裂纹柱的扭转理论

汤任基 著

LIEWENZHU DE NIUZHUANLILUN

上海交通大学出版社

裂纹柱的扭转理论

汤任基　著

国家自然科学基金
国家教委博士点基金　资助项目

上海交通大学出版社

内 容 提 要

本书使用奇异积分方程方法，从断裂力学角度，对含裂纹柱体扭转的求解理论和计算方法作了系统深入的介绍，其中除均质裂纹柱的扭转外，还对分片均质和含夹杂复合裂纹柱的扭转作了介绍。书中不仅在理论上进行了严格分析，还对各类裂纹柱的具体求解建立了相应的解析数值法，因而本书的理论和方法可直接用于工程实际。

本书可作为力学、应用数学及结构工程等专业本科高年级学生和研究生的教材或教学参考书，亦可供从事固体力学、应用数学及结构强度断裂研究的大学教师和科技工作者参考。

裂纹柱的扭转理论

汤任基 著

上海交通大学出版社·出版

(上海市华山路1954号 邮政编码200030)

新华书店上海发行所·发行

常熟文化印刷厂·印刷

开本：850×1168（毫米）1/32 印张：14.375 字数：384000

版次：1996年8月 第1版 印次：1996年8月 第1次

印数：1—1000

ISBN 7-313-01616-6/O·097 定价：13.50元

前 言

本书叙述带裂纹柱体 Saint-Venant 扭转的求解理论和计算方法。在机械、土木、采矿、船舶、航空等工程中，常遇到柱体扭转的问题，按传统的不考虑裂纹的设计计算，已为实践证明是与实际情况不符的，故带裂纹柱体扭转的求解理论和计算方法的建立是急待解决的问题。本书作者长期从事断裂力学解析数值法的研究，在完成国家自然科学基金资助的两个项目(裂纹固体的应力奇异性分析，裂纹柱体的扭转理论)及国家教委博士点基金资助的项目(断裂力学的强奇性积分方程方法)中，对该问题作了较系统的研究，此书就是在这些研究中所获成果的总结。

裂纹柱的扭转理论，不仅在各类工程中对结构和零件的断裂强度设计有重要的应用价值，而且在数学上与许多物理问题的求解有着比拟关系，如静电场、薄膜理论和流体力学中的间断解寻找，因此对这类问题的研究也有参考价值。

书中的内容，主要是本书作者得到的，至于其他作者的一些工作，仅在绪论中作了一般的介绍，或在后面涉及到这些研究时加以提及。本书的重点是使用主值奇异和超(强)奇异两类积分方程，从数学弹性力学边值问题的角度，系统阐述裂纹柱扭转的求解原理。其中包括裂纹问题的数学提法，问题的积分方程建立，各类角点裂纹的性态分析，以及在此基础上的解析数值法建立和典型算例的介绍，对于角点裂纹前缘奇性应力场的渐近分析也作了详细的推导。此外，作为基础，书中对近代断裂力学文献中常用的主要数学方法，如解析函数、积分变换、奇异积分方程、对偶级数和对偶积分方程等均作了扼要介绍，并对它们的具体应用都以例子作了说明。因此，本书对学习和掌握断裂力学的解析数值法，并

由此进一步开展二维和三维断裂力学的应力奇异性研究有一定的参考价值。

本书能作为交通大学100周年校庆的一份献礼，我感到非常荣幸，衷心地感谢上海交通大学工程力学系和上海交通大学出版社的大力支持和帮助。

我的研究生李玉兰、乐金朝、马稚青、陶昉敏等，在他们的研究生阶段所作的有些算例也收进了本书，在此感谢他们的合作。我的妻子王怡清在我完成本书的过程中，协助做了许多具体的工作，并提出了一些宝贵的意见，在此也表示谢意。

