

地球变化电磁场异常的解释

[苏] M.H.别尔季切夫斯基 著
M.C.日丹诺夫

曾治权 译
刘祖滨

地质出版社

内 容 简 介

本书阐明了深部地电学的理论基础，研究了地球内部电磁感应的模型，叙述了地球电磁场异常的分析 and 解释方法，这些方法能给出有关地球内部状况及其中进行过程的重要信息。书中列举了解释典型电磁异常的若干实例。

本书读者对象为生产和科研单位的地球物理学工作者，对于高等院校有关专业的高年级学生也是有用的。

地球变化电磁场异常的解释

[苏] M. H. 别尔季切夫斯基 著
M. C. 日 丹 诺 夫
曾 治 权
刘 祖 滨 译

地质矿产部书刊编辑室编辑
责任编辑：张怀素 曹玉
地质出版社出版
(北 京 西 四)

地质出版社印刷厂印刷
(北京海淀区学院路29号)

新华书店北京发行所发行·全国新华书店经售

开本：850×1168 $1/32$ 印张：11 $1/2$ 字数：295,000
1985年1月北京第一版·1985年1月北京第一次印刷
印数：1—2,690册 定价：3.25元
统一书号：15038·新1035

目 录

序言

主要符号

第一篇 电磁场方程和薄层上的边界条件	1
第一章 电磁场方程	1
§ 1 场方程	1
§ 2 场方程的矩阵表示	5
第二章 电磁场中的薄层和导电薄膜	9
§ 3 薄的非均匀层	9
§ 4 用导电薄膜逼近薄层	18
第二篇 地球内部电磁感应的基本模型	25
第三章 地球的球对称模型	25
§ 5 地球的电磁激发	25
§ 6 正常的地电模型及其波谱阻抗	33
第四章 平面水平均匀的地球模型	38
§ 7 平面模型中的正常电磁场	38
§ 8 层状均匀模型	43
§ 9 大地电磁测深 (吉洪诺夫-坎亚尔方法)	48
§ 10 频率域的分类	54
第五章 平面水平的非均匀地球模型	58
§ 11 电磁异常及其分类	58
§ 12 地表异常的模拟	60
§ 13 深部异常的模拟	74
第三篇 传递函数理论	104
第六章 电磁场的代数类	104
§ 14 作为电导率函数的传递函数	104
§ 15 电磁场代数类的概念	105

§ 16	代数类的例子	106
§ 17	作为特征矢量的线性变换的电磁场	109
第七章	大地电磁算子及其矩阵	112
§ 18	大地电磁算子	112
§ 19	具有空间 A_3 类中的大地电磁矩阵	114
§ 20	具有空间 A_2 类中的大地电磁矩阵	116
§ 21	具有空间 A_1 类中的大地电磁矩阵	119
第八章	感应算子及其矩阵	120
§ 22	感应算子	120
§ 23	具有空间 A_3 类中的感应矩阵	122
§ 24	具有空间 A_2 类中的感应矩阵	124
§ 25	具有空间 A_1 类中的感应矩阵	126
第九章	用作地球电磁场的大地电磁矩阵和感应 矩阵	128
§ 26	利用代数类的模型场逼近天然电磁场	128
§ 27	大地电磁矩阵的傅立叶变换	134
§ 28	大地电磁矩阵和感应矩阵的图解表示	136
第四篇	电磁场的分析和变换	142
第十章	地球电磁场区分成外源部分和内源部分	142
§ 29	频谱处理法 (高斯-施密特方法)	142
§ 30	空间处理法 (克尔茨方法)	151
§ 31	斯特雷通-丘的积分公式	160
§ 32	斯特雷通-丘型积分	166
§ 33	克尔茨的推广的方法	180
第十一章	地球电磁场区分成正常部分和异常部分	184
§ 34	频谱处理法 (高斯-施密特方法的推广)	184
§ 35	空间处理法 (克尔茨方法的推广)	194
第十二章	地球电磁场的异常区分成地表部分和 深部部分	197
§ 36	频谱处理法 (高斯-施密特方法的推广)	197
§ 37	空间处理法 (克尔茨方法的推广)	221
第十三章	电磁场的解析延拓	224

