TANXINGLILUN

弹性理论

张培源 严 波 编著

重庆大学出版社

弹 性 理 论

张培源 严 波 编著

重庆大学出版社

内 容 提 要

本书系统、紧凑和全面地介绍了近代处理固体弹性变形的各类模型和相应的分析与计算方法，其中包括几何与本构非线性的一般理论、普适解和解的普遍性质，经典弹性理论的通解、Saint Venant问题、平面问题、空间问题、热应力、弹性波和数学分析方法七个专题。书中有丰富例题，每章附习题，书末有习题解答。

本书可作为力学、数学和机械设计等有关专业研究生的教材或教学参考书，也可供有关学科教师和科技工作者参考。

弹性理论

张培源 严 波 编著

责任编辑 周 任

*

重庆大学出版社出版发行

新 华 书 店 经 销

重 庆 印 制 一 厂 印 刷

*

开本：787×1092 1/16 印张：12.75 字数：318 千

1993年 11 月第 1 版 1993年 11 月第 1 次印刷

印数：1—2000

ISBN 7-5624-0467-4/O·65 定价：6.29元

（川）新登字020号

前　言

编写本书持续了5年时间。编写的目的在于为力学、数学和机械类研究生提供一本有关弹性固体变形的紧凑而又较为系统和全面体现近代弹性理论各种力学模型的教材或教学参考书，为提高研究生的数值计算能力和结构分析程序的应用能力打好坚实的基础。

遵循这个宗旨，本书用四分之一的篇幅叙述弹性固体变形的普遍原理，包括大变形几何学、弹性固体本构模型的普遍形式、非线性弹性论边值问题与解的一般性质和线性弹性力学模型与解的一般性质。对于经典弹性力学的内容，本书用七个专题，配以典型例题，进行了简明而又有足够深度地叙述，其中包括积分变换和解析函数等数字分析方法的应用。作为弹性理论的应用，本书还用一定的篇幅叙述薄板理论，包括小挠度模型、大挠度模型。书中每章有习题，书末有习题提示和答案。本书的内容在作者主讲的60学时力学类研究生课“弹性理论”中得到实践，取得了良好的效果。

陈山林教授和重庆大学工程力学系的老师和研究生对本书提出过许多宝贵意见，作者对此深表谢意。

希望本书对力学、数学和有关学科的研究生、教师和科技工作者有所帮助。由于作者水平有限，错误与不当之处，敬请读者指正。

目　录

第一部分　绪　　论

第二部分　基本原理

第三部分 经典弹性理论专题

第四部分 弹性理论的应用——薄板的弹性力学

第一部分 绪　论

第一章 弹性理论的内容、模型和基本术语

提要　本章叙述弹性理论课程的性质、地位和它所研究的模型，此外还涉及研究物体变形运动的一些最基本的概念和术语。

§1-1 弹性理论课程的性质和地位

弹性理论研究弹性固体变形运动的原理和分析方法，它是构件和结构静动态位移分析、应力分析和强度计算的理论基础。因此，弹性理论课程是工程类专业的一门重要技术基础课，是工程力学专业的主要基础课。

弹性理论课程的主要任务是：在理论力学和材料力学等课程的基础上，进一步培养和提高学生分析和处理固体弹性变形的能力，为学习有关专业课程和进行科学研究或工程应用奠定变形和应力分析的初步基础，同时也增加毕业生的适应性和发展潜力。

§1-2 弹性理论的研究模型

一、连续介质模型

弹性理论研究模型的基本假设是连续介质假设。这个假设认为，在模型物体中物质呈数学连续分布，因而与物质有关的物理量成为模型物体所占区域的连续场或分区连续场。研究物体的变形和应力就是研究相应的场的运动和变化。

连续介质模型是场理论中应用微积分学的物理基础。

物质结构的近代理论表明，在微观尺度上，物质的分布总不是连续的，而是间断的。因而连续介质模型适用的物体存在一个尺度下限，换言之，连续介质模型适用于包含大量离散物质点所组成的宏观单元体。例如对于工程材料，这种宏观单元体须包含大量的分子或原子。

二、关于变形的假设

以工程材料的结构应用为背景，可以对模型物体的变形引入简化假设。在弹性理论中，常用到两个假设：(1)小应变假设；(2)小变形假设。在后面的叙述里，将详细说明这两个假设。

