

现代设计方法实用教程

主 编 孙新民
副主编 张秋玲 丁洪生

人民邮电出版社

内 容 提 要

本书介绍了工程设计中已获得广泛应用且较为成熟的四种现代设计计算方法。它们是优化设计、可靠性设计、有限元法和动态设计。

该书从实用角度阐述了这些方法的基本概念、基本理论和基本计算步骤。通过本书学习,旨在培养高等工科院校学生和有关人员了解、掌握和应用现代设计方法解决生产实际问题的基本技能。

本书可作为高等工科院校的教科书,也可作为广大技术人员的参考书。

现代设计方法实用教程

◆ 主 编 孙新民

副 主 编 张秋玲 丁洪生

责任编辑 刘兴航

特邀编辑 叶宝英

◆ 人民邮电出版社出版发行 北京市崇文区夕照寺街 14 号

北京顺义振华印刷厂印刷

新华书店总店北京发行所经销

◆ 开本:787×1092 1/16

印张:17.75

字数:443 千字

1999 年 3 月第 1 版

印数:1-5 000 册

1999 年 3 月北京第 1 次印刷

ISBN 7-115-07616-2/TN·1451

定价:26.00 元

前 言

科学技术的日新月异,特别是微电子技术的迅速发展,为工程设计提供了日臻完善的手段,由此应运而发展的现代设计方法在工程设计中得到广泛的应用和推广,而传统设计方法正在被淡化、更新或替代。因此,为使高等工科院校的学生和其他有关技术人员熟悉和掌握现代设计方法中的若干基本方法,本书介绍了目前应用成熟的四种方法。它们是优化设计、可靠性设计、有限元法和动态设计。

本教程的内容与同类书相比具有以下几个特点:

1. 本书阐述的四种方法体现了现代设计方法中的主要特征,是进行现代设计计算必不可少的基本方法。因此,通过学习和掌握这些方法能获得从事现代设计所需的基本理论和技能。

2. 本书是在作者多年讲授和应用现代设计方法的实践基础上通过归纳编写而成的。因此,内容组织以满足教学基本要求为前提,以适应工程设计对现代设计方法的基本需要为目的。

3. 本书的编写遵循少而精的原则,注重方法的基本概念、基本理论、基本步骤的阐述,强调方法的实用性,回避较深的数学理论证明和较繁的数学公式推导。此外,鉴于方法的计算软件已实用化和商品化,为给它的选用留有余地和减少本书篇幅,书中未附方法的计算程序。

参加本教程编写的有:河北理工学院孙新民、张秋玲、刘淑文(第一章、第三章、第四章),洛阳大学王大力、鲍莉(第二章),北京理工大学丁洪生(第五章)。本书由孙新民任主编,张秋玲、丁洪生任副主编,全书稿由孙新民、张秋玲统编。

中国航天工业总公司陆惠义研究员和周勇工程师等仔细审阅了全稿,提出了宝贵意见,特此致谢。

由于本书内容体系是一种新尝试,限于编者水平,缺点和错误在所难免,希望广大读者给予批评指正。

编 者
1998年7月

目 录

第一章 绪论	1
一、现代设计方法	1
二、本教程研究的主要内容	2
三、学习本教程的目的	3
第二章 优化设计	5
第一节 概述	5
一、优化设计的概念和特点	5
二、优化设计的发展及其应用	5
三、优化设计的数学模型	6
四、优化设计方法的分类	9
五、优化设计的几何意义	10
六、数值迭代法及终止准则	11
第二节 优化设计的数学基础	14
一、二次型与正定矩阵	14
二、方向导数与梯度	15
三、泰勒级数及海色矩阵	19
四、函数的极值	20
五、凸集与凸函数概述	24
第三节 一维搜索方法	27
一、概述	27
二、常用的一维搜索方法	27
第四节 无约束优化方法	38
一、梯度法	38
二、牛顿法	41
三、共轭方向法	43
四、变尺度法	45
五、共轭梯度法	48
六、鲍威尔法	51
第五节 约束优化方法	58
一、复合形法	59