§ 38	作为解析函数的电磁场	224
§ 39	电磁场解析延拓的一般原理	228
§ 40	地电问题中电磁场解析延拓的形式	239
§ 41	借助于格林函数的频谱展开解析延拓电磁场	241
第十四章	电磁场的变换	254
§ 42	作为线性滤波的电磁场的区分和延拓	254
§ 43	电磁场变换 (ТЭМП) 的系统	265
§ 44	借助于列线图变换电磁场	268
第五篇	电磁异常的解释	274
第十五章	正常地电剖面的确定	274
§ 45	深部电磁测深结果的归一化	274
§ 46	借助于场的解析延拓确定正常地电剖面	280
第十六章	地表异常的解释	284
§ 47	近地表层积分电导率的确定 (施穆克方法的推广)	284
§ 48	地表异常解释的实际经验	293
第十七章	深部异常的解释	298
§ 49	深部电磁剖面法的反演问题	298
§ 50	深部非均匀性的圈定	300
§ 51	深部非均匀性形状的还原 (缩并迴路法)	314
§ 52	深部非均匀性地电剖面的还原	329
§ 53	深部异常解释的实际经验	332
结语		341
参考文献		343

第一篇 电磁场方程和薄层 上的边界条件

第一章 电磁场方程

§ 1. 场 方 程

在各向同性介质中，电磁场满足麦克斯韦方程组：

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} H &= \sigma E + \epsilon \frac{\partial E}{\partial t} + J^{CT}, \\ \operatorname{rot} E &= -\mu \frac{\partial H}{\partial t}, \\ \operatorname{div} \mu H &= 0, \\ \operatorname{div} \epsilon E &= q + q^{CT},\end{aligned}\tag{1.1}$$

式中 E 、 H 为电场和磁场； σ 、 ϵ 、 μ 分别为介质的电导率、介电常数和磁导率； q 是自由电荷的密度； J^{CT} 、 q^{CT} 为外部电流和电荷的密度。

J^{CT} 和 q^{CT} 相互之间的关系由连续性方程

$$\operatorname{div} J^{CT} = -\frac{\partial q^{CT}}{\partial t}\tag{1.2}$$

约束。

介质的电导率与它的电阻率成反比： $\sigma = \frac{1}{\rho}$ 。

借助于欧姆定律，传导电流密度由电场表示为：

$$J = \sigma E\tag{1.3}$$

我们限定研究非磁性介质，因此采用

$$\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{亨利/米},$$

式中 μ_0 为真空的磁导率

在 σ 和 ϵ 为常数的区域内，电场 $\mathbf{E}$ 和磁场 $\mathbf{H}$ 满足方程组：

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\frac{\partial \mathbf{J}^{CT}}{\partial t} \quad (1.4)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \mu_0 \epsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{J}$$

在 σ 和 ϵ 的间断面上，磁场 $\mathbf{H}$ 和电场 $\mathbf{E}$ 的切向分量是连续的。在理想导体的表面上，电场 $\mathbf{E}$ 的切向分量和磁场 $\mathbf{H}$ 的法向分量等于零。在无限远处，电磁场消失，同时满足正则性条件和辐射条件。

在时间上缓慢变化的场是我们研究的对象。在这种场的方程组中可以忽略对时间的二阶导数 $\frac{\partial^2}{\partial t^2}$ ，这个模型称为似稳模型，我们将只研究似稳模型。似稳的电磁场用方程组写作：

$$\text{rot } \mathbf{H} = \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{CT};$$

$$\text{rot } \mathbf{E} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t};$$

$$\text{div } \mathbf{H} = 0;$$

$$\text{div } \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} \left(\mathbf{E} \cdot \text{grad } \sigma - \frac{\partial q^{CT}}{\partial t} \right). \quad (1.5)$$

在电导率为常数的区域内，

$$\text{rot rot } \mathbf{E} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\mu_0 \frac{\partial \mathbf{J}^{CT}}{\partial t}; \quad (1.6)$$

$$\text{rot rot } \mathbf{H} + \mu_0 \sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \text{rot } \mathbf{J}^{CT}.$$

借助于傅立叶变换可以把被研究的电磁场表示成谐和场之和的形式，该谐和场对时间的依赖关系用因子 $e^{-i\omega t}$ 来表现。似稳场的谐和函数满足方程组。

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E} + \mathbf{J}^{CT}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0,\end{aligned}\tag{1.7}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = -\frac{1}{\sigma} (\mathbf{E} \cdot \operatorname{grad} \sigma + i\omega q^{CT}).$$