三、关于物理性质的假设

对于模型物体的物理性质，通常引入如下假设：

(1)　均匀性假设：宏观单元体的物理性质与它的空间位置无关；

(2)　各向同性假设：宏观单元体的物理性质与单元体的取向无关；

(3)　参考状态假设：物体存在一个参考状态，位移、变形和内力都是相对这个参考状

态计算；

（4） 本构关系的简化假设：宏观单元体的变形和应力间的关系服从一些简化的假设。例如在一定的描写方式下服从线性齐次关系等。

在其后的叙述中，将部分地或全部地采用这些假设，并在相应的章节里作详细的叙述。

§1-3 基本概念和术语

一、外力和内力

模型物体之外的其他物体，通过接触或某些场的作用施予模型物体上的力称为该模型物体的外力。模型物体内，一部分与另一部分间的相互作用力称为模型物体的内力。内力也可以通过场（例如电磁场）而产生，也可以相互接触而产生。本书仅讨论在接触面上产生的两部分物体间的内力。

二、体力、面力和集中力

根据施力点集合的几何特征，可以把一个力系区别为体力、面力和集中力。施力点集合是三维空间区域的力系称为体力；施力点集合是曲面的力系称为面力；施力点集合是离散点集的力系称为集中力。

体力的量度采用力的体积密度，即单位体积中力的总和，用矢量$\mathbf{f}$或它的分量f_1、f_2和f_3表示

$$\mathbf{f}=f_1\mathbf{i}_1+f_2\mathbf{i}_2+f_3\mathbf{i}_3=f_k\mathbf{i}_k \tag{1-1}$$

式中$\mathbf{i}_1$、$\mathbf{i}_2$、$\mathbf{i}_3$为某固定直角坐标系ϕ的基本单位矢量。一般而言，体力分量f_1、f_2和f_3是定义在物体所占空间区域v中的函数，这些函数与时间变化有关

$$f_k=f_k(x_1,\ x_2,\ x_3;\ \tau)\quad (x_1,x_2,x_3)\in v,\ -\infty<\tau<t \tag{1-2}$$

这里τ和t分别表示历史时刻和现时时刻、物体v上的体力的主矢和对原点的主矩的各分量分别为

$$F_k=\int_v f_k\mathrm{d}v,\qquad m_k=\int_v e_{klm}x_l f_m\mathrm{d}v \tag{1-3}$$

这里，引入所谓交换记号e_{klm}，其定义为

$$e_{123}=e_{231}=e_{312}=1,\ \ e_{213}=e_{132}=e_{321}=-1$$

$$e_{kkl}=e_{kmm}=e_{eke}=e_{kkk}=0$$

并且作了如下求和的简记

$$f_k\mathbf{i}_k\ \overset{\text{Def}}{=\!=}\sum_{k=1}^{3}f_k\mathbf{i}_k,\quad e_{klm}x_lf_m\ \overset{\text{Def}}{=\!=}\sum_{l=1}^{3}\sum_{m=1}^{3}e_{klm}x_lf_m$$

面力的量度采用力的面密度，即单位面积相应的力矢量，并用矢量$\mathbf{p}$或分量p_1、p_2、p_3表示

$$\mathbf{p}(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \tau)=p_k(x_1,\ x_2,\ x_3,\ \tau)\mathbf{i}_k\qquad (x_1,x_2,x_3)\in s,\ \ -\infty<\tau<t \tag{1-4}$$

式中s为面力的作用曲面。此曲面上面力的主矢和对原点的主矩的各分量分别为

$$P_k=\int_s p_k\mathrm{d}s, \qquad M_k=\int_s e_{klm}x\ p_m\mathrm{d}s \tag{1-5}$$

集中力是微小范围上具有极大体密度或面密度的力系的主矢。如果微小范围里力系对其内部某点的主矩非零，则可以用集中力矩的数学模型来表示。

三、伸长和应变

参考状态下方向为N的线元素

$$\mathrm{d}\mathbf{X}=\mathrm{d}X_k\mathbf{i}_k \tag{1-6}$$

经过变形运动，在时刻 t 成为方向为n的线元素

$$\mathrm{d}\mathbf{x}=\mathrm{d}x_k\mathbf{i}_k \tag{1-7}$$

这里N和n都是单位矢量，其分量可以用线元素的坐标和线元素的长度表示

$$N_k=\mathrm{d}X_k/\mathrm{d}L,\quad n_k=\mathrm{d}x_k/\mathrm{d}l \tag{1-8}$$

式中线元素的长度在参考状态和时刻 t 的变形状态分别为

$$\mathrm{d}L=\sqrt{\delta_{kl}\mathrm{d}X_k\mathrm{d}X_l} \qquad \mathrm{d}l=\sqrt{\delta_{kl}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l} \tag{1-9}$$

