

# 高等工程力学

(下)

伊·萨博 著

海洋出版社

# 高等工程力学

## 下册

伊·萨博 著

张人钦 雷有常 译

海洋出版社

1984年·北京

## 内 容 简 介

本书系统地介绍了工程力学的重要原理及其应用。全书按上、下两册译出。上册内容包括力学原理和弹性理论,主要讨论了虚功原理、达兰贝尔原理、哈密顿原理、拉格朗日运动方程、变分计算和赫兹接触碰撞理论、板和壳的理论、杆的扭转及不稳定问题等。下册内容包括塑性理论和液体、气体理论,着重讨论了塑性理论及其在弯曲和扭转中的应用、涡流定理、势流及其函数理论、相似图象法、粘性液体的运动及压缩波理论等。各专题都附有实例和习题,有助于读者掌握运用所涉及到的内容。

本书可供理工科高等院校的教师、研究生、高年级学生和工业、交通及建筑等部门的工程技术人员和科研工作者参考。

István Szabó

Höhere Technische Mechanik

高等工程力学

下 册

伊·萨博 著

张人钦 雷有常 译

---

海 洋 出 版 社 出 版 (北京市复兴门外大街)

新华书店北京发行所发行 北京印刷一厂印刷

开本: 787×1092 1/32 印张: 8.5 字数: 200千字

1984年10月第一版 1984年10月第一次印刷

印数: 1— 2,000

---

统一书号: 13193·0295 定价: 1.50元

# 目 录

## III 塑性理论概要

§16	概 论	1
1.	关于塑性理论研究的范围和发展概况	1
2.	物理前提	5
3.	应力状态和应变状态	7
a)	应力状态	7
b)	应变状态	11
4.	屈服条件和硬化准则 破坏假说	13
5.	应力-应变关系	18
a)	弹性问题	18
b)	牛顿、开尔文和麦克斯韦定理(对小应变)	19
c)	亨肯定理	20
d)	圣维南、列维-密赛斯和普朗特-罗伊斯的微分应力-应变定 理	21
e)	有限定理或微分定理	23
6.	变形能	24
7.	塑性理论问题的解	26
§17	应 用	27
1.	梁的塑性弯曲理论	27
2.	梁理论的例子和补充	31
a)	对理想塑性材料和矩形横截面所作的解	31
b)	例子	33
c)	挠度的计算	36

d) 剪应力	37
3. 塑性扭转	39
4. 轴对称问题	50
5. 超过比例极限后杆件的屈曲	62
a) 恩格泽尔-卡门的屈曲理论	63
b) 香利(Shanleg)的屈曲理论	65
6. 平面塑性流动问题和滑移线理论	68
7. 工艺成型法的举例——轧制过程	76
<b>§16 和 §17 的练习</b>	<b>80</b>

#### IV 液体和气体理论

<b>§18 理想液体</b>	<b>107</b>
1. 欧拉基本方程	107
2. 连续方程和状态方程	109
3. 质量守恒 动量定理和能量定理	112
<b>§19 不可压缩理想液体的动力学</b>	<b>113</b>
1. 普遍方程和基本观点	113
2. 赫尔姆霍茨涡流定理	117
3. 势流	120
4. 平面定常势流	123
5. 平面势流的例	127
a) 平行流	127
b) 点源	128
c) 点涡	130
d) 源和汇 偶极子	132
6. 圆柱绕流	134
a) 无环量的	134
b) 具有环量的平行流	136
7. 相似图像法	137
8. 相似图像法的例	140

	a) 圆映射为弓形圆 .....	140
	b) 绕一个平板的流动 .....	141
	9. 库塔-茹柯夫斯基翼型条件 .....	142
	10. 平面表面波 .....	145
§20	粘性液体的运动 .....	148
	1. 纳维-斯托克斯运动方程 .....	148
	2. 球的斯托克斯阻力公式 .....	153
	3. 小粘度液体 普朗特附面层 .....	157
	a) 基本观点 .....	157
	b) 沿薄板的流动 .....	158
	c) 层流附面层的分离和涡流的形成 .....	163
	d) 机翼理论概述 .....	164
§21	理想气体动力学概要 .....	168
	1. 气体动力学的基本方程 .....	168
	2. 热力学的基本定律 .....	169
	3. 小扰动的传播 声速 .....	172
	4. 马赫数 .....	176
	5. 压缩波或激波 .....	177
	6. 定常流和无旋流 .....	179
	7. 定常流管理论 .....	183
§22	气体动力学问题的势理论处理 .....	189
	1. 定常无旋流的速度势微分方程 .....	189
	2. 细长翼型的平面平行入流 .....	192
	3. 绕细长回转体的流动 .....	196
	4. 最小阻力的回转体 .....	201
§23	具有不连续面的气流(压缩波) .....	209
	1. 激波的一般方程 .....	209
	2. 一维定常压缩波 .....	216

