

力学丛书

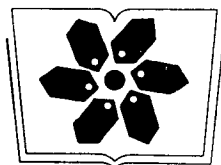
非协调数值分析与 杂交元方法

吴长椿 卞学慎 著



科学出版社

力 学 丛 书



中国科学院科学出版基金资助出版

非协调数值分析与 杂交元方法

吴长春 卞学锁 著



科 学 出 版 社

1997

内 容 / 简 介

本书系统介绍非协调元、杂交元的理论基础及应用。全书共分十章,前六章是基础部分,全面系统地论述了非协调元的理论基础及其对弹性力学各种典型问题的应用,并论述了发展杂交、混合元的新思想、新概念,建立杂交应力元的优化设计理论和方法并且深入研究了杂交、混合元的数值稳定性问题。后四章叙述了非协调元、杂交元在结构塑性分析、弹塑性断裂以及复合材料等复杂结构计算中的应用。

图书在版编目(CIP)数据

非协调数值分析与杂交元方法/吴长春,卞学锋著. —北京:科学出版社,1997.4

(力学丛书)

ISBN 7-03-005471-7

I. 非… I. ①吴… ②卞… II. ①数值分析-非协调 ②弹性力学-杂交
有限元 IV. 0343

中国版本图书馆 CIP 数据核字 (96) 第 10336 号

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码: 100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

· *

1997 年 3 月第 一 版 开本: 850×1168 1/32

1997 年 3 月第一次印刷 印张: 12 3/8

印数: 1—1 600 字数: 324 000

定 价: 28.00 元

《力学丛书》编委会

主 编：张 维

副主编：钱令希 郑哲敏

编 委：（按姓氏笔划为序）

丁 懋	卞荫贵	庄逢甘	朱兆祥
朱照宣	刘延柱	孙训方	李 灏
张涵信	周光炯	季文美	苟清泉
胡海昌	柳春图	贾有权	钱伟长
徐芝纶	徐华舫	郭尚平	谈镐生
黄文熙	黄克累	黄克智	程贯一

序 言

本书是一部计算力学专著,旨在系统地介绍非协调离散模型和多变量有限元在理论和应用研究方面的进展。书中内容多为作者近年来的研究成果,这些成果见刊后引起力学界同仁很大兴趣。

有限元的理论和方法发展到今天,人们不再满足于仅仅采用常规的位移协调元方法。60年代发展起来的非协调元、杂交元和混合元在实践中日益显示出巨大的优越性和发展潜力,近些年来成为力学界、工程界和数学家们的一个中心议题。在这个领域里,人们面临的一个主要困难是多变量非协调元解的可靠性(即解的唯一存在性、收敛性和对计算背景变化的适应性等)问题,其中既有理论方面的障碍,更有如何把理论付诸实现的艰难。例如,关于非协调元的收敛问题,70年代初已经搞清,但是,直到现在国际上流行的非协调元函数几乎全是靠经验拼凑出来的。显然,建立一个生成非协调元函数的一般公式是人们所期望的。又如,对于多变量有限元解的存在性理论(B-B条件等),工程与力学界普遍认为太抽象、不实用。因此,如何把稳定性理论从抽象的数学领地中解放出来,使之成为工程界可以直接掌握的力学工具就是一项十分重要的工作。近年来工程与材料科学的迅速发展对数值模型的可靠性和非线性行为提出了新的更高的要求,全面优化单元数值性能的问题提出来了。

本书第一章为入门篇,以很短的篇幅简要介绍了等参协调元、非协调元和杂交元的基本概念。第二至六章为基础理论,系统地论述了非协调元的理论基础及其对弹性力学各种典型问题的应用,论述了发展杂交有限元的新思想、新概念,建立了杂交应力元的优化设计理论和方法,并且深入研究了杂交、混合元的数值稳定性问题,进一步发展了零能模式的力学理论。第七、八、九章叙述应用,

由此读者将看到,前述非协调元方法和杂交元方法在结构塑性分析、在断裂力学及复合材料计算中展示出来的巨大优越性,其中第八章还介绍了有关非线性断裂参数的一些最新研究成果。第十章以弹性力学二、三维问题为例,介绍了有限元的程序实施,给出的源程序中纳入了本书发展的一系列非协调元和杂交元。