二、可行方向法	67
三、惩罚函数法	81
第六节 优化设计中应注意的几个问题	89
一、优化方法的选择	89
二、离散型变量的处理	90
三、多目标函数优化问题的处理	94
四、优化结果的分析	97
小结	97
习题	98
第三章 可靠性设计	101
第一节 概述	101
一、可靠性的基本概念及特点	101
二、可靠性设计的常用指标	102
三、可靠性设计常用的分布函数	106
第二节 可靠性设计原理	114
一、应力—强度干涉模型及可靠度计算	114
二、零部件参数漂移的可靠性分析	117
第三节 零部件的可靠性设计	120
一、零部件静强度的可靠性设计	120
二、零部件疲劳强度的可靠性设计	121
第四节 系统的可靠性设计	133
一、系统的可靠性预测	134
二、系统可靠性分配	138
三、故障树分析法在系统设计中的应用	144
小结	149
习题	150
第四章 有限元方法	153
第一节 概述	153
一、有限元的基本思想	153
二、有限元法在工程中的应用	154
三、有限元法求解问题的基本步骤	154
第二节 平面刚架的有限元法	161
一、结构的离散化	161
二、单元刚度矩阵的建立	161
三、求总体刚度矩阵	168
四、位移的求解	170
第三节 弹性力学平面问题的有限元法	174
一、弹性力学的基本方程	175

二、单元刚度矩阵的建立	179
三、总体刚度矩阵的集成	185
四、总体刚度方程的求解	187
五、弹性力学平面问题有限元分析需注意的问题	189
第四节 其它常用单元的刚度矩阵	193
一、三棱圆环单元的刚度矩阵	193
二、等参数单元的刚度矩阵	196
小结	203
习题	204
第五章 动态设计	209
第一节 概述	209
第二节 用有限元建模法进行典型结构的动力分析	210
一、平面连杆机构的弹性动力分析	210
二、弹性力学平面问题的动力分析	230
第三节 传递矩阵建模法	243
一、轴系扭转振动分析的传递矩阵法	243
二、轴系横向振动分析的传递矩阵法	256
第四节 实验建模方法	261
一、机械阻抗与频率响应函数	261
二、振动系统频率响应的图示法	264
三、传递函数测量的模态分析	267
四、不同激励方式的选择	268
五、实模态和复模态的参数识别	268
小结	269
习题	270
附录	273
参考文献	276

第一章 绪 论

一、现代设计方法

现代设计方法是以研究产品设计为对象的科学。它以电子计算机为手段，运用工程设计的新理论和新方法，使计算结果达到最优化，使设计过程实现高效化和自动化。现代设计方法是传统设计方法的延伸和发展，是人们把相关科学技术综合应用于设计领域的产物，它使传统设计方法发生了质的变化。现代设计方法与传统设计方法相比，主要完成了以下几方面的转变：

- 1) 产品结构分析的定量化；
- 2) 产品工况分析的动态化；
- 3) 产品质量分析的可靠性化；
- 4) 产品设计结果的最优化；
- 5) 产品设计过程的高效化和自动化。

在产品的结构分析中，传统设计方法虽然能对结构简单的零部件，利用材料力学和弹性力学的计算公式作出近似的计算，但是对复杂结构的零部件或整机却只能进行定性或类比的估算。而现代设计方法在传统设计方法的基础上引入了有限元方法，依靠计算机不但对结构简单的零部件能作出更为精确的计算，而且对结构复杂的零部件或整机也能进行较为精确的计算。

在产品的工况分析中，由于传统设计方法受计算手段和测试条件的制约，对产品的工作状况仅限于静态的计算和动态的估算。而现代设计方法中的动态设计方法不仅可以根据动力学理论建造数学模型，而且还可以同时利用理论和测试数据建造与实际工况符合的数学模型，然后利用计算机进行分析计算，预测出产品的动态性能和改进效果。

在产品的质量分析中，虽然传统设计方法能用安全系数法作出零部件不发生破坏（失效）的计算，但是当零部件的几何尺寸、工作应力、强度等参数具有较大的离散性时，因为这种方法未考虑零部件的失效概率，所以即使安全系数大于 1 也可能发生失效。因此，传统设计方法的安全系数法不能定量给出产品质量的可靠性预测。而现代设计方法中的可靠性设计法，根据实际情况，把零部件或整机的各种性能参数（具有离散性的参数）均视为随机变量，应用概率论建造数理统计模型并进行分析计算，这样即可定量作出零部件或整机的可靠性预测。在利用传统设计方法设计产品时，通常是在调查分析的基础上，参照同类或近类产