3. 一维非定常压缩波 .....	217
4. 对压缩波理论的进一步阐述 .....	218
<b>§18 至 § 23 的练习 .....</b>	<b>221</b>
<b>附录 混合题 .....</b>	<b>258</b>

### III 塑性理论概要

#### §16 概 论

##### 1. 关于塑性理论研究的范围和发展概况

在弹性理论中,我们已经能够对确定的物体,如梁、板等从理想的、符合胡克定律的材料出发,计算其应力和变形。可是,实际的材料性能大多数是复杂的。例如,有些铜合金和铝合金从受载一开始,就反映出在应力和应变之间完全不存在线性关系;对其它金属也只是到所谓比例极限才符合线性,接着应力-应变曲线或是非线性地单调上升,或者是经过塑性流动,即应变在不变应力下增加。对工程人员,重要的是了解他的工程结构或机器元件在材料超过弹性极限或到达所谓塑性范围时是否就失效,或者在没有出现不允许的大的变形时尚有多大的承载能力?对所有工艺成型法,如轧制、模压和锻造,人们希望能计算被加工材料在出现塑性流动时的力。同时,塑性变形在卸载之后还有残余变形,对第一类问题,残余变形一般和弹性变形最多是同一量级,因此工程结构不会丧失它的工作能力;如果是第二类问题,残余变形往往是如此之大,以致不需要考虑弹性变形。



塑性理论<sup>1)</sup>就给我们解答了在如此不同应用范围内出现的问题,下面,我们就探讨塑性理论的问题。

从线弹性理论创建迄今的两百年过程中,现在发展几乎行将终结,这是完全可能的,因为它是基于最简单的应力-应变定理。与此同时,固体在其塑性范围特性的理论描述了连续介质力学的一个分支,它今天尚在不断地发展,这是由于超过弹性的材料特性不再允许那么简单地来描述,因此在求解具体问题时,对于数学上的要求要比弹性理论在数学上的要求更高。此外,近十年来,金属学刚刚提供了一个和实际情况一致的为结构理论所必需的基础,而一个有价值的理论在所有重要材料特性上必须表现出至少近似正确。虽然由此看出了实验的重要意义,可是我们在讨论中,例如在讨论塑性变形时,并不想从事晶体学过程的研究,而是只探讨往往由剪应力所引起的残余变形。当某种材料由剪应力引起滑移时,在主应力完全确定的方位呈线条分明的分界带。另一方面也有些材料,在实际上根本不具有塑性变形,而是达到一个确定的应力后就断裂,对这样的所谓脆性材料(如玻璃、铸铁等),我

1) 可以称之为这个领域的代表性著作的有: Prager, W. 和 Hodge, P. G. *Theorie ideal plastischer Körper*. Wien, Springer 1954; Prager, W.: *Probleme der Plastizitätstheorie*. Basel, Birkhäuser 1955; Hill, R.: *The Mathematical Theory of Plasticity*. Oxford, Clarendon Press 1950; Nadai, A.: *Theory of Flow and Fracture of Solids*. McGraw-Hill Book Comp., Volume 1, 1950, Volume 2, 1963; Freudenthal, A. M.: *The Inelastic Behavior of Engineering Materials and Structures*. New York, John Wiley 1950; Hoffmann, O. u. Sachs, G.: *Introduction to the Theory of Plasticity for Engineers*. McGraw-Hill 1953; Geiringer, H.: *Some Recent Results in the Theory of Plasticity*. New York, Academic Press 1953; Sokolovskij, V.V.: *Theorie der Plastizität*. Berlin, Technik 1955.

们将不予讨论,而只把讨论限制在韧性材料上,特别是在可塑性金属上。在我们论述基本理论之前,首先要介绍关于它发展至今的一些观点。

法国物理学家库仑(Coulomb, 1736—1806)早在 1773 年已对脆性材料提出了一个断裂假说。从十九世纪中叶就开始把它用于壁上土壤压力的计算,并且今天在土壤力学方面还把它作为原始方程的基础。依此来表达平衡条件,即滑动层中的剪应力  $\tau$  由该层所作用的摩擦力限定,也就是应为