由于作者水平有限，书中错误和不妥之处在所难免，敬请同行专家和读者批评指正。

汤任基

1995年7月于上海交通大学

#目　　录

绪论……………………………………………………………… 1
关于含裂纹柱体扭转工作的概述…………………………… 1
参考文献………………………………………………………… 9
第一章　断裂力学的几个基本概念………………………………14
§1.1　裂纹与固体强度，宏观断裂力学 ………………………14
§1.2　楔形体顶端附近的弹性力学解 …………………………18
§1.3　典型裂纹顶端附近的位移场和应力场 ……………26
§1.4　裂纹前缘塑性区的形状和尺寸估计 ………………32
§1.5　裂纹扩展的能量平衡方程 ……………………………34
§1.6　J积分 ……………………………………………………41
§1.7　裂纹静态扩展的断裂准则 ……………………………46
参考文献……………………………………………………………56
第二章　裂纹体力学的数学基础…………………………………58
§2.1　积分变换 …………………………………………………58
§2.2　解析函数论中的若干结果 ……………………………69
§2.3　Fredholm, Volterra 和 Abel 积分方程 ……………88
§2.4　Cauchy 型奇异积分方程及其数值法 ………………93
§2.5　多节积分方程与多节级数方程 ………………………114
§2.6　有限部积分与超(强)奇异积分方程 ………………125
参考文献 …………………………………………………………132
第三章　基本关系与基本解 ……………………………………134
§3.1　弹性柱体扭转的基本关系 ……………………………134
§3.2　弹性柱体弯曲的基本关系 ……………………………142
§3.3　Saint-Venant 扭转的角点问题 ………………………151

§3.4 裂纹柱扭转的基本解 …………………………………158
§3.5 裂纹的奇性应力和应力强度因子 ……………………169
§3.6 裂纹柱弯曲的基本解 …………………………………172
§3.7 夹杂柱扭转的基本解 …………………………………174
§3.8 夹杂的应力强度因子和界面应力 ……………………179
§3.9 Saint-Venant 扭转与反平面问题 ……………………185
参考文献 …………………………………………………187
第四章 径向裂纹系圆柱的扭转 ……………………………188
§4.1 圆柱中单裂纹的扭曲函数 ……………………………188
§4.2 裂纹前缘应力场主部的两种表示 ……………………195
§4.3 单裂纹的主值奇异积分方程及理论分析 ……………204
§4.4 单裂纹的超奇异积分方程及理论分析 ………………214
§4.5 径向裂纹系圆柱的主值奇异积分方程方法 …………224
§4.6 主值奇异积分方程方法的典型算例 …………………238
§4.7 径向裂纹系圆柱的超奇异积分方程方法 ……………245
§4.8 超奇异积分方程方法的算例 …………………………256
参考文献 …………………………………………………259
第五章 多角形裂纹柱扭转的裂纹切割解法 ………………261
§5.1 一般裂纹系圆柱的裂纹切割与求解原理 ……………261
§5.2 典型多裂纹圆柱的扭转 ………………………………267
§5.3 弓形柱与弓形裂纹柱的匹配扭转 ……………………278
§5.4 矩形孔圆柱与矩形裂纹柱的匹配扭转 ………………289
§5.5 三角形孔裂纹柱与三角形柱的匹配扭转 ……………309
参考文献 …………………………………………………333
第六章 含裂纹和夹杂的复合柱体的扭转 …………………335
§6.1 问题的提法与积分方程组 ……………………………335
§6.2 单裂纹偏心复合圆柱的扭转 …………………………341
§6.3 单裂纹同心复合圆柱的扭转 …………………………358
§6.4 单夹杂偏心复合圆柱的扭转 …………………………370