作为一部专业研究人员、高校教师和研究生的参考书,我们假定读者学习过大学力学类或工程学科类的基础课程,具备了高等数学、弹性力学和有限元等方面的基本知识。

作者之一吴长春要特别感谢中国科技大学黄茂光教授和航天部胡海昌教授多年来的悉心指导、热情帮助与重要建议,特别感谢香港大学张佑启教授,联邦德国 Stuttgart 大学 H. Bufler 教授和东京大学矢川元基教授在合作研究期间给予的巨大支持和关照。作者的研究生肖奇志博士和黄颖青分别参加了第八章和第九章的编写工作;第十章的有限元程序则由黄颖青组织编写。此外,原东南大学狄生林博士、原合肥工业大学焦兆平教授以及中国科大计算力学研究室的各位老师和研究生们都为本书作出了重要贡献。与本书相关的研究工作曾得到中国科学院、国家教委、国家自然科学基金、德国洪堡(AvH)基金、香港 Croucher 基金、日本学术振兴会(JSPS)以及中国科大科研处等单位的资助,作者在此一并深表谢意。

书中难免存在欠缺和谬误之处,敬请读者不吝批评指正。

作者

1996 年 10 月

目 录

第一章 有限元初步	(1)
§ 1.1 位移协调元与等参列式	(1)
§ 1.2 非协调元的一般概念	(6)
§ 1.3 杂交应力元	(9)
§ 1.4 关于杂交元定义的说明	(14)
参考文献	(15)
第二章 非协调分析基础	(18)
§ 2.1 能量不等式与椭圆条件	(18)
§ 2.2 非协调元的弱联接条件	(22)
§ 2.3 内参型非协调元的稳定性	(27)
§ 2.4 相容性与分片检验条件(PTC)	(30)
§ 2.5 非协调函数的生成,一般公式	(33)
§ 2.6 放松 PTC 的常应力乘子法	(36)
§ 2.7 PTC 的曲线坐标形式	(41)
§ 2.8 等效节点荷载和单元应力计算	(45)
参考文献	(49)
第三章 弹性力学问题的非协调元方法	(52)
§ 3.1 4 节点平面非协调元 NQ6	(52)
§ 3.2 二次完备非协调位移模式	(54)
§ 3.3 8 节点三维体非协调元	(59)
§ 3.4 轴对称非协调元	(63)
§ 3.5 Hermite 型中厚板非协调元	(68)
§ 3.6 基于合理 $w-\theta$ 约束的弯曲模式	(79)
参考文献	(90)
第四章 杂交元的力学基础	(93)
§ 4.1 具有非协调位移的杂交元的能量相容分析	(93)
§ 4.2 PTC 的非线性形式和单元优化条件(OPC)	(95)

§ 4.3 杂交应力元的优化方法	(97)
§ 4.4 OPC 的放松,非耦合应力模式	(101)
§ 4.5 多变量参数匹配	(102)
§ 4.6 关于三变量有限元的讨论	(105)
§ 4.7 其它类型的杂交元方法	(111)
§ 4.8 Loof, SemiLoof 与平衡元	(116)
§ 4.9 杂交元的罚平衡后处理	(118)
§ 4.10 单元内的应力分布	(121)
参考文献	(123)
第五章 杂交应力元的优化设计	(128)
§ 5.1 4 节点平面杂交元	(128)
§ 5.2 P-S 元的罚平衡优化	(132)
§ 5.3 三维体 18β 杂交元	(139)
§ 5.4 轴对称 8β 杂交元	(145)
§ 5.5 R-M 型板元的能量相容条件	(148)
§ 5.6 具有线性完备内力场的板弯曲元	(151)
§ 5.7 曲面壳元的优化设计	(161)
参考文献	(172)
第六章 多变量元的数值稳定性	(175)
§ 6.1 Reissner 变分解的存在唯一性	(175)
§ 6.2 零能模式(ZEM)的一般定义	(177)
§ 6.3 杂交/混合元的保秩条件	(179)
§ 6.4 ZEM(u)和 ZEM(σ)列式	(182)
§ 6.5 ZEM 对偶控制定理	(183)
§ 6.6 小片稳定试验	(186)
§ 6.7 说明的例子	(189)
§ 6.8 基于 Hu-Washizu 原理的三类变量元 ZEM 分析	(194)
参考文献	(203)
第七章 结构塑性分析	(205)
§ 7.1 单元不可压缩变形模式与平面应变塑性计算	(205)
§ 7.2 不可压缩材料的三变量杂交元方法	(211)
§ 7.3 弹塑性计算中的杂交元粘塑性方法	(215)
§ 7.4 计入剪切效应的塑性弯曲屈服准则	(221)

