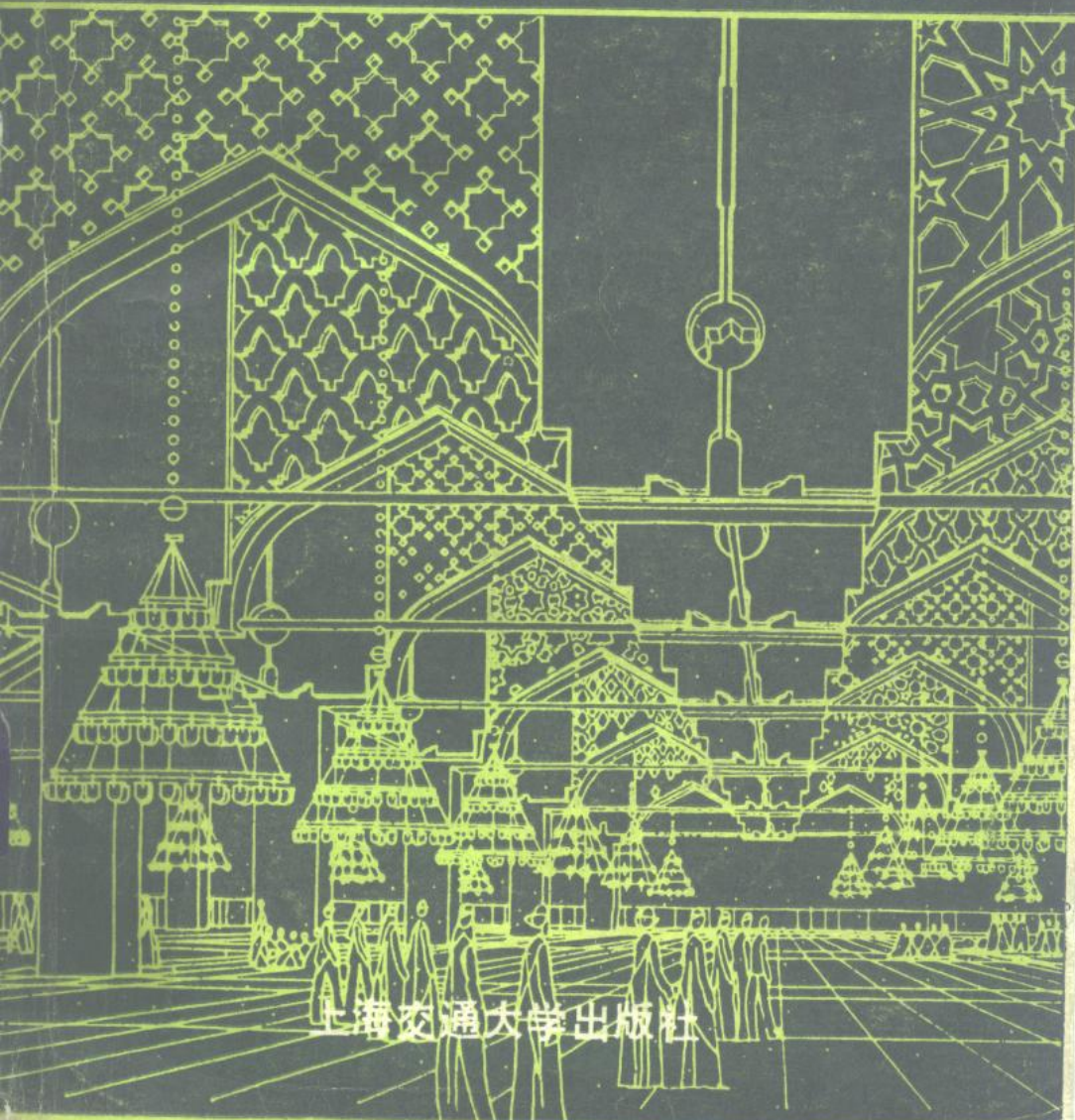


吴连元 编著

板壳理论



上海交通大学出版社

板壳理论

吴连元 编著

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书系统地讨论了板壳基本理论和各种解法,全书共分为三篇:薄板理论、薄壳理论、板壳稳定性理论。内容包括:薄板小挠度弯曲理论、经典解法、近似解法与数值解法、薄板弯曲的特殊问题;薄壳基本方程、无矩理论、圆柱壳的弯矩理论、旋转对称壳的弯矩理论、扁壳近似理论、壳体弯曲数值解法、板壳大挠度弯曲理论;板壳稳定性基本方程、薄板稳定性、薄壳稳定性等,各章都有典型例题,并附有实用图表和一些具有工程背景的习题。