§6.5 裂纹和夹杂的相互干扰 ……379
参考文献 ……387
第七章 任意形状裂纹柱扭转的解析数值法 ……389
§7.1 柱体的边界积分方程与边界元法 ……390
§7.2 裂纹柱扭转的边界元奇异积分方程方法 ……398
§7.3 复杂形状裂纹柱的扭转 ……406
§7.4 柱体的边界积分方程与样条边界元法 ……416
§7.5 裂纹柱扭转的样条边界元奇异积分方程法 ……425
§7.6 炮筒钻与星形裂纹柱扭转的计算 ……432
§7.7 矩形截面复合裂纹柱扭转的计算 ……436
参考文献 ……441
附录：含裂纹柱的 Saint-Venant 弯曲 ……443
参考文献 ……449

绪　论

关于含裂纹柱体扭转工作的概述

根据柱体的截面形状及柱体端部的受力条件，柱体的扭转可分成许多性质不同的问题，若柱体除端部受到扭矩作用外无其他外力作用，且柱体的纵向位移不受任何约束，则此种柱体的扭转称为自由扭转。这一问题是法国学者 B. Saint-Venant 于上世纪首先提出并进行研究的[1]，为了纪念他，后人把这种形式的扭转称为 Saint-Venant(圣文南)扭转。

均质完整柱体的 Saint-Venant 扭转，是一个经典问题，已有许多学者作过研究，到目前为止，除一些特别困难的问题外，它的求解已在理论上完全解决，这方面的成就已在我国钱伟长教授等人所写的专著中作了总结[2]。

由多种均质材料组成的复合材料完整柱体的 Saint-Venant 扭转，在原苏联科学院院士 Н.И.Мусхелишвили 的专著[3]中已为其建立了求解的一般理论，因此这类问题亦已原则解决。但必须指出，对于具有角点的单连通域或更为复杂的多连通域柱的扭转，Мусхелишвили 的方法是将区域进行保角映射后加以求解，由于有限形式的映射函数一般很难找到，通常只能使用近似的映射函数，这就使实际的角点被人为地磨光，因而由此得到的解在角点附近是近似的。到目前为止，这类问题的严格求解，特别是凹角点邻域中奇性应力场的精确分析还未真正解决。但这是一个非常重要的问题，因为角点的奇性应力与角点的材料强度密切相关。

含有纵向贯穿裂纹柱体的扭转，是本书研究的重点，它的第一个结果是在本世纪的40年代，由 L.A.Wigglesworth 用保角映射法获得的[4,5]。此外，波兰学者 W.Nowacki 亦研究过边裂纹柱的扭转[6]，他将问题归为解第一类 Fredholm 积分方程。由于数学上的困难，在他们的论文中只计算了柱的抗扭刚度，对于裂纹前缘的奇性应力未作分析。直到60年代断裂力学兴起[7,8]，著名学者 G.C.Sih 从断裂力学的角度分析了裂纹前缘的奇性应力[9]，并将这类问题归为断裂力学中的面外裂纹问题。从此以后，裂纹柱体的扭转便成为断裂力学研究的一个重要内容，并在理论和实验研究上都取得了很大进展，下面扼要叙述现有文献已获得的主要结果。

横截面上含有一根或多根径向裂纹圆柱的 Saint-Venant 扭转，G.C.Sih 是第一个从断裂力学角度开始研究的，他首先研究了带有径向边裂纹圆柱的扭转，借助 Stevenson 在文献[10]中获得的扇形截面的扭曲函数，通过渐近分析直接求得了圆柱径向裂纹端点的应力强度因子[9]。随后，G.C.Sih 使用保角映射的复函数方法，在椭圆坐标系中，进一步求解了沿椭圆焦点开裂的内裂纹和边裂纹椭圆柱的两种扭转问题[11]，精确地求得了裂纹端点应力强度因子的表达式。G.C.Sih 的方法是解析的，但使用范围狭窄。当裂纹不沿椭圆焦点开裂时，此法完全不能使用。原苏联学者 E.A.Ширяев[12] 亦使用保角映射法研究过类似的问题，但由于报道较少，故很少有人知道。