品通过估算、经验类比或简单试验确定设计方案，然后根据初始设计方案的设计参数对零部件各项性能要求进行计算，校核各项性能参数是否满足要求，如果不完全满足，则凭借设计者的经验或主观判断对有关参数进行修改和计算，直到满足要求为止，从而获得可行的设计方案。而现代设计方法中的优化设计法是先根据产品的设计目标和性能要求构造数学模型，然后应用数学规划理论和数值算法，借助于计算机进行求解计算，从而获得具有最优技术经济效果的最优设计方案。

传统设计方法的设计过程要消耗设计者大量的脑力和体力劳动，并且存在着颇多重复性的劳动，而最后确定的设计方案也只是一种可行方案，并不是最优设计方案。而现代设计方法的设计过程是以计算机为手段，利用计算机中的专家系统确定设计参数和方案，使用有限元方法、可靠性设计法、动态设计法等对其进行分析计算，通过优化设计法对设计方案和设计参数进行不断的修改和计算，以获得最优的设计参数，并利用计算机的输出设备（屏幕、打印机、绘图仪等）得到最后的设计结果（如数据、图纸等），从而实现设计过程的高效化和自动化。如果把所设计的零部件和整机的制造信息用计算机编制成工艺规程软件，并输入到由若干加工中心连成一体 的柔性制造系统中，则可完成零件的加工、部件和整机的装配，从而实现从产品设计到制造的自动化。

二、本教程研究的主要内容

如上所述，现代设计方法是研究产品设计方法的综合类科学，它所涉及的学科范围非常广泛。按照目前公认的现代设计方法的基本含义，一般可以包括十几种具体的方法，见表 1-1。

表 1-1 现代设计的具体方法

设计方法学	优化设计	可靠性设计	有限元法	动态设计	计算机辅助设计	工业产品造型设计	摩擦学设计	模型试验设计法	人机工程学	模块化设计	三次设计	反求工程设计	价值工程	智能工程	工程遗传算法	并行工程	人工神经元计算法
-------	------	-------	------	------	---------	----------	-------	---------	-------	-------	------	--------	------	------	--------	------	----------

为了便于组织教学和满足工程设计的实际需要，根据现代设计方法所能实现的几个主要转变，我们从中选择了应用较为广泛、成熟和实用的、主要用于产品设计分析计算的四种方法进行介绍。它们是：优化设计、可靠性设计、有限元法和动态设计。大体内容如下：

1) 优化设计 内容主要包括优化设计的数学模型、优化设计的数学基础、优化设计的数值迭代计算法和迭代计算的终止准则；优化设计的一维搜索方法；无约束优化设计中的梯度法、牛顿型法、变尺度法、共轭方向法、坐标轮换法、鲍威尔法；约束优化设计的复合型法、内点惩罚函数法、外点惩罚函数法和混合惩罚函数法；最后本文还介绍了优化设计中经常遇到的若干问题及处理方法。

2) 可靠性设计 内容主要包括可靠性设计的基本概念和特点；可靠性设计中常用的分布函数；应力—强度干涉理论和零部件的可靠度计算方法；系统的基本概念、系统的可靠性

预测和可靠性分配；系统的故障分析。

3) 有限元法 内容主要包括有限元法的基本概念；有限元法求解问题的基本步骤；平面刚架结构分析的有限元方法；弹性力学平面问题的有限元方法；三棱圆环单元及等参数单元的刚度矩阵的建立。

4) 动态设计 内容主要包括动态设计的基本概念；动态分析中常用的建模方法，包括有限元建模法、传递矩阵建模法和实验建模法。

三、学习本教程的目的

产品的质量和经济效益取决于设计、制造和管理的综合水平，而产品设计则是关键。没有高质量的设计，就不可能有高质量的产品，而要达到高质量的设计，就必须采用先进的设计方法和手段。因此，掌握先进的设计方法和手段是完成高质量设计的关键。

从以上介绍的主要内容可以看出，本教程不仅体现了当前先进的设计方法的核心，而且指出了掌握这些先进方法所必须具备的知识。为此，通过本教程的学习，可以达到如下目的：

- 1) 熟悉现代设计方法在产品设计中的作用和地位；
- 2) 以计算机为手段，能应用几种具体的现代设计方法解决产品设计中的主要问题；
- 3) 为现代设计方法的发展和推广奠定较为扎实的基础；
- 4) 促进和加快传统设计方法向现代设计方法的转变进程。