如果 $\sigma = \text{常数}$ 是真实的, 那么方程组 (1.6) 取形式:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{J}^{CT}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - k^2 \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \mathbf{J}^{CT},\end{aligned}\tag{1.8}$$

式中系数 k 是介质的波数:

$$k^2 = i\omega\mu_0\sigma.\tag{1.9}$$

k 的值由正的实部选出:

$$k = \sqrt{\frac{\omega\mu_0\sigma}{2}} (1 + i) = \frac{2\pi}{\lambda} (1 + i).\tag{1.10}$$

式中 λ 是电磁波的波长, 按以下公式算得:

$$\lambda = \frac{2\pi\sqrt{2}}{\sqrt{\omega\mu_0\sigma}}.\tag{1.11}$$

如果在被研究的均匀区域内没有外部电流和外部电荷, 则

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \mathbf{H}, \\ \operatorname{div} \mathbf{H} &= 0, \\ \operatorname{div} \mathbf{E} &= 0.\end{aligned}\tag{1.12}$$

在这种情况下, 方程组 (1.8) 简化为亥姆霍兹方程:

$$\begin{aligned}\Delta \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} &= 0, \\ \Delta \mathbf{H} + k^2 \mathbf{H} &= 0.\end{aligned}\tag{1.13}$$

以下我们将只研究谐和场, 并且将应用方程 (1.7) 或者 (1.12) 作为出发方程。

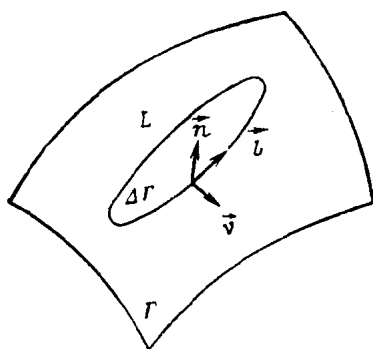
如同确定标量场和矢量场的三维导数的算子 grad 、 div 和 rot 一样, 我们将采用确定场在表面 Γ 上导数的算子 $\operatorname{grad}^\Gamma$ 、 $\operatorname{div}^\Gamma$ 和 $\operatorname{rot}^\Gamma$ 。

$$\text{grad}^{\Gamma} W = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{W} \cdot \mathbf{v} d\mathbf{l}, \quad (1.14)$$

$$\text{div}^{\Gamma} \mathbf{A}_\tau = \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{A}_\tau \cdot \mathbf{v} d\mathbf{l}, \quad (1.15)$$

$$\begin{aligned} \text{rot}^{\Gamma} \mathbf{A}_\tau &= \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{v} \times \mathbf{A}_\tau d\mathbf{l} \\ &= \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{\mathbf{n}}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{A}_\tau \cdot \mathbf{l} d\mathbf{l}, \end{aligned} \quad (1.16)$$

式中 W 是标量场, $\mathbf{A}_\tau$ 为矢量场的切向分量, L 是限定表面 Γ 的 $\Delta\Gamma$ 区



域的迴路; $\mathbf{n}$ 为对表面 Γ 的法线的单位矢量; $\mathbf{v}$ 为对 L 的外法线的单位矢量, 位于表面 Γ 上; $\mathbf{l}$ 为与 L 相切的切线方向的单位矢量 (图 1)。

矢量 $\mathbf{n}$ 、 $\mathbf{v}$ 、 $\mathbf{l}$ 形成右旋系, 即 $\mathbf{n} \times \mathbf{v} = \mathbf{l}$ 。算子 grad^{Γ} 、 div^{Γ} 和 rot^{Γ} 称为二维算子。

借助于二维算子可以表示电磁场在表面 Γ 上的法向分量 E_n 、 H_n 与切向分量 E_τ 、 H_τ 之

间的关系。例如:

$$\begin{aligned} H_n &= \mathbf{n} \cdot \mathbf{H} = \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rot} \mathbf{E}}{i\omega\mu_0} = \frac{\mathbf{n} \cdot \text{rot}^{\Gamma} \mathbf{E}_\tau}{i\omega\mu_0} \oint_L \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{E}_\tau \cdot \mathbf{l} d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L \mathbf{E}_\tau \cdot [\mathbf{n} \times \mathbf{v}] d\mathbf{l} \\ &= \frac{1}{i\omega\mu_0} \lim_{\Delta\Gamma \rightarrow 0} \frac{1}{\Delta\Gamma} \oint_L [\mathbf{E}_\tau \times \mathbf{n}] \cdot \mathbf{v} d\mathbf{l} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{div}^r [n \times E^r] \\
&= -\frac{1}{i\omega\mu_0} \operatorname{div}^r [n \times E]. \quad (1.17)
\end{aligned}$$