本书可作为工程力学专业本科生教材,亦可作为土木、航空、船舶、能源、水利、道桥、化工、机械等工程专业的研究生及工程技术人员的参考书或自学用书。

板 壳 理 论

出版:上海交通大学出版社

(淮海中路1984弄19号)

发行:新华书店上海发行所

印刷:上海交通大学印刷厂

开本 850×1168(毫米)1/32

印张:18.5

字数:477000

版次:1989年6月第1版

印次:1989年7月第1次

印数:1—3000

科目:19—264

ISBN7—313—00478—8/P·3

定价:3.45元

序 言

现代工程结构中广泛采用板壳结构，例如：建筑楼面及地下管道、道桥工程与水工结构、飞行器的躯体、舰船外壳和海洋平台导管架、化工设备与能源工程等主体结构都采用板壳构件。当前在高等院校中工程力学专业及有关结构专业普遍设置板壳理论课程。随着电子计算机的发展与应用，促进了板壳力学的发展，板壳理论的教学内容及体系也发生了变化。早期的板壳理论教材已难以适应当今的教学需要。近年来作者深切感到教学中没有适当的教材供学生阅读参考，确对教学工作带来不少困难。这本书是作者根据这一需要，并根据多年的教学经验编写而成的。

板壳理论是一门较高层次的专业课，公式繁多。作为一本教材必须要系统地阐述基本概念及基本理论，对公式的推导要清晰；并要突出物理模型的抽象过程和数学模型的建立过程。另外，除介绍基本解法外，还应强调现代数值解法在板壳理论中的应用，并注意应用基本理论及解法去解决带有实际性的问题。

板壳理论属于应用弹性力学的范畴，有着各种理论的体系，内容相当广泛。本书在使用高等数学工具时侧重于物理观点的解释而不是数学分析的本身。尽量以弹性力学的原理贯穿这本书的全过程。本书在有限的篇幅内力求精选内容，并为了适应各类专业的需要，相应地给出一些可供选择的章节。

本书分为三篇：薄板理论、薄壳理论、板壳稳定性理论。本书以板壳线性静力学问题为主，同时也给出部分动力学问题及其他特殊问题的基本解法。在讲完板壳线性弯曲理论之后，集中讨论板壳非线性弯曲问题。同时这也为研究稳定性理论作了准备。

书中给出一定数量的例题，并在每章后面附有习题。全书采用国际单位制(SI)。基本符号外的符号在具体章节使用中加以说明。

由于板壳理论研究成果甚为广泛，无法一一囊括。尽管如此，本书仍是大量使用前人成果编著而成。除援引的参考书目及参考文献外，书中还多处引用了罗祖道教授所编的《薄壳理论》讲义(1963年)的材料。在编写过程中，承蒙钟万勰教授、刘正兴教授审阅书稿并提出许多修改意见以及沈为平副教授、周海同志的通力协作，在此一并表示深切谢意。

由于作者水平有限，书中疏漏及不妥之处在所难免，恳切希望读者指正。

吴连元

基本符号

X, Y, Z	直角坐标方向
x, y, z	直角坐标值
r, θ	极坐标(或坐标值)
n, t	法线方向、切线方向
a, b	矩形板 X, Y 方向的边长
h	板壳的厚度
C_i	常数或数字系数
D	板或壳板抗弯刚度
E, E_t, E_s	杨氏模量、切线模量、割线模量
G	剪切模量
μ	泊松比
J	惯性矩
k	弹性地基的基床系数或数字系数
$[K]$	刚度矩阵
l	跨度或长度
$L(\dots)$	微分算子
$\nabla^2(\dots)$	拉普拉斯微分算子
$\nabla_k^2(\dots)$	混合型微分算子
P	集中荷载
p	法向压力
p_x, p_y, p_z	平板面内荷载分量及侧向荷载分量
$q(x, y)$	连续分布的荷载集度
q_1, q_2, q_n	壳体荷载分量
g	重力加速度