这里引用了Kronecker delta

$$\delta_{kl}=\begin{cases}1 & k=l\\ 0 & k\neq l\end{cases},\quad \mathbf{i}_k\cdot\mathbf{i}_l=\delta_{kl} \tag{1-10}$$

并采用了求和简记。这里有意地采用了英文字母大写和小写分别表示参考状态和变形状态相应的同一物质点坐标。例如$\mathbf{X}(X_1,\ X_2,\ X_3)$和$\mathbf{x}(x_1,\ x_2,\ x_3)$分别为同一物质点在参考状态和变形状态的坐标，并分别称为物质坐标和空间坐标。

线元素dx的伸长和线应变分别定义为

$$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{N},t)\ \overset{\mathrm{Def}}{=\!=}\ \frac{\mathrm{d}l}{\mathrm{d}L} \tag{1-11}$$

$$\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{N},t)\overset{\mathrm{Def}}{=\!=}\lambda(\mathbf{X},\mathbf{N},t)-1 \tag{1-12}$$

记号$\lambda(\mathbf{X},\mathbf{N},t)$表示与X和N有关的函数。如果两线元素dX和dX′相互正交且自同一质点X引出，在变形状态下分别成为自空间点x引出的线元素dx和dx′，那么线元素dX和dX′的剪应变定义为

$$\gamma(\mathbf{X},\mathbf{N},\mathbf{N}',t)=\sin^{-1}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}') \tag{1-13}$$

式中$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'$表示矢量n和n′的点积

$$\mathbf{n}\cdot\mathbf{n}'=n_k\cdot n_k'$$

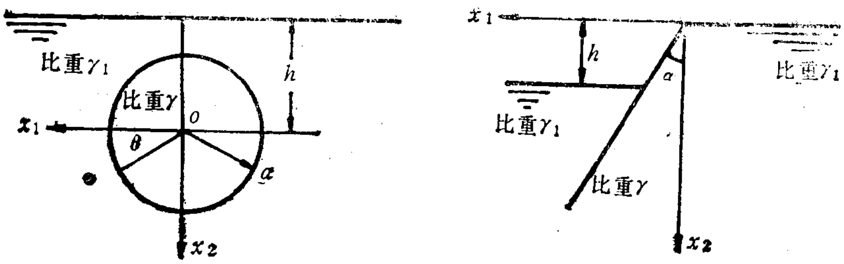
这里 $n_k=\mathrm{d}x_k/\mathrm{d}l,\ n_k'=\mathrm{d}x_k'/\mathrm{d}l'$

$$\mathrm{d}l=\delta_{kl}\mathrm{d}x_k\mathrm{d}x_l,\quad \mathrm{d}l'=\delta_{kl}\mathrm{d}x_k'\mathrm{d}x_l'$$

式(1-13)表示的剪应变表示变形后两正交方向的夹角（直角）减少量。

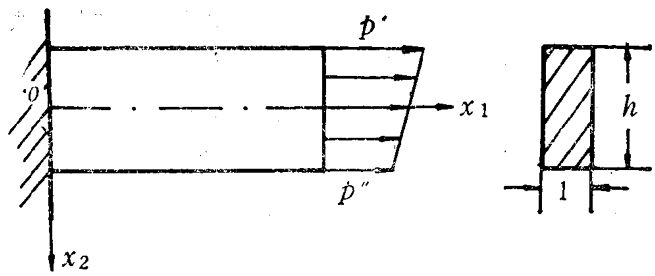
习　题

1. 为什么连续介质模型存在宏观物质单元的尺度下限？
2. 描写图示物体所受的体力和面力各分量。



题 1-2

3. 求悬臂梁端部所受面力对截面中心的主矢和主矩各分量。



题 1-3

4. 在给定点，给定时刻，给定方向的伸长λ决定函数$\frac{1}{n}(\lambda^n-1)$的值$E_n(\lambda)$，式中n取非零实数。再约定$E_0=\ln\lambda$。试求$E_n(\lambda)$在$\lambda=1$的Taglar级数并证明当$|\lambda-1|\ll 1$时，$E_n(\lambda)\approx\lambda-1$