类似地, 有

$$\begin{aligned}
E_s = n \cdot E &= \frac{n \cdot \operatorname{rot}^r H_r}{\sigma} = -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div}^r [n \times H^r] \\
&= -\frac{1}{\sigma} \operatorname{div}^r [n \times H]. \quad (1.18)
\end{aligned}$$

高斯公式的二维类似具有形式

$$\iint_{\Gamma} \operatorname{div}^r A_s ds = \oint_{\Gamma} A_r \cdot v dl. \quad (1.19)$$

如果表面 Γ 是封闭的, 则得

$$\iint_{\Gamma} \operatorname{div}^r A_s ds = 0. \quad (1.20)$$

关于二维算子的更详尽的知识读者可以在Л. М. 阿尔平的“场论”(1966年)一书中找到。

§ 2 场方程的矩阵表示

在进行场的积分变换时, 我们有时将使用矩阵表示。我们将注意到, 矢量代数的基本运算可以利用矩阵符号表示出来[3]。

假设 A 和 B 是两个任意的矢量, 按照某种正交归一化基 $\{dx, dy, dz\}$, 它们的展开式具有形式

$$\begin{aligned}
A &= \sum_{\alpha=x,y,z} A_{\alpha} d_{\alpha}, \\
B &= \sum_{\beta=x,y,z} B_{\beta} d_{\beta},
\end{aligned} \quad (2.1)$$

式中 A_x, A_y, A_z 和 B_x, B_y, B_z 是矢量 A 和 B 的标量分量。

我们将通过单位矢的标量积来表示矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标量积。这种运算对每一个自变量是线性的。因此,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} \mathbf{d}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\beta}.$$

由于矢量 $\mathbf{d}_x$ 、 $\mathbf{d}_y$ 、 $\mathbf{d}_z$ 的正交性, 因而具有

$$\mathbf{d}_{\alpha} \cdot \mathbf{d}_{\beta} = \delta_{\alpha\beta},$$

式中

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \alpha = \beta \\ 0, & \alpha \neq \beta \end{cases}$$

是克罗内克的对称符号, 或者 δ 符号。

这样一来,

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} \delta_{\alpha\beta}. \quad (2.2)$$

通常将按两次重复脚标求和的程序称为褶积。这样一来, 矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的标量积可以写为这些矢量的分量与克罗内克 δ 符号的褶积的形式。

矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积可以用类似的方式表示出来。因为对每一个自变量这种运算是线性的, 所以,

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} \mathbf{d}_{\alpha} \times \mathbf{d}_{\beta}.$$

由于矢量 $\mathbf{d}_x$ 、 $\mathbf{d}_y$ 、 $\mathbf{d}_z$ 的正交性,

$$\mathbf{d}_{\alpha} \times \mathbf{d}_{\beta} = \sum_{\gamma=x,y,z} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_{\gamma},$$

式中 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 是克罗内克的反对称符号, 或称 ϵ 符号。

在脚标不相同的情况下,

$$\epsilon_{xyz} = \epsilon_{zyx} = \epsilon_{yxz} = 1;$$

$$\epsilon_{yxz} = \epsilon_{zyx} = \epsilon_{xzy} = -1.$$

如果随便那两个脚标相同, 则 $\epsilon_{\alpha\beta\gamma}$ 的值等于零 (例如, $\epsilon_{xxy} = 0$)。我们注意到, 在克罗内克的 δ 符号与 ϵ 符号之间存在关系

$$\sum_{\zeta=x,y,z} \epsilon_{\alpha\zeta\eta} \epsilon_{\beta\gamma\zeta} = \delta_{\alpha\gamma} \delta_{\beta\eta} - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\gamma\eta}. \quad (2.3)$$

借助于 ϵ 符号, 可以将矢量的矢量积写成形式:

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}. \quad (2.4)$$

矢量 $\mathbf{A}$ 和 $\mathbf{B}$ 的矢量积是这些矢量的分量与克罗内克 ϵ 符号和笛卡尔基的单位矢 $\mathbf{d}_{\gamma}$ 之间的褶积。