总而言之，希望通过学习本教程，学生和读者不仅具有一定的产品现代设计的知识和意识，而且具有应用上述几种典型现代设计方法分析和解决实际问题的初步能力，并为熟练地应用现代设计方法设计出具有市场竞争力的产品奠定良好的基础。

第二章 优化设计

第一节 概 述

一、优化设计的概念和特点

优化设计是将工程设计问题转化为最优化问题，利用数学规划的方法，借助于电子计算机的高速度运算和逻辑判断的巨大能力，从满足设计要求的一切可行方案中，按照预定的目标自动寻找最优设计的一种设计方法。它能综合处理并最大限度地满足从不同角度提出的，甚至有时是互相矛盾的技术指标，因此是现代设计方法之一。

优化设计工作包括两部分内容：

(1) 将设计问题的物理模型转变为数学模型。建立数学模型时要选取设计变量、列出目标函数、给出约束条件。目标函数是设计问题所要求的最优指标与设计变量之间的函数关系式。

(2) 采用适当的最优化方法求解数学模型。可归结为在给定的条件（例如约束条件）下求目标函数的极值或最优值问题。

二、优化设计的发展及其应用

以机械设计情况为例，采用最优化技术始于六十年代，早期的机械优化设计大多集中在机构学问题上，特别是机构运动参数的优化选择方面，以后才逐渐发展到机构动力学优化设计和机械零部件及机械产品的优化设计。

国内对机械优化设计的研究和应用是从七十年代中期开始的，近十几年来发展十分迅速，目前已取得一定的成就，并正在向纵深方向继续发展。目前，就国内所开展的工作来看，无论是在优化设计方法软件研究方面，还是在机械产品优化设计的实际应用方面都取得了显著的成果。

实践证明,采用优化设计方法可以有效地提高设计质量,缩短设计周期,取得较为显著的经济效果。例如美国 P.N.辛格采用优化设计方法设计了一种十级转速的机床主轴箱,使各轴间的中心距总和比用传统设计方法所取得的结果减小 16.55 %,从而体积和重量也相应的减小。意大利 G.L.扎罗蒂用优化设计方法对工程机械中的柴油机、变距器和变速箱作最佳匹配设计,显著提高了性能。我国葛洲坝二号船闸人字门启闭机构经过优化设计,使驱动力矩由 400t.m 降为 232.2t.m,我国广州造船厂将优化方法用于船用螺旋桨的叶型及叶截面设计中,并由绘图机直接输出图形,从而节省了大量的人力和物力,取得了满意的结果。由这些事例不难看出,优化设计方法的进一步推广应用,必将为提高机械产品设计质量、降低产品成本、缩短设计周期等方面带来明显的效益。

三、优化设计的数学模型

优化设计的首要问题是建立数学模型,即把实际问题转化为数学模型的形式。优化设计的数学模型包括三个方面:设计变量、约束条件和目标函数。

1. 设计变量与设计空间

在机械设计中,每一个设计方案都可以用一组参数来表示,这些参数有几何参数:如构件的长度、位置角、构件上点的坐标等;物理参数:如质量、转动惯量、力及力矩等。在这些参数中,有的是在优化设计前根据要求预先给定的,称为设计常量;有的则是在优化设计中待选择的参数,也就是变化的量,称为设计变量。

设有 n 个设计变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$, 可用一个向量 $\bar{X}$ 表示,写成

$$\bar{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{Bmatrix} = \{x_1 \quad x_2 \quad \dots \quad x_n\}^T \quad \bar{X} \in R^n \quad \dots\dots\dots (2-1)$$

式中 R^n 表示 n 维空间,它包括了所有设计变量,称为设计空间。

一个设计向量 $\bar{X}$ 代表着一个设计方案,它对应着 n 维空间的一个点,其中最优的设计方案用 $\bar{X}^*$ 表示,称为最优点或优化点。

一般情况下,设计变量 x 都是连续变化的量,称为连续量。但是也有一些设计变量是跳跃式的量,称为离散量。例如,齿轮的齿数必须是整数,模数必须符合国家标准的规定值等。对于离散型设计变量的处理,可参见本章第六节。

设计变量的数目,称为维数,一般说来维数越多在优化计算中可调整的参数越多,供优选的方案也越多,设计效果也越好,越容易满足要求。但优化计算的过程就越复杂,难度增加。所以在优化计算中不应过多地增加设计变量,应尽可能根据以往经验将一些参数确定为设计常量,而只将那些对设计指标影响比较大的设计参数定为设计变量。