一般来说，对于截面形状及裂纹几何条件比较复杂的柱体，要找到便于使用的保角映射是不太可能的，故使用保角映射求解一般裂纹柱的扭转是难以实现的。所以在后来的文献中，很少看到这种纯解析法的求解，大量的工作都将问题归为解某种积分方程，然后采用解析与数值结合的方法求解问题。在 Sih 的工作之后，J.Tweed 和 R.P.Rooke 使用位移解法及 Mellin 积分变换，求解了具有对称分布的径向边裂纹圆柱的扭转[13]，他们将问题归为

解一个对偶积分方程，然后使用积分算子将问题进一步化为解一个 Abel 积分方程，并使用数值法对其进行求解，获得了裂纹柱的抗扭刚度及裂纹端点的应力强度因子。裂纹前缘的应力场，原则上可由文中给出的应力公式通过渐近分析获得，但 Tweed 未作这一工作。此外，Tweed 在这一论文基础上还求得了单根径向边裂纹圆柱扭转的精确解[14]，但对径向内裂纹的扭转，他未作研究。

对于径向裂纹圆柱的扭转，原苏联学者也有一些研究工作，但开展得较迟，其中大都是在最近几年完成的。他们所用的解法与 Tweed 等人的不同，主要是用 Prandtl 函数的应力解法，在文献[15]中，A.C. Зильберглейт 使用 Prandtl 扭转应力函数求解了对称分布的多根径向边裂纹圆柱的扭转，通过 Abel 变换，最后使问题归为解一组第二类 Fredholm 积分方程，并求得了柱体的抗扭刚度和应力强度因子。随后，Зильберглейт 还研究了带有单根径向边裂纹的环形截面柱的扭转[16]，将 Prandtl 函数用奇异势表示，然后使问题亦归为第二类 Fredholm 积分方程，从而求得了此种柱的抗扭刚度及裂纹端点的应力强度因子。但这一方法只能用于解决单个边界裂纹，而不能用于多裂纹情形，故比较局限。除以上工作外，C.A.Кулиев 使用复变函数方法，对带有单根径向内裂纹圆柱的扭转问题进行了研究[17]，通过引入辅助函数使问题归为解一个简单的联结问题。另外，M.Б. Грибова 和 Б.М. Нуллер[18] 使用 Prandtl 函数，在双极坐标系中，将带有非径向边裂纹圆柱的扭转问题归为解一个联结问题，从而求得了柱的抗扭刚度，并对其中的奇性应力作了渐近分析，但对裂纹端点的应力强度因子未讨论。

在国内，已故学者郭仲衡对带裂纹柱体的扭转作了系统研究，在文献 [19] 中，他解决了 Tweed 没有解决的径向内裂纹圆柱的扭转问题，他的方法是将问题的解表为正弦级数，然后使用 Mellin 变换，并通过对扇形域的求解，使问题归为解一个三节积

分方程，再利用引入新待定未知函数的技巧，最后将问题化为解一个第二类 Fredholm 积分方程，并给出了计算裂纹端点应力强度因子的表达式。此外，郭仲衡还用保角映射与 Mellin 变换结合的方法对裂纹端点不在原点的局部径向边裂纹圆柱的扭转[20]进行了求解，他先通过保角映射使裂纹端点位于圆域原点，然后在变换空间中再使用 Mellin 变换求解，从而得到裂纹端点的应力强度因子表达式。他还解决了含有圆弧裂纹圆柱的扭转问题[21]。除了郭仲衡的以上工作外，陈宜周在带裂纹圆柱的扭转方面也进行了研究，他使用复变函数的保角映射方法，把问题归为解一个普通的 Fredholm 积分方程从而得以解决[22]。尹昌言解决了非径向单内裂纹圆柱的扭转问题[23]。