§ 7.5 R-M 板的塑性极限分析	(226)
参考文献	(229)
第八章 弹塑性断裂计算	(232)
§ 8.1 杂交元对奇性问题的应用	(232)
§ 8.2 J 积分和 I 积分	(236)
§ 8.3 I^* 积分	(239)
§ 8.4 关于路径积分的限界定理	(249)
§ 8.5 守恒积分的数值方法	(253)
§ 8.6 复杂加载条件下的守恒积分	(256)
§ 8.7 非协调元用于延性断裂计算	(267)
参考文献	(273)
第九章 复合材料层合板的数值模拟	(276)
§ 9.1 基于一阶变形理论的层合板杂交元方法	(277)
§ 9.2 层间应力计算	(283)
§ 9.3 层合板的状态空间和混合变分原理	(290)
§ 9.4 层合系统的三维罚杂交元方法	(292)
参考文献	(297)
第十章 有限元程序实施	(300)
§ 10.1 程序结构	(300)
§ 10.2 子程序说明及变量列表	(305)
§ 10.3 数据准备	(308)
§ 10.4 输入输出样本	(315)
§ 10.5 源程序清单	(324)

第一章 有限元初步

§ 1.1 位移协调元与等参列式

对以势能原理为基础, 以假设单元位移为特征的位移有限元法而言, 保证数值解收敛的基本条件是:

1) 位移试解满足完备性要求, 即试解应能反映单元的刚体运动, 能再现单元的常应变/应力状态.

2) 位移试解满足连续性要求, 即试解不但在单元内是片状连续的, 而且它在单元间也要保持一定的连续性, 以保证离散系统的能量泛函全域可积.

以下用 P_m 表示 m 阶完全多项式的函数集合, 用 C^m 表示场变量自身及其各阶导数 (直至 m 阶) 在系统全域上为连续的函数集合. 如果势能泛函中场变量 u 的最高阶导数为 m 阶, 则按协调元的理论, 条件 1) 要求 $u \in P_m$, 而条件 2) 则要求 $u \in C^{m-1}$. 条件 1) 对任何类型的有限元来说都是必须满足的. 满足了条件 2) 的位移有限元通常简称为协调元, 反之则称为非协调元^①.

协调元中最典型、最有影响的一类是等参元, 几乎任何一本有限元教科书 (如 [2, 3]) 都要介绍它. 等参元可分为两类: Lagrange 型元和 Serendipity 型元. 前者的形函数为标准的 Lagrange 插值多项式, 因此这类单元 (特别是高阶元) 具有大量的单元内部节点. 后一类等参元无内部节点, 以至避免了大量内部自由度的出现, 还可能降低形成单刚时使用的积分阶次. 使用 Serendipity 型元还有

^① 文献 [1] 中进一步把协调元分为两类: 对 $u \in C^{m-1}$ 但 $u \notin C^m$ 的单元称之为协调元, 当 $u \in C^m$ 时, 则称作过分协调元; 此外, 文献 [1] 把非协调元称为部分协调元.

一个好处,就是很容易实现不同阶次等参元之间的自然过渡.

图 1.1、表 1.1 以四边形三次元为例示出了上述两类等参元的结点配置和包含的函数项. 考察一下单元形函数的完备性问题, 对单元自然坐标 (ξ, η) 而言, 完备到 n 次的多项式函数集合可表示为 $P_n(\xi, \eta)$; 对结构系统坐标——卡氏坐标 (x, y) 而言, 完备到 m 次的多项式函数集合可表示为 $P_m(x, y)$. 对自然坐标与系统坐标一致的矩形单元, 显然有等价关系:

$$P_m(\xi, \eta) \Leftrightarrow P_m(x, y)$$

但是对一般非规则单元而言, 上面等价关系仅对 L 型元成立, 对 S 型元则不成立. 以图 1.1(a) 中的单元为例, 其单元函数 $u \in P_3(\xi, \eta) \Leftrightarrow P_3(x, y)$. 对于图 1.1(b) 中的单元而言, $u \in P_3(\xi, \eta)$, 但 $u \notin P_1(x, y)$, 即是说, 三次 S 型元对系统坐标只完备到线性, 因此 S 型元虽有许多优点, 但是当单元畸变时, 其数值性能, 特别是依赖于位移的导数的单元应力解, 将明显变坏^[2,4]. 相反, L 型元对单元几何形状的畸变是不敏感的, 数值解比较稳定.