2. 约束条件和可行域

优化设计中设计变量 $x_1, x_2, \dots, x_n$ 的取值往往需要满足某些限制条件。如构件的几何

尺寸限制在某一范围内,同时各构件长度还必须保持一定的相互关系等,这些限制条件总称为约束条件。

在机械优化设计中约束条件有两种类型:

(1) 边界约束

边界约束是直接考虑设计变量的限制范围的一种约束,例如各构件长度 L 应大于零且小于和等于某一个值 L_{max} , 即 $0 < L \leq L_{max}$, 写成约束条件为

$$g_1(\bar{X}) = -L < 0$$

$$g_2(\bar{X}) = L - L_{max} \leq 0$$

(2) 性能约束

性能约束是由机械的某些性能要求推导出来的约束关系,例如曲柄摇杆机构的设计必须满足曲柄存在的条件。设 L_1 为最短构件,则约束条件为

$$g_1(\bar{X}) = L_1 + L_2 - L_3 - L_4 \leq 0$$

$$g_2(\bar{X}) = L_1 + L_3 - L_2 - L_4 \leq 0$$

$$g_3(\bar{X}) = L_1 + L_4 - L_2 - L_3 \leq 0$$

约束条件有两种表达形式

A. 不等式约束

$$g_u(\bar{X}) \leq 0 \quad u=1,2,\dots,m$$

上式表示有 m 个小于或等于零的不等式约束。若约束条件是大于或等于零,即 $g_u(\bar{X}) \geq 0$ 时,为了程序的统一,可将其改写为 $-g_u(\bar{X}) \leq 0$ 的形式。

B. 等式约束

$$h_v(\bar{X}) = 0 \quad v=1,2,\dots,p$$

上式表示有 p 个等式约束,等式约束的数目 p 应该小于设计变量的数目 n 。因为加入一个等式约束设计变量就多一个约束方程,实际上就等于减少一个设计变量,所以等式约束的数目不能任意的增多。

任何一个不等式约束都把设计空间分为两部分:一个是满足约束条件的称为可行域;另一个是不满足约束条件的称为非可行域,这两部分的分界是 $g_u(\bar{X}) = 0$ 。因此有约束优化设计的实质就是在可行域内寻求一组设计变量,使目标函数值最优。

以二维为例,令设计向量 $\bar{X} = \begin{Bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{Bmatrix}$, 必须满足下列约束条件:

$$\begin{aligned}
 g_1(\bar{X}) &= x_1 - x_{1\max} \leq 0 & g_2(\bar{X}) &= x_{1\min} - x_1 \leq 0 \\
 g_3(\bar{X}) &= x_2 - x_{2\max} \leq 0 & g_4(\bar{X}) &= x_{2\min} - x_2 \leq 0 \\
 g_5(\bar{X}) &\leq 0 & g_6(\bar{X}) &\leq 0
 \end{aligned}$$

将以上约束条件用图 2-1 表示, 约束条件均满足的公共部分即为可行域, 在可行域内的点称为可行点 (在实际设计中为可行方案), 在约束边界上的点称为边界点, 两个以上约束边界的交点, 称为角点。在有约束的优化问题中, 优化点常常是边界点或角点。

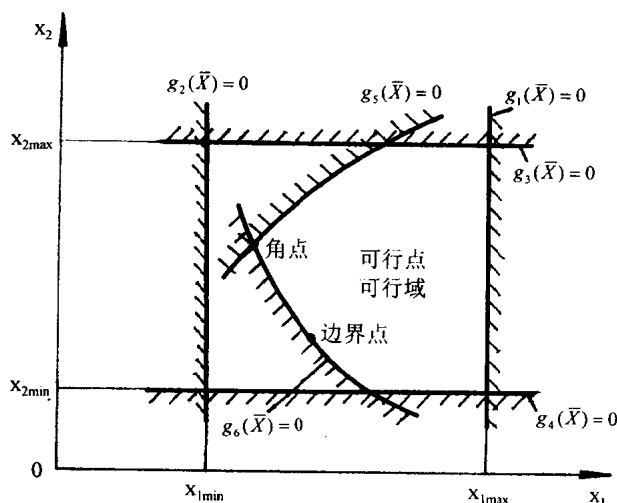


图 2-1

3. 目标函数

优化设计的任务是在许多可行的方案中找出最优的方案, 所谓最优方案就是在设计中能最好地满足所需追求的某些特点的目标。而这些目标又可表达为设计变量的函数, 称为目标函数, 目标函数可用来评价设计方案的好坏, 所以又称评价函数。用下式表示:

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \dots\dots\dots (2-2)$$

例如, 在悬臂梁的优化设计中, 期望得到一个最轻重量的设计方案, 就可以优化重量函数或体积函数 $f(x_1, x_2) = \pi d^2 L / 4 = \pi x_1^2 x_2 / 4$ 来达到。

一般目标函数可用经济指标与性能指标来表示, 经济指标如机器的寿命最长、重量最轻、体积最小、用料最省、所需功率最小等; 性能指标主要是满足运动学与动力学的要求, 如牛头刨床要求刨刀在工作行程近似等速, 港口起重机要求 M 点轨迹近似直线, 凸轮机构要求压力角小于许用压力角等等。

4. 优化设计的数学模型

在明确了设计变量、约束条件和目标函数后, 优化设计问题就可以表示成规范的数学形式, 称为数学模型。

设某项设计有 n 个设计变量

$$\bar{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T \quad (\bar{X} \in R^n)$$

$$\text{在 } g_u(\bar{X}) = g_u(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0 \quad (u=1, 2, \dots, m)$$

$$h_v(\bar{X}) = h_v(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (v=1, 2, \dots, p < n)$$

约束条件下, 求目标函数

$$f(\bar{X}) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$$

最小, 或者简记为

$$\begin{cases} \text{求 } \bar{X}, \text{ 使 } \min_{\bar{X} \in R^n} f(\bar{X}) \\ \left[\begin{array}{l} s, t, g_u(\bar{X}) \leq 0, (u=1, 2, \dots, m) \\ h_v(\bar{X}) = 0, (v=1, 2, \dots, p < n) \end{array} \right. \end{cases} \quad (2-3)$$

四、优化设计方法的分类

优化设计的种类很多, 从不同的角度出发可以有不同的分类, 常见的有以下几种:

1. 按目标函数的多少可分为单目标优化方法和多目标优化方法;
2. 按所能求解的函数的维数可分为一维优化方法 (也称一维搜索) 和多维优化方法;
3. 按约束情况可分为无约束优化方法和约束优化方法;
4. 对于能够用数学模型表达的优化问题, 所用的求优方法统称为数学优化法, 其中包括数学规划法和最优控制法。由于最优控制问题的数值解法常可通过离散化等措施转化为数学规划问题, 所以一般只着重讨论数学规划法。

数学规划法又可划分为:

1) 若目标函数 $f(\bar{X})$ 、约束条件 $g(\bar{X})$ 、 $h(\bar{X})$ 都是变量 $\bar{X}$ 的线性函数, 称为线性规划, 否则称为非线性规划;

2) 若不等式约束的数目 m 和等式约束的数目 p 都为零, 即 $m=p=0$, 称为无约束规划, 否则称为约束规划;

3) 若设计变量 $\bar{X}$ 的所有分量均取整数值, 称为全整数规划; 若 $\bar{X}$ 的所有分量均取函数值, 称为动态规划; 若 $\bar{X}$ 的所有分量均取随机值, 称为随机规划。

一般在机械中遇到的绝大部分优化问题均属于约束非线性规划。

5. 按求优的途径可分为:

1) 数值迭代法: 利用已有信息及再生信息进行试探及迭代求优的方法, 这是目前优化设计中广泛采用的方法, 本章重点介绍这种方法;

- 2) 解析法: 利用函数性态通过微分或变分求优;
- 3) 图解法: 利用作图求优, 主要用于不超过二维的优化问题。

五、优化设计的几何意义

1. 等值线的概念

设有一个二维函数 $z=f(x,y)$, 被一个平面 $z=C$ (常数) 所截如图 2-2 所示, 得到一个平面曲线 α' , 在 α' 上所有的点距平面 xoy 有同一个高度, 称平面曲线 α' 为等高线, 为方便起见, 将曲线 α' 投影在 XOY 平面得曲线 α , 因 $z=f(x,y)=c$ (常数), 所以在 α 上的函数值都相同, 称 α 为该函数的等值线, 不同的常数 $c_1, c_2, \dots$ 所截的平面曲线不同, 得到不同的等值线, 设该二维函数是一个半球, 则其等值线是一簇同心圆, 在同一个圆上函数值相同, 不同的圆函数值不同, 越靠近中心函数值越小, 同心圆的中心函数值最小, 对于非二次曲线其等值线有些畸形, 但在中心附近仍然是近似的椭圆。