弹性理论

第二部分 基本原理

第二章 变形几何学

提要 本章叙述位移场、变形梯度场和应变场的概念和相互关系。

§2-1 位移场和变形梯度

一、位形和位移场

现在用V和v分别表示同一模型物体在参考状态和即时(t时刻)状态的位形(Configuration)，也用这两个符号表示同一模型物体在参考状态和即时状态下所占的空间区域。取空间固定的直角坐标系$ox_1x_2x_3$，把参考位形中坐标为$\mathbf{X}$的质点简称为质点$\mathbf{X}$。经过变形运动，在即时位形中质点$\mathbf{X}$具有坐标$\mathbf{x}$。如果变形不破坏物体的连续性，那么存在单值的连续函数

$$\mathbf{x}=\mathscr{X}(\mathbf{X},t) \qquad \mathbf{X}\in V \tag{2-1}$$

或

$$x_k=\mathscr{X}_k(\mathbf{X},t) \qquad \mathbf{X}\in V$$

使两位形V和v中的点一一对应。函数表示空间坐标$\mathbf{x}$的物质场及其对时间t的依赖性。

位移的物质场简称位移场，其定义为

$$U_k(\mathbf{X},t)=\mathscr{X}_k(\mathbf{X},t)-X_k \qquad \mathbf{X}\in V$$

或

$$\mathbf{U}(\mathbf{X},t)=\mathbf{x}-\mathbf{X}=U_k\mathbf{i}_k$$

因此，空间坐标场、位移场和物质坐标有如下关系

$$\mathbf{x}=\mathbf{X}+\mathbf{u}(\mathbf{X},t) \tag{2-2}$$

或

$$x_k=X_k+u_k(\mathbf{X},t)$$

二、变形梯度

变形梯度的物质场简称变形梯度场或变形梯度，其定义为

$$F_{kl}(\mathbf{X},t)=x_{k,l} \tag{2-3}$$

式中引入了对物质坐标偏导数简记

$$x_{k,l}\ \overset{\text{Def}}{=\!=}\ \frac{\partial x_k}{\partial X_l}$$

利用式(2-2)，可以得到

$$F_{kl}(\mathbf{x},t)=\delta_{kl}+u_{k,l}(\mathbf{X},t) \tag{2-4}$$

式中$u_{k,l}(\mathbf{X},t)$又可以称为位移梯度的物质场，简称位移梯度。

空间坐标、物质坐标和位移都是矢量场，已经分别用$\mathbf{X}$，$\mathbf{x}$和$\mathbf{u}$抽象地表示。变形梯度和位移梯度各有9个分量，它们各自构成二阶张量场，也可以分别用$\mathbf{F}$和$\mathbf{K}$抽象地表示。

变形梯度表示过给定点的线元素自参考位形到即时位形的变换

$$dx_k = F_{kl} dX_l \tag{2-5}$$

用ε_{kl}和ω_{kl}分别表示位移梯度$u_{k,l}$的对称部分和反对称部分，即

$$\varepsilon_{kl} \overset{\text{Def}}{=\!=} \frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k}),\quad \varepsilon_{kl}=\varepsilon_{lk} \tag{2-6}$$

$$\omega_{kl} \overset{\text{Def}}{=\!=} \frac{1}{2}(u_{k,l}-u_{l,k}),\quad -\omega_{kl}=\omega_{lk} \tag{2-7}$$

那么变换式(2-5)可以表示为

$$dx_k = (\delta_{kl}+\varepsilon_{kl}+\omega_{kl})dX_l \tag{2-8}$$

方程(2-6)称为Cauchy方程。

§2-2 应 变 场

一、Green应变

用所谓Green应变表示应变的物质场，其定义为

$$E_{kl} \overset{\text{Def}}{=\!=} \frac{1}{2}(F_{mk}F_{ml}-\delta_{kl}) \tag{2-9}$$

根据这个定义可以证明如下公式

（1） $$E_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k}+u_{m,k}u_{m,l}) \tag{2-10}$$