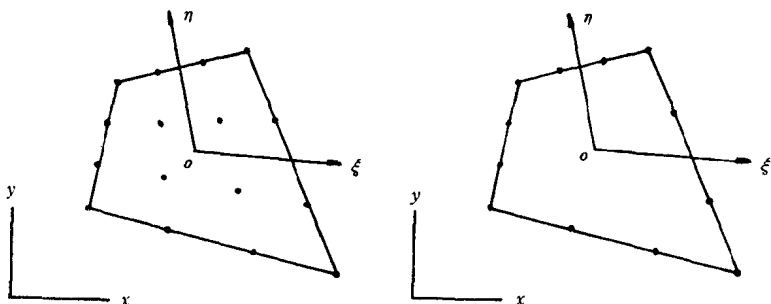


图 1.1 四边形三次等参元的结点配置

现以图 1.2 中的四结点平面单元为例给出一些有用的列式. 等参元总是对单元坐标和单元位移采用相同的插值函数, 即有

表 1.1 四边形三次等参元的自然坐标函数集及其对系统坐标的完备性

16 节点 Lagrange 型元		12 节点 Serendipity 型元	
$P_3(\xi, \eta)$	$P_3(x, y)$	$P_3(\xi, \eta)$	$P_1(x, y)$
1	1	1	1
$\xi \quad \eta$	$x \quad y$	$\xi \quad \eta$	$x \quad y$
$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$	$x^2 \quad xy \quad y^2$	$\xi^2 \quad \xi\eta \quad \eta^2$	
$\xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3$	$x^3 \quad x^2y \quad xy^2 \quad y^3$	$\xi^3 \quad \xi^2\eta \quad \xi\eta^2 \quad \eta^3$	
$\xi^3\eta \quad \xi^2\eta^2 \quad \xi\eta^3$		$\xi^3\eta \quad \xi\eta^3$	
$\xi^3\eta^2 \quad \xi^2\eta^3$			
$\xi^3\eta^3$			

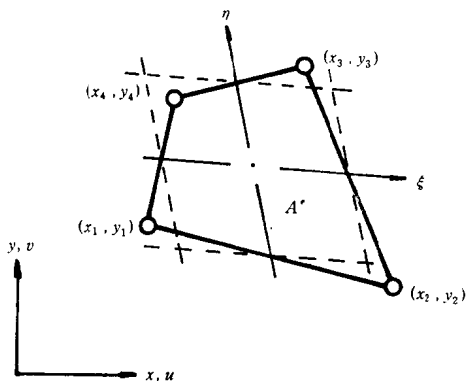


图 1.2 四结点平面等参元

$$\begin{Bmatrix} x \\ y \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} x_i \\ y_i \end{Bmatrix} \quad (1.1)$$

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \sum_{i=1}^4 N_i(\xi, \eta) \begin{Bmatrix} u_i \\ v_i \end{Bmatrix} \quad (1.2)$$

其中 $N_i(\xi, \eta) = \frac{1}{4}(1 + \xi_i\xi)(1 + \eta_i\eta)$, 为熟知的双线性插值基函数.

定义单元几何系数

$$\begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ x_3 & y_3 \\ x_4 & y_4 \end{bmatrix} \quad (1.3)$$

则(1.1)式可等价地表示为

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & \eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \\ a_3 & b_3 \\ a_4 & b_4 \end{bmatrix} \quad (1.4)$$

类似地有单元位移列式

$$\begin{bmatrix} u & v \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \xi & \xi\eta & \eta & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{bmatrix} \quad (1.5)$$

其中系数

$$\begin{bmatrix} A_1 & B_1 \\ A_2 & B_2 \\ A_3 & B_3 \\ A_4 & B_4 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 & v_1 \\ u_2 & v_2 \\ u_3 & v_3 \\ u_4 & v_4 \end{bmatrix} \quad (1.6)$$