$$|\tau| \leq \tau_0 + \sigma \operatorname{tg} \rho \quad (16.1)$$

这个关系式在图 16.1 中由莫尔应力圆来表示(参阅§10.2)。在扇形 ABC 之内,所有应力点 P 都表示不会出现滑移的应力状态。

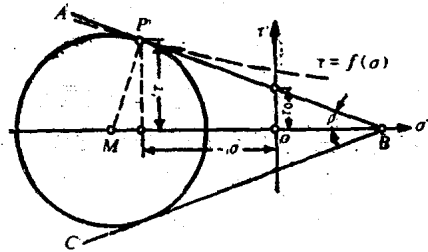


图 16.1

虽然库仑已正确认识了剪应力的重要意义,但是他的理论没有用于金属材料。法国工程师屈雷斯加(Tresca)于 1865 年首先在实验的基础上创立假说:如果一般应力状态为主应力  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , 则最大剪应力<sup>1)</sup>  $\tau_{\max} = (\sigma_1 - \sigma_3) / 2$  达到一定数值  $\frac{1}{2} \sigma_{v0}$ , 亦即当关系式为

$$\tau_{\max} = \frac{1}{2} (\sigma_1 - \sigma_3) = \frac{1}{2} \sigma_{v0} \quad (16.2)$$

时,金属就开始屈服。材料常数  $\sigma_{v0}$  可以由拉力实验确定。因

1) 请看 Griger H., 和 Scheel K., Handbuch der Physik Bd. VI S. 54. Berlin, Springer 1928.

为按照式(16.2),对只有单向拉应力  $\sigma_1$ ,  $\sigma_1$  达到屈服极限  $\sigma_r$ , 即  $\sigma_1 = \sigma_r$  的情况,得

$$\sigma_r = \sigma_{r0}$$

也就是  $\sigma_{r0}$  和拉力实验的屈服极限是一样的。也把  $\sigma_r$  记为单向比较应力。屈服条件式(16.2)只考虑极值剪应力,实际上是式(16.1) $\rho = 0$  的一种特殊情况。后来, O. 莫尔扩大了这个屈服条件,他把图 16.1 中直线 AB 和 BC 的位置,作为滑移状态开始的界限曲线,引入一般化的关系式  $\tau = f(\sigma)$ 。这个莫尔理论作为断裂假说,当前主要用于脆性材料。

在屈雷斯加实验的启发下,圣维南于 1871 年提出了理想塑性材料(它在不变应力下屈服)组成的固体,在平面中缓慢屈服的第一个数学理论。这里他以对物理学的巨大远见,要求应变变量(但不是应变全量的应变变量)的张量主轴与主应力轴重合<sup>1)</sup>,作为对胡克定律的补充。在这个假说中,两轴重合这一点上的观点常常受到怀疑,但是在最近时期,通过一系列可靠的实验,找到了有力的证明。于 1871 年圣维南提出这个假说之后,同年列维把这个理论推广到三维应力-应变状态。在此第一个重要步骤后,紧接着是一个停滞时期,直到密赛斯于 1913 年提出了新的屈服条件

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = 2\sigma_{r0}^2 \quad (16.3)$$

因而推动了塑性理论的迅速发展。发展的重点是在两次世界大战间的德国,且近十年来在下萨克森州有着深刻的变化。参与其事的权威有:卡门(Kármán),普朗特(Prandtl),亨肯(Hencky),纳达(Nádai)和最近时期的希尔(Hill),普拉格(Prager),盖伦格(Geiringer),霍奇(Hodge)及许多其他人。

1) 详情请参阅 §16.5.

## 2. 物理前提

当弹性理论在应力和应变之间基于一种单值的对应关系时,在塑性材料就不再是这种情况。在简单拉力实验时,考察一种“硬化”材料的应力-应变图,它指出了应力  $\sigma=f(\varepsilon)$

是应变的单调上升函数(图 16.2)。我们设想把以下的讨论始终建筑在一般非线性函数的基础上。该函数可以在实验的基础上假定为已知,并可通过指数律或其他的形式近似分析。如果一般没有重要限制,我们就设  $f(\varepsilon) = -f(-\varepsilon)$ , 即设它为一个奇函数,也就是压缩-应变线和拉伸-应变线应当具有同样的变化。这至少对一些重要的材料是近似符合实际的。