（2） $$E_{kl}=\varepsilon_{kl}+\frac{1}{2}(\varepsilon_{mk}\varepsilon_{ml}+\varepsilon_{mk}\omega_{ml}+\omega_{mk}\omega_{ml}) \tag{2-11}$$

（3） $$E_{kl}=E_{lk} \qquad \text{(对称性)} \tag{2-12}$$

为了说明Green应变分量的几何意义，现在证明如下定理：

如果物体的变形满足小应变条件，即任意点任意方向的线应变和任意两正交方向剪应变满足条件

$$|\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{N},t)|\ll 1 \qquad |\gamma(\mathbf{X},\mathbf{N},\mathbf{N}',t)|\ll 1 \tag{2-13}$$

那么当 $\mathbf{N}=\mathbf{i}_1$时，$\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{N},t)=E_{11}(\mathbf{X},t)$

当 $\mathbf{N}=\mathbf{i}_1$，$\mathbf{N}'=\mathbf{i}_2$时，$\gamma(\mathbf{X},\mathbf{N},\mathbf{N}',t)=2E_{12}(\mathbf{X},t)$

事实上，方向为$\mathbf{i}_1$和$\mathbf{i}_2$、长度分别为dL和 dL' 的、引自同一点$\mathbf{X}$ 的线元素，变形后分别为

$$dx_k=F_{k1}(\mathbf{X},t)dL \qquad dx'_k=F_{k2}(\mathbf{X},t)dL'$$

其长度的平方分别变成为

$$dl^2=F_{k1}F_{k1}dL^2 \qquad dl'^2=F_{k2}F_{k2}dL'^2$$

计算dl^2-dL^2，利用式(1-11)，(1-12)和式(2-13)与式(2-9)有

$$2E_{11}dL^2=\frac{dl-dL}{dL}\cdot\frac{dl-dL+2dL}{dL}\cdot dL^2=\{\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t)[2+\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t)]\}dL^2$$

因此 $$E_{11}=\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i},t)\left(1+\frac{1}{2}\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t)\right)\approx\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t)$$

再计算两线元素变形后夹角的余弦，此值须等于夹角减小量$\gamma(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,t)$的正弦

$$\sin\gamma(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,t)=\frac{dx_k}{dl}\cdot\frac{dx'_k}{dl'}=\{2E_{12}/[(1+\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t))(1+\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_2,t))]\}$$

利用式(2-13)

$$\sin\gamma(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,t)=\gamma(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,\mathbf{i}_2,t)$$

$$2E_{12}/[(1+\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_1,t))(1+\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{i}_2,t))]\approx 2E_{12}$$

于是命题证毕。

类似的分析可以证明，参考位形中方向为$\mathbf{N}=N_k\mathbf{i}_k$的线元素有线应变

$$\varepsilon(\mathbf{X},\mathbf{N},t)=E_{kl}N_kN_l \tag{2-14}$$

二、小变形应变和转动

由式(2-6)定义的 9 个量$\varepsilon_{kl}(k,l=1,2,3)$和式(2-7)定义的 9 个量$\omega_{kl}(k,l=1,2,3)$分别称为小变形应变和小变形转动。它们都是二阶张量场，可以分别用ε和ω抽象地表示。由于对称性和反对称性，小变形应变张量仅有 6 个独立分量，小变形转动张量仅有 3 个独立分量。

称位移梯度满足条件

$$|u_{k,l}|\ll 1,\quad |u_{k,l}|^2\ll|u_{m,n}| \tag{2-15}$$

的变形为小变形。显然，在小变形条件下

$$\varepsilon_{kl}\approx E_{kl} \tag{2-16}$$

因此ε_{11}表示小变形下方向$\mathbf{i}_1$的线应变，ε_{12}表示方向$\mathbf{i}_1$和$\mathbf{i}_2$间剪应变之半。其余分量的变形几何含义可以类推。

位移场对物质坐标的散度和旋度分别为

$$\mathrm{Div}\,\mathbf{u}\overset{\mathrm{Def}}{=\!=}u_{1,1}+u_{2,2}+u_{3,3}=u_{k,k} \tag{2-17}$$

$$\mathrm{Rot}\,\mathbf{u}\overset{\mathrm{Def}}{=\!=}(u_{3,2}-u_{2,3})\mathbf{i}_1+(u_{1,3}-u_{3,1})\mathbf{i}_2+(u_{2,1}-u_{1,2})\mathbf{i}_3 \tag{2-18}$$