γ	单位体积的重量
N_x, N_y	单位长度的薄膜力
N_{xy}	单位长度的薄膜剪力
Q_x, Q_y	单位长度的横向剪力
M_x, M_y, M_{xy}	单位长度的弯矩、扭矩
R_x, R_y	板中面在 XZ 和 YZ 平面内的曲率半径
R_1, R_2	壳体的主曲率半径
$\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$	壳体曲率、扭率
$\chi_x, \chi_y, \chi_{xy}$	曲率及扭率的改变量
u, v, w	位移分量
ϑ	转角位移
$\varepsilon_x, \varepsilon_y$	线应变分量
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	直角坐标系中正应力分量
$\tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$	直角坐标系中剪切应力分量
$\gamma_{xy}, \gamma_{xz}, \gamma_{yz}$	直角坐标系中剪切应变分量
$\gamma_{r\theta}$	极坐标系中的剪切应变
$\Phi(x, y)$	应力函数
U	应变势能
V	外力势能
W	外力功
T	温度或动能
Π	系统总势能
C	矢量 C
α_1, α_2	壳体曲线参数坐标
α, β	主曲率线坐标
A, B	主曲率线坐标下的拉梅系数
σ_p	材料比例极限
σ_s	材料屈服极限
P_s	极限荷载

M_u 极限弯矩
 p_{cr} 屈曲临界荷载
 σ_{cr} 屈曲临界应力

目 录

序言	1
基本符号	1

第一篇 薄板理论

第一章 弹性薄板小挠度弯曲理论	1
§ 1.1 薄板及基本假设	1
§ 1.2 板的几何变形方程	5
§ 1.3 板的物理方程	9
§ 1.4 薄板小挠度弯曲的基本微分方程	14
§ 1.5 板的边界条件	17
§ 1.6 极坐标系中薄板小挠度弯曲基本微分方程	24
第二章 薄板小挠度弯曲的经典解法	29
§ 2.1 引言	29
§ 2.2 四边简支矩形板的纳维叶解法	31
§ 2.3 对边简支矩形板的利维解法	39
§ 2.4 薄板弯曲的叠加法	47
§ 2.5 圆板的解法	50
§ 2.6 连续矩形板	56
§ 2.7 在侧向荷载与中面力作用下板的基本方程	61
第三章 薄板小挠度弯曲的近似解法与数值解法	73
§ 3.1 能量变分法	73
§ 3.2 普通有限差分法	85
§ 3.3 有限差分法的改进与应用	93
§ 3.4 加权残值法	103
§ 3.5 有限单元法	109

第四章 薄板弯曲的特殊问题	126
§ 4.1 正交异性板的弯曲问题.....	126
§ 4.2 薄板热应力.....	138
§ 4.3 赖斯纳薄板理论.....	146
§ 4.4 板开孔的弯曲应力集中.....	151
§ 4.5 板的极限分析.....	163
§ 4.6 板的振动.....	167

第二篇 薄壳理论

第五章 薄壳理论基本方程	179
§ 5.1 薄壳及其分类和基本假设.....	179
§ 5.2 曲面微分几何概要.....	184
§ 5.3 薄壳的几何变形方程.....	199
§ 5.4 薄壳体素内力及物理方程.....	207
§ 5.5 薄壳体素的平衡方程式.....	213
§ 5.6 应变协调方程.....	216
§ 5.7 壳体的应变势能.....	217
§ 5.8 壳体的边界条件.....	218
第六章 壳体无矩理论	223
§ 6.1 无矩薄壳的概念.....	223
§ 6.2 无矩理论基本方程.....	225
§ 6.3 柱形壳体的无矩理论及解法.....	228
§ 6.4 旋转对称壳体的无矩理论及解法.....	234
§ 6.5 无矩壳体的常用解法.....	249
第七章 圆柱壳体的弯矩理论	268
§ 7.1 圆柱壳体的基本微分方程.....	268
§ 7.2 圆柱壳体的轴对称变形.....	271
§ 7.3 圆柱壳体轴对称变形的应用计算.....	285
§ 7.4 圆柱壳体的准确理论与简化理论.....	302