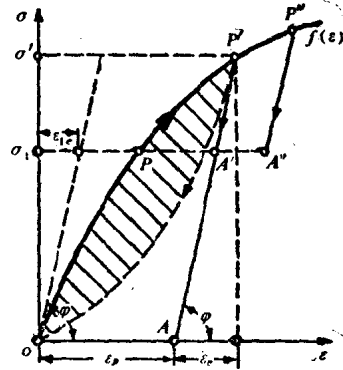


图 16.2

实验指出,把整个应变分解成弹性部分  $\varepsilon_e$  和塑性部分  $\varepsilon_p$  是正确的,即

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p \quad (16.4)$$

$\varepsilon_p$  是卸载(例如在到达  $P'$  点卸载)后的残余应变。

假定我们可以把卸载线  $P'A$  近似地看成直线,它和  $\varepsilon$  轴的倾斜角  $\varphi = \text{arc tg } E$ ,正好与应力-应变曲线在原点的切线和  $\varepsilon$  轴构成的倾角一样。如果材料重新受载,直到  $P'$  点,则所得  $AP'$  线与卸载之前是近似的,此外线  $P'P''$  等也是一样,好象它并没有产生中间卸载似的。因此我们认为,一个确定的

应力  $\sigma_1$ ，按照“变形历史”就是要看情况而定，是否只承载到  $P$  或者到  $P'$  或  $P''$ （并紧接着卸载到  $A'$  或  $A''$ ），可以有不同的塑性应变  $\epsilon_{1p}$ 。反之，所属弹性应变则由  $\epsilon_1$  唯一地给出。作为特殊情况还要列举（参阅图 16.3）：弹性硬化材料(a)在到达比例极限  $\sigma_p$  时，保持线弹性，而超过比例极限则硬化，理想弹塑性材料(b)超过比例极限就开始屈服，在这种情况下比例极限和屈服极限  $\sigma_F$  是重合的。未调质钢的应力-应变曲线，在小的变形范围内可以接近后者的特性。这两种情况下卸载线的变化都和图 16.2 相似。

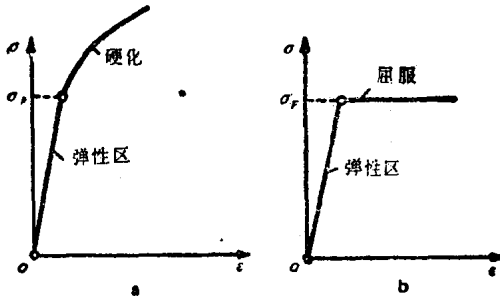


图 16.3

卸载后不留残余变形，如图 16.2 中虚线  $P'O$  所示。必须把这种材料特性和一个具有滞后现象非线性的弹性特性认真地加以区别。我们不想在下面研讨这样的材料，而只是说明阴影面积描述了在一个载荷循环时，通过滞后回线在此吸入的功。如果卸载沿着  $P'A$  延伸到超过  $A$  而进入到负的应力区时，一个这样的滞后回线也在一些材料中出现。那时， $\sigma, \epsilon$  曲线在小应力时也往往是非线性变化[所谓鲍辛格 (Bauschinger-

ger)效应]。

通过进一步实验得到的可靠事实是：一个任意大小的承载物体，在各向相等的所谓“静水压力”作用下，其体积没有残余的缩小，也就是体积应变<sup>1)</sup>  $\bar{\varepsilon}$  没有塑性部分，参看式(9.17)和式(9.22)，即

$$\bar{\varepsilon} = \operatorname{div} u_p = 0 \quad (16.5)$$

最后，人们通过实验以三维应力状态更可靠地确定了一个目前令人惊奇的材料特性，它对一个一般应力-应变定理的表述意味深长的是：一个物体首先经受一个确定的完全形成塑性的基本状态，且以后经受相应的应力变化而这个基本状态不变。这样在该物体内就形成了迭加的附加状态，似乎基本状态根本不存在似的。可以说这种材料对以前曾经受的塑性变形没有“记忆能力”。用一根薄管作为例子，它在内压力作用下同时沿轴向还有这样的拉力，以致其变形  $\varepsilon_t$ ， $\varepsilon_r$  和  $\varepsilon_\theta$  都有塑性部分，如果由于管的扭转，将在这个基本状态上迭加一个剪应力变量  $\delta\tau_{t\theta}$ ，则得应变变量  $\delta\gamma_{t\theta} = \delta\tau_{t\theta}/G$ ，即其塑性部分为零。

在有了这些准备之后，我们想在此转而提出塑性理论的基本方程。

### 3. 应力状态和应变状态

为了以下的证明，把应力张量和应变张量以合适的方式作适当的改变。

#### a) 应力状态

参阅式(9.2)，我们从应力张量  $S$  分解出静水应力状态

1) 现在以  $\bar{\varepsilon}$  代替式(9.17)中的  $\varepsilon_e$ 。

$$p = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) \quad (16.6)$$

因为  $p$  对塑性变形没有影响, 所以我们可以写成

$$\begin{aligned} S &= \begin{pmatrix} \sigma_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \sigma_x - p & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma_y - p & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma_z - p \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} p & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \\ 0 & 0 & p \end{pmatrix} \end{aligned}$$