现在我们来研究三个矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的混合积:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] = [\mathbf{A} \times \mathbf{B}] \cdot \mathbf{C} \\ &= \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \mathbf{d}_{\alpha} \cdot [\mathbf{d}_{\beta} \times \mathbf{d}_{\gamma}], \end{aligned}$$

其中

$$\mathbf{d}_{\alpha} \cdot [\mathbf{d}_{\beta} \times \mathbf{d}_{\gamma}] = \sum_{\xi=x,y,z} \delta_{\alpha\xi} \epsilon_{\xi\beta\gamma} = \epsilon_{\alpha\beta\gamma}.$$

因而,

$$\mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \times \mathbf{C}) = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma}. \quad (2.5)$$

考虑到 (2.3)、(2.4) 式后, 矢量 $\mathbf{A}$ 、 $\mathbf{B}$ 和 $\mathbf{C}$ 的二重矢量积可以写成这样:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] &= \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} \sum_{\zeta=x,y,z} \sum_{\eta=x,y,z} \\ &\quad \times A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} \epsilon_{\alpha\zeta\eta} \epsilon_{\beta\gamma\zeta} \mathbf{d}_{\eta} = \sum_{\alpha=x,y,z} \sum_{\beta=x,y,z} \sum_{\gamma=x,y,z} \\ &\quad \times A_{\alpha} B_{\beta} C_{\gamma} (\delta_{\alpha\gamma} \mathbf{d}_{\beta} - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{d}_{\gamma}). \end{aligned} \quad (2.6)$$

在上面所有导出的公式中, 求和是按照两次重复脚标进行的。如果约定两次重复的脚标指出按照这个脚标求和的必要性, 那么我们就可以省略连加号。这样的规则称为求和约定。下面我们将使用这个约定, 同时认为, 用希腊字母 α 、 β 、 γ 、……表示的脚标代替 x 、 y 、 z 值。运用求和约定之后, 可以把公式 (2.2)、(2.4)、(2.5) 和 (2.6) 重新写成以下形式:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= A_{\alpha} B_{\alpha} \delta_{\alpha\alpha}, \\ \mathbf{A} \times \mathbf{B} &= A_{\alpha} B_{\beta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma} \mathbf{d}_{\gamma}, \end{aligned}$$

$$\mathbf{ABC} = A_\alpha B_\beta C_\gamma \epsilon_{\alpha\beta\gamma}; \quad (2.7)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \times [\mathbf{B} \times \mathbf{C}] &= A_\alpha B_\beta C_\gamma \epsilon_{\alpha\zeta\eta} \epsilon_{\beta\gamma\zeta} \mathbf{d}_\eta \\ &= A_\alpha B_\beta C_\gamma (\delta_{\alpha\gamma} \mathbf{d}_\beta - \delta_{\alpha\beta} \mathbf{d}_\gamma); \\ \alpha, \beta, \gamma, \zeta, \eta &= x, y, z. \end{aligned}$$

为了表示标量场 W 和矢量场 $\mathbf{A}$ 的空间导数，现在我们应用矩阵符号：

$$\begin{aligned} \text{grad} W &= W, \alpha \mathbf{d}_\alpha; \\ \text{div} \mathbf{A} &= A_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta}; \\ \text{rot} \mathbf{A} &= A_{\alpha, \beta} \epsilon_{\gamma\beta\alpha} \mathbf{d}_\gamma; \\ \alpha, \beta, \gamma &= x, y, z. \end{aligned} \quad (2.8)$$

在这里，求和是按照所有两次重复脚标进行的，而在逗号之后的脚标表示对被这个脚标标记的变数进行微分：

$$W, \alpha = \frac{\partial W}{\partial \alpha}, \quad A_{\alpha, \beta} = \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta}.$$

所引入的符号使得能够把场方程组 (1.12) 用下面的方式写出：

$$\begin{aligned} H_{\alpha, \beta} \epsilon_{\gamma\beta\alpha} &= \sigma E_\gamma; \\ E_{\alpha, \beta} \epsilon_{\gamma\beta\alpha} &= i\omega \mu_0 H_\gamma \\ H_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} &= 0; \\ E_{\alpha, \beta} \delta_{\alpha\beta} &= 0; \\ \alpha, \beta, \gamma &= x, y, z. \end{aligned} \quad (2.9)$$