第八章 旋转对称壳体的弯矩理论	323
§ 8.1 旋转对称壳体的基本方程.....	323
§ 8.2 圆锥壳体.....	332
§ 8.3 球形壳体.....	343
§ 8.4 球形壳体的近似解法.....	345
第九章 扁壳近似理论	357
§ 9.1 扁壳基本方程.....	357
§ 9.2 圆形扁壳.....	365
§ 9.3 圆形球面和抛物面扁壳.....	368
§ 9.4 二次曲面的矩形扁壳.....	377
第十章 壳体弯曲的数值法	383
§ 10.1 圆柱壳体轴对称变形的有限差分法.....	383
§ 10.2 扁壳的有限差分解法.....	388
§ 10.3 旋转壳体的有限差分法.....	394
§ 10.4 加权残值法计算扁壳弯曲.....	399
§ 10.5 旋转轴对称壳体的有限单元法.....	403
§ 10.6 任意形状壳体的有限单元法.....	411
第十一章 板壳大挠度弯曲理论	419
§ 11.1 非线性弹性力学的分类.....	419
§ 11.2 薄板大挠度弯曲理论基本方程.....	420
§ 11.3 矩形板大挠度弯曲解法.....	432
§ 11.4 圆板大挠度弯曲的摄动法.....	434
§ 11.5 壳体大挠度弯曲理论基本方程.....	440
§ 11.6 开口圆柱壳的大挠度弯曲解法.....	447
§ 11.7 筒支扁壳的大挠度弯曲解.....	452

第三篇 板壳稳定性理论

第十二章 板壳稳定性基本方程	456
§ 12.1 基本概念.....	456

§ 12.2	板的小挠度屈曲基本方程	459
§ 12.3	板的大挠度屈曲基本方程	465
§ 12.4	壳体弹性屈曲基本方程	466
第十三章	薄板的稳定性	472
§ 13.1	单向均匀受压板的稳定性	472
§ 13.2	对边简支矩形板的稳定性	476
§ 13.3	矩形板的剪切屈曲	481
§ 13.4	矩形板非均匀压缩的稳定性	483
§ 13.5	矩形板的组合屈曲	486
§ 13.6	圆板的稳定性	489
§ 13.7	加筋矩形板的稳定性	493
§ 13.8	板屈曲分析的有限单元法	500
§ 13.9	板的大挠度屈曲理论	507
§ 13.10	板的非弹性屈曲	513
第十四章	弹性薄壳的稳定性	516
§ 14.1	轴向受压圆柱壳的屈曲	516
§ 14.2	横向外压作用下圆柱壳的屈曲	525
§ 14.3	扭矩作用下圆柱壳的屈曲	553
§ 14.4	组合荷载作用下的圆柱壳屈曲	538
§ 14.5	环肋圆柱壳在静水外压下的总体屈曲	543
§ 14.6	壳体屈曲的其他问题	548
§ 14.7	近代稳定性理论概述	557
参考文献		567
习题答案		568
外国人名对照表		576

第一篇 薄板理论

第一章 弹性薄板小挠度

弯曲理论

§1.1 薄板及基本假设

工程构件可分为杆、板（壳）、块三种类型。一个物体若它的厚度比其他几何尺寸小得多，这种工程构件统称为**薄壁构件**。薄板就是薄壁构件的一种。实际上，薄板（壳）是由两个十分靠近的表面所围成的物体。两个表面间的垂直距离称为**厚度**（ h ）。若两表面彼此光滑平行，则为等厚度薄板（壳）。薄板（壳）体内平分厚度的面称为**中面**。平板的中面是平面，壳体的中面为曲面。如图 1.1 所示。可见，平板是壳体的特例。

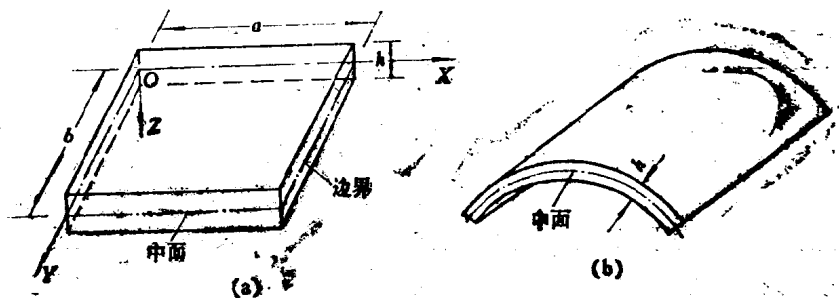


图 1.1 板壳构件

通常认为板厚 h 与中面最小边长 a_{\min} 之比小于 $1/5$ 时称为薄板，否则称为厚板。板（壳）中面外形的周边称为边界。为方便起见，今后通常以板壳的中面图形来绘制力学模型图。

板壳构件广泛应用于航天、航空、船舶、土建、化工等工程结构中。象杆件结构一样，板壳结构的设计也包含有强度、变形和稳定性的计算内容。本书共分三篇来讨论薄板的弯曲理论、薄壳的弯曲理论及板壳稳定性理论。