或写成

$$S = S' + pI \quad (16.7)$$

式中  $I$  是单位张量或球张量, 而应力偏量  $S'$  由

$$\begin{aligned} S' = S - pI &= \begin{pmatrix} \sigma'_x & \tau_{yx} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2\sigma_x - \sigma_y - \sigma_z) & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \frac{1}{3}(2\sigma_y - \sigma_x - \sigma_z) & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \frac{1}{3}(2\sigma_z - \sigma_x - \sigma_y) \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (16.8)$$

简写而成。应力偏量仍然和整个应力张量一样, 可以通过它

的主应力  $\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$  来表示, 亦即

$$\begin{aligned}
 \mathbf{S}' &= \begin{pmatrix} \sigma'_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma'_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma'_3 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} \sigma_1 - p & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 - p & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 - p \end{pmatrix} \quad (16.9)
 \end{aligned}$$

由式(16.6)和式(16.8)得, 应力偏量的正应力之和为 0, 因此有

$$\sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = \sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3 = 0 \quad (16.10)$$

作为应力偏量的不变量, 我们类似式(9.8)得

$$\left. \begin{aligned}
 J'_1 &= \sigma'_x + \sigma'_y + \sigma'_z = 0 \\
 J'_2 &= \sigma'_x \sigma'_y + \sigma'_x \sigma'_z + \sigma'_y \sigma'_z - (\tau_{xy}^2 + \tau_{yz}^2 + \tau_{xz}^2) \\
 &= -\frac{1}{6} \left[ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 \right] \\
 &\quad - (\tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2) \\
 J'_3 &= \begin{vmatrix} \sigma'_x & \tau_{yz} & \tau_{zx} \\ \tau_{xy} & \sigma'_y & \tau_{zy} \\ \tau_{xz} & \tau_{yz} & \sigma'_z \end{vmatrix}
 \end{aligned} \right\} \quad (16.11)$$

或与式(9.9)相对应, 运用主应力构成简化的形式。

因为, 为了比较不同的应力状态, 限定在最有意义的两个参数, 即  $J'_2$  和  $J'_3$ 。所以对塑性理论引入不变量有着特别重要的意义。为了说明不变量  $J'_2$  可以运用所谓八面体剪应力, 我们知道这种剪应力是作用在该八面体的侧面上, 八面体的角点位于主应力轴上。在图 9.1 中阴影的面就是一个这样的侧面, 倘若  $dx = dy = dz$ , 即为



$$n = \frac{1}{\sqrt{3}} \{ \pm 1; \pm 1; \pm 1 \}$$

在这个八面体面上作用的正应力, 类似按照式(9.3)为

$$\begin{aligned} \sigma_0 &= n_x^2 \sigma_1 + n_y^2 \sigma_2 + n_z^2 \sigma_3 \\ &= \frac{1}{3} (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = p \end{aligned} \quad (16.12)$$

根据式(9.4)并利用式(9.1), 还考虑到式(16.11), 则作用在八面体面上的剪应力为

$$\begin{aligned} \tau_0 &= \sqrt{s^2 - \sigma_0^2} \\ &= \frac{1}{3} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2} \\ &= \sqrt{-\frac{2}{3} J_2} \end{aligned} \quad (16.13)$$

因为对塑性变形没有影响的静水正应力  $\sigma_0 = p$ , 可以按照式(16.7)把它从应力张量中分解出来。剪应力  $\tau_0$  就是在八面体面上作为唯一的应力偏量应力而保留着。图 16.4 形象地说

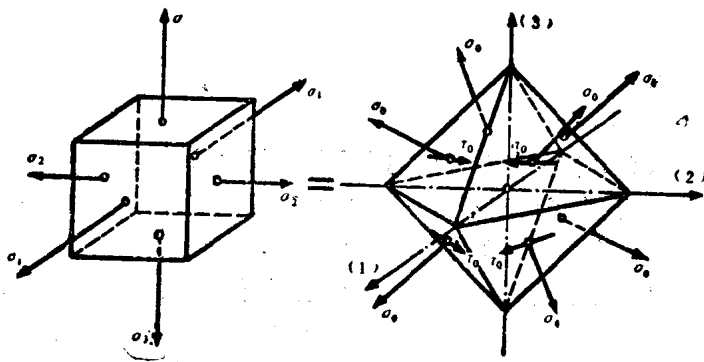


图 16.4