单元局部坐标 (ξ, η) 与系统坐标 (x, y) 间有求导变换

$$\left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial \xi} \\ \frac{\partial()}{\partial \eta} \end{bmatrix} \right\} = \mathbf{J} \left\{ \begin{bmatrix} \frac{\partial()}{\partial x} \\ \frac{\partial()}{\partial y} \end{bmatrix} \right\} \quad (1.7)$$

其中 Jacobi 矩阵

$$J = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 + a_2 \eta & b_1 + b_2 \eta \\ a_3 + a_2 \xi & b_3 + b_2 \xi \end{bmatrix} \quad (1.8)$$

相应的行列式为

$$|J| = J_0 + J_1 \xi + J_2 \eta \quad (1.9)$$

$$J_0 = a_1 b_3 - a_3 b_1 = \frac{1}{4} (\text{单元面积}) > 0$$

$$J_1 = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

$$J_2 = a_2 b_3 - a_3 b_2$$

当单元为矩形或平行四边形时, 系数 $a_2 = b_2 = J_1 = J_2 = 0$, 而 $|J| = J_0$ 为一正常数.

对应(1.7)有逆变换:

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{Bmatrix} = J^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (1.10)$$

许多情况下可取 $|J| = J_0$ 以便简化计算, 如是(1.10)式可表示为

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{J_0} \begin{bmatrix} b_3 + b_2 \xi & -(b_1 + b_2 \eta) \\ -(a_3 + a_2 \xi) & a_1 + a_2 \eta \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (1.11)$$

可以证明, 用 J_0 近似 $|J|$ 相当于把原四边形替换为一个中线长度不变的平行四边形(如图 1.2 中虚线所示), 对单元引入了几何上的近似. 如果进一步地令(1.11)式中的单元几何畸变系数 $a_2 = b_2 = 0$, 则有

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial x} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial y} \end{Bmatrix} \approx \frac{1}{J_0} \begin{bmatrix} b_3 & -b_1 \\ -a_3 & a_1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial(\cdot)}{\partial \xi} \\ \frac{\partial(\cdot)}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \quad (1.12)$$

当单元不是矩形或平行四边形时,用(1.12)式近似(1.10)式(这相当于取 $J(\xi, \eta) \approx J(0, 0)$),将导致较大的求导变换误差,因此要慎用。

§ 1.2 非协调元的一般概念

对 $2m$ 阶微分方程边值问题,有等价的变分提法: $\delta \Pi(u) = 0$,其中系统势能泛函 $\Pi(u)$ 中出现场变量 u 的最高求导阶次为 m .当单元试解 $u \in C^{m-1}$ 时,称该单元为协调元,若 $u \in C^m$,则称为过分协调元,反之,当 $u \notin C^{m-1}$ 时,称该单元为非协调元。

对弹性力学二、三维问题,协调元要求位移试解 $u \in C^0$,这样的连续性要求很容易满足,因此二、三维有限元大多为协调元.另一方面,对经典薄板壳问题,其广义应变为结构中面挠度 w 的二次导数,相应的协调元要求单元试解 $w \in C^1$,即要求 w 的法向导数对相邻单元为连续.由于构造 C^1 类试解的实际困难,早期发表的薄板弯曲元(如见[5, 6, 7]等)多为非协调元.依照协调元的理论,这些非协调板元不满足试解的连续性要求,是不合理、不能用的.但是大量的计算实践表明,在一定的限制条件下,这些非协调元解不但收敛,而且显示出比同类协调元更好的数值性能.进一步的研究表明,如果对二、三维等参协调元引入非协调函数,同样能明显地改善单元的数值性能.这种情形引起了广大学者的极大关注.为了说明非协调元解的收敛问题, Irons^[5]提出了分片检验的思想概念.所谓分片检验,简单地讲,就是要看一看单元及其典型组合体——小片,是否有能力再现结构的常应力/常应变状态.有关分片检验的数学解释是由 Strang^[8]等首先作出的。

关于非协调元的理论基础,简单地讲它包含下面三个方面的要求:

1. 非协调元试解应满足完备性要求,这一条与协调元理论的要求无异。

2. 非协调元试解应满足稳定性要求,以便保证非协调离散解

的唯一存在。

3. 非协调元应能通过常应力分片检验。

条件 2, 3 是非协调元理论特有的, 将在本书第二章中展开讨论。

下面我们以弹性力学平面问题为例, 介绍两个重要的非协调元。称基于双线性插值函数(1.1), (1.2)的四边形等参元(图 1.2)为 Q4 元。该元素构造简单, 性能可靠, 是工程计算中用得最多的一个平面协调元。但是用 Q4 元模拟弯曲变形时, 其双线性位移模式将引出不合理的寄生剪切^[3], 以致弯曲解会出现严重的位移自锁(Locking)现象。为了改善 Q4 元的弯曲性能, 1973 年 Wilson^[9]等对原单元位移试解(1.2)附加了一组二次位移, 即取位移试解为

$$u = u_q + u_\lambda = N_q q + N_\lambda \lambda \quad (1.13)$$

其中 $u_q = N_q q$ 即原 Q4 元的双线性位移插值函数(1.2), 它由单元节点位移 q 定义, 是 u 的协调部分。另一方面,

$$u_\lambda = N_\lambda \lambda = \begin{bmatrix} 1-\xi^2 & 1-\eta^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\xi^2 & 1-\eta^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_4 \end{bmatrix} \quad (1.14)$$

是由单元内部参数 λ 定义的单元内位移。由于 λ 与单元是一一对应的, u_λ 对相邻单元通常是非协调的。称对应组合试解(1.13)的非协调元为 Q6 元, 其单元应变为

$$\varepsilon = D(u_q + u_\lambda) = [B_q \quad B_\lambda] \begin{Bmatrix} q \\ \lambda \end{Bmatrix} \quad (1.15)$$

相应的非协调元单刚为

$$K = \iint_A [B_q B_\lambda]^T C [B_q B_\lambda] dA = \begin{bmatrix} K_{qq} & K_{q\lambda} \\ K_{\lambda q} & K_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \quad (1.16)$$

对单元内参 λ 进行静力凝聚处理后, 得到对应单元节点自由度 q 的单刚为

$$K^* = K_{qq} - K_{q\lambda} K_{\lambda\lambda}^{-1} K_{\lambda q} \quad (1.17)$$

非协调 Q6 元显著地改善了 Q4 元的弯曲解,但是它只适用于规则的矩形或平行四边形网格,对一般不规则网格, Q6 元不能通过分片检验,解的收敛性没有保证. 为了把问题讲清楚,这里暂且直接写出二维问题分片检验的一种表达形式,即

$$\iint_{A^e} \epsilon_\lambda dA = 0 \text{ 或等价地 } \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 B_\lambda |J| d\xi d\eta = 0 \quad (1.18) \textcircled{1}$$

其中单元非协调应变 $\epsilon_\lambda = Du_\lambda = B_\lambda \lambda$, $B_\lambda = DN_\lambda$. 对矩形或平行四边形 Q6 元,应变矩阵 B_λ 只含 ξ, η 项,于是,条件(1.18)恒能满足. 但是对非规则形状的 Q6 元,条件(1.18)不再成立. 为了把 Q6 元推广应用于非规则网格, Taylor 等人^[11]提出了一个简单有效的办法,即在用 u_λ (1.14)式计算 B_λ 时引入近似关系(1.12),也即取 Jacobi 矩阵

$$J(\xi, \eta) \doteq J(0, 0)$$

为一常量矩阵(但计算 B_q 时不引入这种近似),于是(1.18)式中的被积函数将只包含 ξ, η 的一次项. 经此处理后分片检验条件(1.18)恒能满足而与单元的几何形状无关. 这个修正了的 Q6 元被记作 QM6 元. Cook^[3]对 QM6 元的程序实施和数值性能给出了具体说明.

Taylor 构造 QM6 元的方法可以直接推广于构造满足分片检验的三维非协调元,但是不能用来构造满足分片检验的轴对称非协调元. 下一章将介绍一个直接从分片检验条件出发构造非协调元的一般方法.

现对附加单元内部自由度 λ 的效果作进一步说明. 对应(1.17)式,单元变形能可表示为 $U^* = U - \Delta U$, 其中, $U^* = \frac{1}{2} q^T K^* q$ 为附加 λ 后的单元变形能, $U = \frac{1}{2} q^T K_{qq} q$ 为原单元(Q4)

① 详见文献[10]及本书第二章的推导.