第二章 电磁场中的 薄层和导电薄膜

§ 3 薄的非均匀层

在进行地电探测时，我们研究深入地穿透到地球内部的低频电磁变化。在这样的低频场中，电磁波的波长比沉积表层和地壳的厚度大得多。所以，在地电学的许多问题中，我们可以采用把地球上层认为是薄层的模型。由于 C. M. 沙因曼和 A. T. 普赖斯 (Price) 的工作，这样的模型获得了发展。薄层的普遍理论为 B. И. 德米特里耶夫所建立 [36]。薄层的采用有可能简化地电学的数学工具 (减少问题的维数, 把矢量问题转化为标量问题)。

在图 2 上表示出了这样一个模型, 在该模型中, 电导率为 $\sigma(x, y)$ 和厚度为 d 的层被平面 $\Gamma^- (z=0)$ 和 $\Gamma^+ (z=d)$ 所限定。这一模型由分布在层外的外部电流所激发。

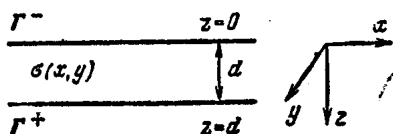


图 2 薄的非均匀层模型

假设 $d \ll \lambda$, 这里 λ 是按以下公式计算的电磁波的波长:

$$\lambda(x, y) = 2\pi\sqrt{2} / \sqrt{\omega\mu_0\sigma(x, y)}.$$

我们将认可, σ 是水平坐标 x, y 的解析函数, 并且将求得层的上界和下界的电磁场之间的关系。

电磁场通过非均匀层的解析延拓

实质上, 所说的是变化电磁场从平面 $z=0$ 到平面 $z=d$ 上的解析延拓。如果电磁场为坐标 x, y, z 的解析函数, 问题的这种提法是可能的。我们将确信这是对的。在层的内部, 电磁场满足方程

式:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot} \mathbf{H} &= \sigma \mathbf{E}, \\ \operatorname{rot} \mathbf{E} &= i\omega \mu_0 \mathbf{H}\end{aligned}\quad (3.1)$$

由此得

$$\Delta \mathbf{H} - \operatorname{rot} \mathbf{H} \times \frac{\operatorname{grad} \sigma}{\sigma} + k^2 \mathbf{H} = 0, \quad (3.2)$$

式中

$$k = \sqrt{i\omega \mu_0 \sigma}; \quad R_e k > 0.$$

方程式 (3.2) 乃是带有解析系数的椭圆型微分方程。从微分方程的普遍理论知道, 坐标 x 、 y 、 z 的解析函数是这种方程式的解。这样一来, 磁场在层内的解析性得到证明。关于电场可以作同样的讨论, 而根据 (3.1) 式, 该电场可以通过磁场来表示。

矢量函数 $\mathbf{H}$ 和 $\mathbf{E}$ 的解析性使得能够用泰勒级数将它们沿 z 轴延拓。仿效 B. И. 德米特里耶夫的做法 [36], 我们将写成

$$\mathbf{H}(z) = \mathbf{H}(0) + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^p}{p!} \frac{\partial^p \mathbf{H}(0)}{\partial z^p}, \quad (3.3)$$

式中 $\mathbf{H}(0)$ 是层的上平面内侧上的磁场。

显然, 这个级数收敛到 $\mathbf{H}(z)$, 但是它的收敛半径 $r(0)$ 可以小于层的厚度 d 。假设 $r(0) < (d - \epsilon)$, 其中 ϵ 是一个任意小的正数。在这种情况下, 我们把 $\mathbf{H}(z)$ 延拓到 $z_1 = 0.9 r(0)$, 然后利用 $\mathbf{H}(z)$ 在点 z_1 处的泰勒级数展开。如果新级数的收敛半径 $r(z_1)$ 同样不可能达到层的下界, 即如果 $z_1 + r(z_1) < d - \epsilon$, 那么应该在点 $z_2 = z_1 + 0.9 r(z_1)$, 等等重复这个过程, 直到条件