根据定义(2-6)和(2-7)得

$$\varepsilon_{kk}=\mathrm{Div}\,\mathbf{u} \tag{2-19}$$

$$\omega_{kl}=-e_{klm}\omega_m \tag{2-20}$$

式中Rotu的分量用$2\omega_m$表示

$$\omega_m=\frac{1}{2}(\mathrm{Rot}\,\mathbf{u})_m \tag{2-21}$$

例) 均匀变形

对于12个常量$a_{kl}(k,l=1,2,3)$和$b_k(k=1,2,3)$构成线位移场

$$u_k=a_{kl}X_l+b_k$$

由式(2-6)和(2-7)可知，相应的小变形应变和转动是均匀场

$$\varepsilon_{kl}=\frac{1}{2}(a_{kl}+a_{lk}),\quad \omega_{kl}=\frac{1}{2}(a_{kl}-a_{lk})$$

两式作和，得

$$a_{kl}=\varepsilon_{kl}+\omega_{kl}\quad 和\quad u_k=b_k+\omega_{kl}X_l+\varepsilon_{kl}X_l$$

这里$b_k+\omega_{kl}X_l$和$\varepsilon_{kl}X_l$分别为位移的小变形刚体位移部分和小变形变形位移部分。

§2-3 面元素和体元素的变换

如果把变形运动看作参考位形到即时位形的一个变换，那么式(2-1)为物质点的变换式，式(2-5)为线元素的变换式。本节讨论面元素和体元素的变换式

一、体元素的变换和体积应变

1. 参考位形上点X处的体元素dV是以自此点引出的线元素$dX_1\mathbf{i}_1$、$dX_2\mathbf{i}_2$、$dX_3\mathbf{i}_3$为邻边的正六面体体积。它可以用这三个矢量的混合积表示

$$dV=(dX_1\mathbf{i}_1\times dX_2\mathbf{i}_2)\cdot dX_3\mathbf{i}_3$$

显然 $dV=dX_1dX_2dX_3$

在即时位形中，以这三条线元素为邻构成的平行六面体体积为

$$dv=(F_{k1}dX_1\mathbf{i}_k\times F_{l2}dX_2\mathbf{i}_l)\cdot F_{m3}dX_3\mathbf{i}_m$$

利用 $(\mathbf{i}_k\times\mathbf{i}_l)\cdot\mathbf{i}_m=e_{klm}$ (2-22)

$$e_{klm}F_{k1}F_{l2}F_{m3}=\det\mathbf{F} \tag{2-23}$$

得到 $dv=dV\det\mathbf{F}$ (2-24)

式中$\det\mathbf{F}$表示二阶张量$\mathbf{F}$的行列式

$$\det\mathbf{F}\overset{\text{Def}}{=\!=}\begin{vmatrix}F_{11}&F_{12}&F_{13}\\F_{21}&F_{22}&F_{23}\\F_{31}&F_{32}&F_{33}\end{vmatrix} \tag{2-25}$$

式(2-24)便为体元素变换式。因为变形运动是几何上可实现的运动，$dV>0$，$dv>0$，因此

$$\det\mathbf{F}>0 \quad 且 \quad \det\mathbf{F}<\infty \tag{2-26}$$

2. 由行列式的性质可知

$$(\det\mathbf{F})^2=|F_{mk}F_{ml}|$$

式中$|F_{mk}F_{ml}|$表示以$C_{kl}(=F_{mk}F_{ml})$为元素的行列式。再由式(2-9)解出$F_{mk}F_{ml}$并代入此式，得

$$(\det\mathbf{F})^2=1+2\,\mathrm{I}_E+4\,\mathrm{II}_E+8\,\mathrm{III}_E \tag{2-27}$$