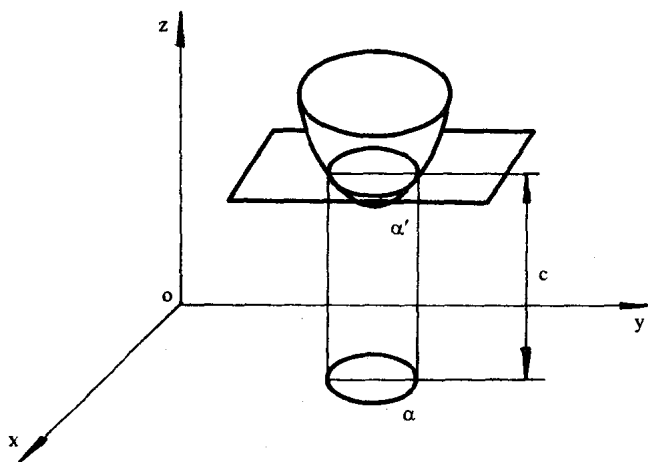


图 2-2

2. 无约束优化问题的几何描述

由上述可知, 无约束优化问题的实质就是求目标函数等值族的中心 $\bar{X}^*$, 在数学上就是求目标函数的极小值问题, 由于实际工程中目标函数是较复杂的, 用数学上求极值的方法是较困难的, 所以都采用数值迭代的方法, 近似求目标函数的极小值。

3. 有约束优化问题的几何描述

设有二维约束优化问题的数学模型为

$$\min f(\bar{X}) = x_1^2 + x_2^2 \quad \bar{X} \in R^n$$

$$s.t. \quad g_1(\bar{X}) = (x_1^2 + x_2^2) - 8 < 0$$

$$g_2(\bar{X}) = x_1 x_2 - 1 < 0$$

目标函数的等值线及约束函数的图像如图 2-3 所示。

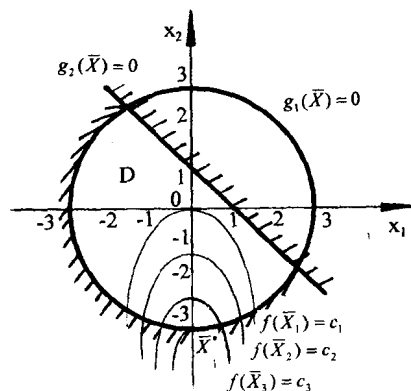


图 2-3

目标函数 $f(\bar{X})$ 的等值线方程可写为

$$x_1^2 + x_2^2 = c_i \quad i=1, 2, \dots$$

式中 c 为常数, 此式代表以 x_2 轴为对称线的抛物线簇。

由 $g_1(\bar{X})$ 、 $g_2(\bar{X})$ 围成的可行域 D 即为可行点 $\bar{X}$ 的集合, 可行域 D 以外的区域均为非可行域。

由图可以看出, $f(\bar{X})$ 的约束极值点为圆与等值线的切点 $\bar{X}^*$, 即 $\bar{X}^* = \{0 \ -2.8\}^T$,

$f^* = f(\bar{X}^*) = -2.8$, $g_1(\bar{X})$ 是起作用的约束, 而 $g_2(\bar{X})$ 为不起作用的约束。

约束优化问题必须在可行域内寻求目标函数的最小值, 约束问题的实质是求可行域的边界与某条目标函数等值线的切点 $\bar{X}^*$ 。

六、数值迭代法及终止准则

1. 数值迭代法的基本思想是: 从一个初始点 $\bar{X}^{(0)}$ 出发, 按照一个可行的搜索方向和适当的步长走一步, 达到 $\bar{X}^{(1)}$, 再从 $\bar{X}^{(1)}$ 出发, 选一个可行的搜索方向和适当的步长走一步, 达到 $\bar{X}^{(2)}$, 并保证每一步函数值必须是下降的, 这样一步一步地重复数值计算, 最终达到等值线的中心即优化点。

例如对于图 2-4 表示的二维函数求其无约束最优点时, 只须任选一初始点 $\bar{X}^{(0)}$, 从 $\bar{X}^{(0)}$ 点出发沿着某种优化方法采用的搜索方向 $\bar{S}^{(0)}$, 以初选的步长 $\alpha^{(0)}$ 按下面的迭代公式求