平板承受的静力荷载可有三种类型：作用于中面内的面内荷载；垂直于中面的侧向荷载；面内荷载与侧向荷载的共同作用。板在面内荷载作用下（图 1.2(a)），则是典型的弹性力学平面应力问题。它们的变形是在中面内的变形。其内力有：面内拉（压）力 N_x 、 N_y 及面内剪力 N_{xy} 、 N_{yx} ，它们统称为薄膜力。在侧向荷载作用下（图 1.2(b)），板的主要变形是弯曲变形。与梁的弯曲特征相比，板的弯曲变形是二维问题。就是说在 X 、 Y 两个坐标方向上都存在弯曲变形或曲率。除此之外，板的弯曲变形由于曲率的改变一般地还伴随有扭转变形发生，即有扭率存在。在板微分体的两对垂直的截面上弯曲内力有：弯矩 M_x 、 M_y ，扭矩 M_{xy} 、 M_{yx} ，横向剪力 Q_x 、 Q_y ，它们统称为弯曲力。如图 1.3 所示。当板在侧向荷载与面内荷载共同作用时（图 1.2(c)），则板处于

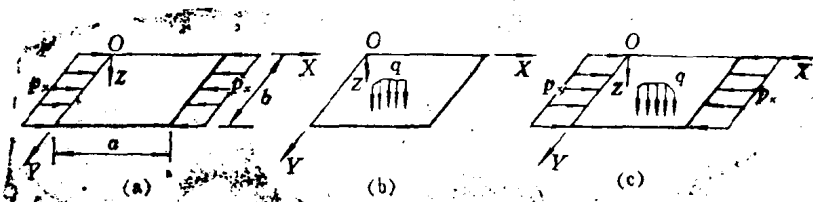


图 1.2 板的承载类型

复杂应力状态下工作。特别是当面内荷载较大时，则应考虑它对弯曲的影响。而当面内荷载为压力时，还应考虑板的稳定性问题。

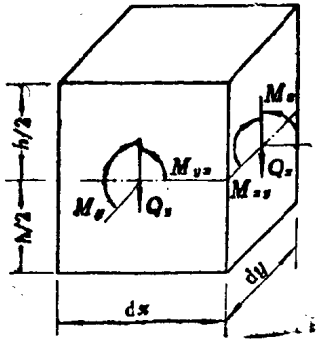


图 1.3 板的弯曲力素

一般情况下，板的内力既有弯曲力，又有薄膜力。当板承受横向荷载而产生的最大弯曲挠度 $w_{max} \ll h$ 时，板的弯曲应力为主要成分，薄膜应力远远小于弯曲应力。在分析中可忽略中面的薄膜力而只考虑弯曲力。从而认为板仅有弯曲变形而无中面的面内变形。这类板称为**刚性板**。刚性板的弯曲理论又称为**板的小挠度弯曲理论**。如果板的最大弯曲挠度 w_{max} 与板厚度相比属同量级或更大时，则板的弯曲应力和薄膜应力将具有同量级，因此在分析时不仅考虑弯曲力也要考虑薄膜力以及中面的面内变形。这类板称为**柔性板**。柔性板的弯曲理论又称为**板的大挠度弯曲理论**。当然也存在另一极端情况，就是板的弯曲挠度 w_{max} 远大于板的厚度时，这是属于板的特大挠度问题。此时弯曲力将远小于薄膜力，因而计算中可忽略弯曲力而只考虑薄膜力。这类板称为**绝对柔性板**。它的计算理论则为板的薄膜理论。

按板的变形状态特征可将板分为刚性板、柔性板和绝对柔性板三种。它们之间并无严格的界线。通常认为，一块板当 $w_{max}/h \leq 1/5$ 时按刚性板计算；当 $1/5 < w_{max}/h < 5$ 时按柔性板计算；而当 $w_{max}/h \geq 5$ 时按绝对柔性板计算。如此根据薄板的变形特征而分别建立起薄板的小挠度弯曲理论及大挠度弯曲理论，这些理论对板的研究带来很大方便。本章就是研究刚性板的弯曲理论，即薄板的小挠度弯曲理论。

为了研究方便，除按变形特征分类外，也可按其他特征对板进行分类研究。如按中面形状可分为矩形板、圆形板、杂形板等；如按材料特性可分为各向同性板、各向异性板、正交异性板等；如按板的构造特征可分为等厚度板、变厚度板、加筋板、夹心板等；如按边界支撑特征可分为简支板、固支板、弹性地基板