这里I_E、II_E、III_E分别为Green应变张量$\mathbf{E}$的一次、二次和三次不变量

$$\mathrm{I}_E=E_{kk} \tag{2-28}$$

$$\mathrm{II}_E=\frac{1}{2}[E_{kl}E_{kl}-(E_{mm})(E_{nn})] \tag{2-29}$$

$$\mathrm{III}_E=\det\mathbf{E} \tag{2-30}$$

所谓体积应变定义为

$$E\overset{\text{Def}}{=\!=}\frac{dv-dV}{dV} \tag{2-31}$$

现在计算$[(dv)^2-(dV)^2]/(dV^2)$。一方面，由此定义可得此值为$(2+E)E$；另一方面，由式(2-24)可得其值为$[(\det\mathbf{F})^2-1]$，因此

$$E\left(1+\frac{1}{2}E\right)=\mathrm{I}_E+2\,\mathrm{II}_E+4\,\mathrm{III}_E \tag{2-32}$$

3. 在小变形条件下，此式简化为

$$\overset{\text{L}}{E} = \varepsilon$$

这里用ε表示小变形应变的第一不变量

$$\varepsilon \overset{\text{Def}}{=\!=\!=} \varepsilon_{kk} \tag{2-33}$$

因此，就用ε表示体积应变。此外，在小变形条件下，体元素变换式(2-24)简化为

$$\mathrm{d}V \doteq \mathrm{d}v \tag{2-34}$$

二、面元素变换

面元素是区别了正负两侧的微小的曲面，其数学描写用矢量表示。矢量的方向为面元素自正侧向外引出的法线方向，矢量的模为面元素的大小。

1. 如果某面元素在参考位形和即时位形中分别为

$$\mathrm{d}\mathbf{A} = \mathrm{d}A\mathbf{N}, \quad \mathrm{d}\mathbf{a} = \mathrm{d}a\mathbf{n}$$

以$\mathrm{d}\mathbf{A}$为底，以$\mathbf{N}$为母线方向，构成高为$\mathrm{d}L$的柱体，此柱体体积为$\mathrm{d}A\mathrm{d}L$。在即时位形中，线段$\mathbf{N}\mathrm{d}L$不再是面元素$\mathrm{d}\mathbf{a}$的垂直线段。柱体$\mathrm{d}A\mathrm{d}L$在即时位形的高是$\mathbf{n}\cdot(F_{kl}N_l\mathrm{d}L\mathbf{i}_k)$。$N_l$为$\mathbf{N}$的分量。因此，即时位形中，此柱体体积为$\mathrm{d}a\mathbf{n}\cdot(F_{kl}N_l\mathrm{d}L\mathbf{i}_k)$。由式(2-24)

$$\mathrm{d}\mathbf{A}\cdot\mathbf{N}\mathrm{d}L\det\mathbf{F} = \mathrm{d}\mathbf{a}\cdot(F_{kl}N_l\mathrm{d}L\mathbf{i}_k)$$

化简后得到

$$\mathrm{d}A_k\det\mathbf{F} = \mathrm{d}a_lF_{lk}, \quad \mathrm{d}A\det\mathbf{F} = \mathrm{d}aF_{kl}n_kN_l \tag{2-35}$$

式中$\mathrm{d}A_k$和$\mathrm{d}a_l$分别为面元素矢量的分量

$$\mathrm{d}A = \mathrm{d}AN_k, \quad \mathrm{d}a_k = \mathrm{d}an_k$$

式(2-35)称为Nanson公式，

2. 在小变形条件下，式(2-35)简化为

$$\mathrm{d}A \approx \mathrm{d}a, \quad \mathrm{d}A_k \approx \mathrm{d}a_k \tag{2-36}$$

例　不可压缩条件

在变形体力学中，有时采用不可压缩介质这一力学模型。对于不可压缩介质，要求允许的变形运动满足体元素体积不变的约束条件。由式(2-24)和(2-27)，不可压缩介质的变形运动约束条件为如下方程之任一种形式

$$\det\ \mathbf{F} = 1 \tag{2-37}$$

$$\mathrm{I}_E + 2\,\mathrm{II}_E + 4\,\mathrm{III}_E = 0 \tag{2-38}$$

在小变形条件下，这个约束条件简化为

$$\varepsilon_{kk} = 0 \tag{2-39}$$

§2-4　协调方程

一、应变分量的非独立性

式(2-10)表明，Green应变的6个分量由位移的3个分量决定，因此这6个应变分量不是独立的，存在着一定的内部联系。把表示这种内部联系的数学条件称为协调方程。

在单连域里，协调方程表示应变场存在相应的位移场的充要条件。

在小变形条件下，通过求偏导数和恒等变换的方法在式(2-6)中消去位移分量，得到小变形应变协调方程

$$\varepsilon_{kl,mn} + \varepsilon_{mn,kl} - \varepsilon_{kn,lm} - \varepsilon_{km,lm} = 0, \quad k = m \tag{2-40}$$