本书作者通过长期的研究及结合指导研究生工作，在径向裂纹系圆柱和一般裂纹系圆柱的扭转方面作了系统的工作；使用奇异积分方程与边界元和样条边界元相结合的方法，还进一步解决了截面形状为任意的一般裂纹系柱体的扭转问题；对含有夹杂和裂纹的复合柱体也作了相应的研究；此外，本书作者提出了裂纹切割求解方法，从而将断裂力学的方法应用到非裂纹柱体的扭转，解决了过去文献尚未严格解决的多角形柱体的扭转问题。以上成果总结在本书的第三章至第七章。

在作者的“带裂纹圆柱的 Saint-Venant 扭转”文献 [24] 中，首先引入了扭转裂纹的螺位错密度函数，然后使用混合边界条件的提法，通过 Mellin 变换求得了单裂纹圆柱扭转的基本解，这一基本解是用裂纹的未知螺位错密度函数表示的，它对于求解任意形状带裂纹柱体的扭转具有重要意义，本书总结并解决的各类裂纹柱的扭转都是以此为基础的。在这一基本文献中，作者使用获得的基本解并与弹性力学的叠加原理结合，导出了一般径向多裂纹圆柱的 Cauchy 型奇异积分方程，这组方程是用裂纹面的未知螺位错密度函数表示的。对于全内裂纹的情形，则方程为标准的 Cauchy 型奇异积分方程，对于裂纹与圆柱边界相交的边裂纹圆

柱，或裂纹在圆域内部原点相交的星形裂纹，则方程是广义的Cauchy型奇异积分方程。以上两种类型的方程，都可用F. Erdogan建立的奇异积分方程的数值法[25]求解，故在该文中，作者使用Gauss-Chebyshev求积公式对此种内裂纹圆柱和边裂纹圆柱具体建立了数值法，并获得了大量数值结果。在文献[26]中，完成了单裂纹圆柱扭转函数的复数表示，并将作者在平面断裂力学中提出的裂纹切割法[27]，由应用于解决平面问题推广到了解决带裂纹圆柱的扭转问题，然后用此严格求解了带有凸角点的弓形柱和矩形柱的扭转问题，并获得了大量理论的和数值的结果[28,29]。这是用断裂力学方法解决非断裂力学问题的一种新方法，有重要的理论和应用价值。

关于多角形裂纹柱的扭转，由于数学上的困难，现有文献要比带裂纹圆柱的扭转少得多，国外的工作主要是在完整的多角形柱的扭转分析，对于具有凹角的复通域柱的扭转则就更少了，而且关于角点的处理是近似的，还未见到关于凹角点和凸角点扭转问题的严格求解。多角形裂纹柱的扭转分析，主要是由我国学者完成的，在文献[30]中，郭仲衡使用柱体扭转的Prandtl应力函数求解方法，对带有单根边界裂纹的矩形截面柱的扭转作了分析，他将柱体的横截面沿边裂纹分成两个区域，然后将应力函数在矩形域上展成三角级数，最后使问题归为解一个对偶级数方程，再使用Srivastav关于对偶级数方程的求解方法[31]，将所得的对偶级数方程依次化为Abel奇异积分方程和第二类Fredholm积分方程，从而使问题从理论上得到解决。郭仲衡通过渐近分析研究了裂纹前缘的奇性应力，并具体给出了柱的抗扭刚度和裂纹端点的应力强度因子表达式。在这一结果的基础上他进一步研究了带有边裂纹的扇形截面柱的扭转，使用指数变换，将扇形区域变成矩形区域，从而使后一扭转问题归为前一扭转问题而得到解决。郭仲衡所解的以上两个问题，都是带有凸角点的柱体，若要求得这些凸角点的精确解，则应对给出的无穷级数解进行极限求和，但这是十

分困难的，他未对这一问题进行讨论。另外，对于具有凹角点的柱体，由于角点附近的应力奇性，使得应力函数的导数在角点不连续，因而上述方法不能使用，所以凹角点问题的求解应另找方法。除以上方法外，盖秉政使用复函数方法，对任意形状裂纹柱的扭转提出了一种劳伦级数展开方法，并使用与有限元法结合的方法进行求解[32]。此法对于凸角点柱体是完全可以的，但对于凹角点柱体，由于奇性应力场的困难，此法则不能使用。