等等。

纵观薄板理论的发展历程，存在两种研究方法。一种是以柯西与泊松为代表的经典平面问题的数学弹性理论。另一种是以基尔霍夫为代表的工程薄板理论。后者是属于应用弹性力学的重要分支，它正是本书的理论基础。

弹性薄板的小挠度弯曲理论是建筑在基尔霍夫假设基础上的。薄板理论基本假设如下：

1. 假设板体材料是均匀、连续的理想弹性体；
2. 假定位移和形变是微小的。薄板的厚度 h 与最小外形尺寸 a_{\min} 相比是很微小的 ($h/a_{\min} < 1/5$)；而板的最大挠度与厚度相比是微小的 ($w_{\max}/h \leq 1/5$)，并且应变与转角都远小于 1；
3. 假定薄板弯曲时板的中面不发生面内的变形（伸缩或剪切变形）。这是刚性板弯曲的属性；
4. 直法线假设：变形前垂直于板中面的直线段，在变形后仍为直线段，而且仍垂直于变形后的中曲面，直线段长度不变；
5. 假定板中面的各平行层间变形中不挤压，即忽略垂直于平板中面的法向应力 σ_z 。

最后两点假定是基尔霍夫假设，又称直法线假设。实践证明，对于薄板弯曲基尔霍夫假设具有足够的工程精确度。但是对于薄板的角隅处以及与厚度等量级的开孔处附近，这个假设将引起理论误差。而最后一个假设对于板上有较大集中力作用的区域也将引起理论误差。

由第 5 个假设可知法向应力 $\sigma_z \cong 0$ 。根据第 4 个假设则剪切应变 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$ ，而且正应力 σ_x, σ_y 及剪应力 τ_{xy}, τ_{yx} 沿平板厚度按直线分布，如图 1.4 所示。第 4 个假设的含义是薄板弯曲时横向剪切变形为微量，由此而引起的挠度变化可以忽略。由第 3 个假设可认为中面内的应力值为零，即： $(\sigma_x)_{z=0} = (\sigma_y)_{z=0} = (\tau_{xy})_{z=0} = 0$ 。从而可知板的中面即为中性层。

应注意到第 4 个假设是从横向剪切变形对挠度 w 影响很小而

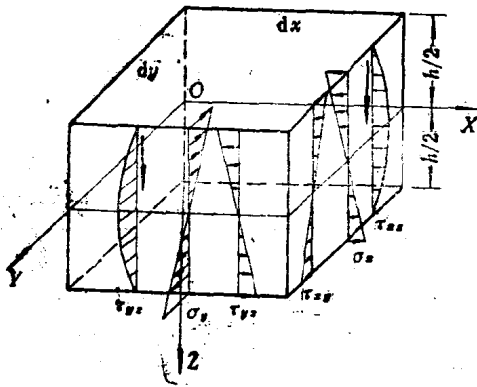


图 1.4 弯曲应力分布

作出的,但是横向剪力在平衡方程中却仍起作用。换言之,从变形角度假设 $\gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, 但从平衡条件角度 τ_{xz} 、 τ_{yz} 又存在。因而这里不能简单地使用广义虎克定律。这种矛盾性正是由于假设本身忽略了次要因素而造成的。其实这类矛盾在梁的弯曲理论中已经碰到。由梁的平面假设可知横向剪切应变为零,但横向剪力并不等于零。横向剪力如何求呢:先从梁的微分体平衡关系找出横向剪力 Q 和挠度 w 的微分关系 $Q = EJ(d^3w/dx^3)$, 再通过求解梁的弯曲基本微分方程 $EJ(d^4w/dx^4) = q(x)$ 及应用边界条件解得挠曲函数 $w(x)$ 后,即可由 $w(x)$ 求出弯矩 M 与横向剪力 Q , 进而得出正应力 σ_x 及沿截面高度作抛物线规律分布的横向剪应力 τ_{xz} 。板的弯曲问题也就是如此。通过积分板的弯曲平衡微分方程得到板中面的挠曲面函数 $w(x, y)$, 再由内力关系求得弯矩及横向剪力, 进而求得应力 σ_x 、 σ_y 、 τ_{xy} 、 τ_{yx} 、 τ_{xz} 、 τ_{yz} 。

以下几节就从几何变形关系、物理关系、平衡条件三方面来推导板弯曲的基本微分方程。

§1.2 板的几何变形方程

现在研究薄板在侧向荷载作用下所发生的几何变形曲率、扭