这些方程中，只有以下6个是有效的

$$\left.\begin{array}{ll}k=m=1,\ l=2,\ n=2 & 2\varepsilon_{12,12}-(\varepsilon_{11,22}+\varepsilon_{22,11})=0\\ k=m=2,\ l=3,\ n=3 & 2\varepsilon_{23,23}-(\varepsilon_{22,33}+\varepsilon_{33,22})=0\\ k=m=3,\ l=1,\ n=1 & 2\varepsilon_{31,31}-(\varepsilon_{33,11}+\varepsilon_{11,33})=0\\ k=m=1,\ l=3,\ n=2 & \varepsilon_{13,12}+\varepsilon_{12,13}-\varepsilon_{11,23}-\varepsilon_{23,11}=0\\ k=m=2,\ l=1,\ n=3 & \varepsilon_{21,23}+\varepsilon_{23,21}-\varepsilon_{22,31}-\varepsilon_{31,22}=0\\ k=m=3,\ l=2,\ n=1 & \varepsilon_{32,31}+\varepsilon_{31,32}-\varepsilon_{33,12}-\varepsilon_{12,33}=0\end{array}\right\}\qquad(2\text{-}41)$$

这6个方程称为Saint-Venant协调方程。

二、由小变形应变场求位移场的可积条件

试讨论由小变形应变场求位移场的方法。把方程(2-6)看作关于$u_1(\mathbf{X})$，$u_2(\mathbf{X})$，$u_3(\mathbf{X})$的偏微分方程组，可能含有的自变量t看作参变数且不于显著标出。为简便计，仅讨论如下平面变形的情形

$$u_3(X_1,X_2,X_3)=0,\quad u_1=u_1(X_1,X_2),\quad u_2=u_2(X_1,X_2)$$

这时式(2-6)成为

$$u_{1,1}=\varepsilon_{11},\quad u_{2,2}=\varepsilon_{22},\quad \frac{1}{2}(u_{1,2}+u_{2,1})=\varepsilon_{12}$$

由点$(X_{10},\ X_{20})$经曲线C到点$(X_1,\ X_2)$作积分，以求位移分量

$$u_1(X_1,X_2)=u_1(X_{10},X_{20})+\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}u_{1,1}\mathrm{d}X_1+u_{1,2}\mathrm{d}X_2$$

$$=u_1(X_{10},X_{20})+\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}\varepsilon_{11}\mathrm{d}X_1+\varepsilon_{12}\mathrm{d}X_2$$

$$-\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}\omega_3\mathrm{d}X_3$$

这里已经用到式(2-7)、(2-20)和(2-21)

$$\omega_3=\frac{1}{2}(u_{2,1}-u_{1,2})$$

容易证明

$$\omega_{3,1}=\varepsilon_{12,1}-\varepsilon_{11,2},\quad \omega_{3,2}=\varepsilon_{22,1}-\varepsilon_{12,2}$$

后一积分经分部处理后成为

$$-\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}\omega_3\mathrm{d}X_2=\omega_3(X_{20}-X_2)+\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}(X_2-X_{20})[(\varepsilon_{12,1}-\varepsilon_{11,2})$$

$$\mathrm{d}X_1+(\varepsilon_{22,1}-\varepsilon_{12,2})\mathrm{d}X_2]$$

于是得到已知应变求位移的线积分式

$$u_1(X_1,X_2)=u_1(X_{10},X_{20})-\omega_3(X_2-X_{20})+\int_{C\,(X_{10},X_{20})}^{(X_1,X_2)}U_1\mathrm{d}X_1+U_2\mathrm{d}X_2\qquad(2\text{-}42)$$

式中引入了记号

$$U_1=\varepsilon_{11}+(X_{20}-X_2)(\varepsilon_{11,2}-\varepsilon_{12,1}),\quad U_2=\varepsilon_{12}+(X_{20}-X_2)(\varepsilon_{12,2}-\varepsilon_{22,1})\qquad(2\text{-}43)$$