关于具有凹角点的单通域和复通域裂纹柱的扭转，本书作者开展了比较系统的严格求解方法的研究。这类问题的求解都是基于作者提出的裂纹切割解法。在文献[28]中，作者及其学生首次提出了边角点和内角点裂纹的概念，并使用 Cauchy 型积分的端点性质[33]，对角点裂纹的性态建立了严格的分析方法，在此基础上导出了矩形孔裂纹柱与矩形柱扭转的积分方程，然后为其建立了能严格满足角点几何和受力条件的求解理论。对于角点邻域中的奇性应力，则使用渐近分析的方法，精确地求得了这些应力的分布规律，并对凹角点的奇性应力定义了广义应力强度因子。在此基础上首次严格地解决了过去一直未解决的古钱形截面柱的扭转及凹角点的广义应力强度因子，对于矩形裂纹柱的扭转也获得了较好的结果。

在以上成果的基础上，作者及其学生在文献[29]中，进一步推广研究了一般的边角点裂纹和内角点裂纹的分析方法，求得了此种裂纹的性态指数，在此基础上，使用裂纹切割方法，系统地解决了弓形裂纹柱、三角形孔裂纹柱及与此相关的实心多角形柱的扭转。其中包括这些柱的抗扭刚度，裂纹端点的应力强度因子，以及凹角点奇性应力场精确表达式的计算，这些结果都是过去文献上没有的。

作者在文献[36]中，首次研究了含有裂纹和刚性夹杂的复合柱体的扭转，引进了夹杂两侧界面应力的间断，然后使用混合边界条件的提法及 Mellin 变换的求解方法，求得了单夹杂的基本

解，再用单裂纹解及 Мусхелишвили 的位势方法，将带有裂纹和夹杂的复合圆柱的扭转归为解一组 Cauchy 型奇异积分方程，此组方程可使用奇异积分方程的数值法求解，从而使问题获得解决，在该工作中获得了大量有用的数值结果。在文献 [37, 38] 中，作者进一步使用 Cauchy 型积分的端点性质，研究了裂纹和夹杂在与材料界面接触时的端点性态，分别求得了它们的性态指数。在此基础上，对这类问题的求解建立了相应的解析数值法，文中给出了许多有用的数值结果。

关于解析与数值法的结合方面，国外的工作大多采用纯数值的有限单元法和边界元法[39]，文献[40]建立了带裂纹柱体扭转的边界元法，但该文未作具体的数值计算。在国内，盖秉政提出了一种解析-有限元法[32]，这是国内在柱体扭转方面最早的解析与数值法相结合的工作。此外，本书作者将奇异积分方程方法与普通边界元法结合[41]，对工程中形状较复杂的裂纹柱体的扭转，如矩形裂纹柱、三角形裂纹柱及花十字形裂纹柱等的扭转作了计算，得到了柱的抗扭刚度及裂纹端点的应力强度因子。由于求解时裂纹的干扰解被精确地分离，而外边界的影响由边界积分方程提供，因而对于裂纹端点应力强度因子的计算精度很高，这是解析与数值法结合使用的优点。在以上工作的基础上，为了减少普通边界元法的计算工作量，并进一步提高数值计算的精度，文献[42]将普通的边界元用三次样条边界元代替，并为任意形状带裂纹柱体的扭转建立了样条边界元与奇异积分方程结合的解析数值法。后又将此种方法推广用于复合材料裂纹柱扭转的计算中，获得了大量的数值结果。

关于超(强)奇异积分方程及其在裂纹柱扭转中的应用，F. Erdogan 及其学生首次求解了 Ⅲ 型裂纹问题[43]。此外，陈宜周在近期的文献[44]中使用超奇异积分方程求解了曲线裂纹的反平面问题。由于超奇异积分方程的未知函数性质要比 Cauchy 型奇异积分方程的未知函数更好，所以 Ioakimidis[45] 首次将此法引入

断裂力学。

本书作者对超奇异积分方程方法在断裂力学中的应用亦研究得较早，文献[46]对断裂力学中的主值型奇异和超奇异两类奇异积分方程作了统一的推导。文献[47，48]将超奇异积分方程方法推广到均质三维体的断裂力学及两相材料的三维界面断裂力学，关于超奇异积分方程在带裂纹柱体中的应用则在文献[49，50]中作了专门介绍。

最后关于带裂纹柱体的 Saint-Venant 弯曲，G.C.Sih 在文献[9，51]中作了专门介绍，对于具有单根和两根径向边裂纹圆柱的弯曲，他使用保角映射方法作了研究，并获得了裂纹端点应力强度因子的解析表达式。对于一般情形的弯曲问题，G.C.Sih 没有研究，大概是由于数学上的困难，目前还未发现国外的其他研究工作。

本书作者对带裂纹柱体的弯曲亦作过研究，在文献[52]中，作者使用 Mellin 变换，求得了单裂纹弯曲的基本解，在此基础上将径向裂纹系柱体的弯曲问题归为解一组 Cauchy 型奇异积分方程，并对此种方程的求解建立了相应的数值法。最近作者又将奇异积分方程与普通边界元方法结合，系统地研究了一般裂纹柱的横向弯曲并伴有扭转的解析数值求解法[53]，得到了若干典型裂纹柱的数值结果。

由于柱体的 Saint-Venant 弯曲与柱体的 Saint-Venant 扭转的控制方程是同一类型的，因而只要给出柱体 Saint-Venant 弯曲的控制方程，则它的求解便可使用本书着重研究了的柱体 Saint-Venant 扭转的方法。为了节省篇幅，关于 Saint-Venant 弯曲本书未专门立章讨论，而是将它的控制方程列于本书末尾的附录，以供求解这类问题使用。

参 考 文 献

[1] Saint-Venant, B.: *Memoires sur la torsion des Prismes*, Mémoire des savant etrangers, 14(1855)233

[2] 钱伟长、林鸿荪、胡海昌和叶开沅:《弹性柱体的扭转理论》，科学出版社(1956)

[3] Мусхелишвили, Н.И.:《数学弹性力学的几个基本问题》，科学出版社(1958)

[4] Wigglesworth, L.A.: *Flexure and torsion of an internally cracked shaft*, Proc.Roy.Soc., A170(1939)365

[5] *Wigglesworth, L.A.:Flexure and torsion of a circular shaft with two cracks*, Proc.London Math.Soc., 47(1940)20

[6] *Nowacki, W.: O pewnych przypadkach skrecania pretów*, Arch.Mech.Stos, 5(1953)21

[7] Irwin, G.R.:*Analysis of stresses and strains near the end of a crack travering a plate*, J.Appl.Mech., 24(1957)361

[8] Irwin, G. R.: *Fracture Mechanics, "structural mechanics"*, Proc.First Symposium on Naval structure Mechanics, (1960) 557

[9] Sih, G.C.: *Strength of stress singularities at crack tips for flexural and torsional problems*, J.Appl.Mech., 30(1963) 419

[10] Stevenson, A.C.:*Flexure with shear and associated torsion in prisms of uni-axial and asymmetric cross-sections*, Philosophical Trans.Roy.Sco., 237, *Series A*(1939)161

[11] Sih, G.C.:*Stress distribution near internal crack tips for longitudinal shear problems*, J.Appl.Mech.1(1965)51

[12] Ширяев, Е.А.: *О кручении круıою дpyca с трещиной по дуıе окужности или по радиусу*, ПММ, 20(1956)555

[13] Tweed,J.*and* Rooke,D.P.:*The torsion of a circular cylinder*