$$z_n + r(z_n) \geq d - \epsilon \quad (3.4)$$

还未满足时为止, 式中

$$z_{n+1} = 0.9 \left[r(0) + \sum_{q=1}^n r(z_q) \right].$$

不难证明, 总是存在如此大的 n , 在此情况下条件 (3.4) 式被满足。从相反的情况推论, 我们采用在任意 n 时 $z_n + r(z_n) <$

$(d-\epsilon)$ 。在这种情况下, 对于在 $n \rightarrow \infty$ 时的 z_n , 我们将获得收敛于极限 $z_\infty \leq (d-\epsilon)$ 的有界单调增长的序列, 由此得出结论, 正号级数

$$z_\infty = 0.9 \left[r(0) + \sum_{q=1}^n r(z_q) \right]$$

是收敛的, 即当 $q \rightarrow \infty$ 时, $r(z_q) \rightarrow 0$ 。但是, 这与函数 H 在层内的解析性条件相矛盾。事实上, 点 z_∞ 乃是层的内点, 因而在这一点上函数 H 可能展成具有非零收敛半径 $r(z_\infty)$ 的泰勒级数。所得到的矛盾证明当 n 足够大时条件 (3.4) 可以满足。因为 ϵ 是一个任意小的数, 所以逐渐采取 (3.3) 型展开式就有可能把磁场延拓到随意接近层的下界。

在这种提法中, 如同由 (3.3) 式得出结论一样, 场的延拓问题归结于确定它的垂直导数。

我们从磁场的水平分量出发, 利用方程式 (3.2) 求得分量 H_x 和 H_y 的二阶垂直导数的表达式:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 H_x}{\partial z^2} &= \left(-k^2 - \Delta_r + \frac{\sigma_{,y}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} \right) H_x - \frac{\sigma_{,y}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} H_y, \\ \frac{\partial^2 H_y}{\partial z^2} &= -\frac{\sigma_{,x}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} H_x + \left(-k^2 - \Delta_r + \frac{\sigma_{,x}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \right) H_y, \end{aligned} \quad (3.5)$$

式中

$$\sigma_{,x} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}; \quad \sigma_{,y} = \frac{\partial \sigma}{\partial y}; \quad \Delta_r = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}.$$

便于把关系式 (3.5) 写成矩阵形式:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{H}_r}{\partial z^2} = \hat{D} \mathbf{H}_r, \quad (3.6)$$

式中 $\hat{D}$ 是矩阵微分算子, 它只包括场的水平导数和电导率:

$$\hat{D} = \begin{bmatrix} -k^2 - \Delta_r + \frac{\sigma_{,y}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} & -\frac{\sigma_{,y}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \\ -\frac{\sigma_{,x}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial y} & -k^2 - \Delta_r + \frac{\sigma_{,x}}{\sigma} \frac{\partial}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

而 $\mathbf{H}_r$ 是由分量 H_x, H_y 所组成的矢量列

$$\mathbf{H}_r = \begin{bmatrix} H_x \\ H_y \end{bmatrix}.$$

因为算子 $\hat{D}$ 不包括依赖于 z 的要素, 所以可以求得 $\mathbf{H}_r$ 的高阶导数:

$$\frac{\partial^{2p}}{\partial z^{2p}} \mathbf{H}_r = \hat{D} \frac{\partial^{2p-2}}{\partial z^{2p-2}} \mathbf{H}_r = \underbrace{\hat{D} \cdot \hat{D} \cdots \hat{D}}_{p \text{ 次}} \mathbf{H}_r = \hat{D}^p \mathbf{H}_r; \quad (3.8)$$

$$\frac{\partial^{2p+1}}{\partial z^{2p+1}} \mathbf{H}_r = \hat{D}^p \frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial z}$$

式中 $\hat{D}^p = \underbrace{\hat{D} \cdot \hat{D} \cdots \hat{D}}_{p \text{ 次}}, \quad p = 0, 1, 2, \dots$

现在我们用场的水平导数来表示 $\frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial z}$, 根据 (3.1) 式,

$$\frac{\partial \mathbf{H}_r}{\partial z} = \begin{bmatrix} \sigma E_y + \frac{\partial H_x}{\partial x} \\ -\sigma E_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} \end{bmatrix} = \varepsilon \sigma \mathbf{E}_r + \nabla_r H_z, \quad (3.9)$$

式中 $\mathbf{E}_r = \begin{bmatrix} E_x \\ E_y \end{bmatrix}; \varepsilon = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}; \nabla_r = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{bmatrix}.$

把 (3.9) 式代入 (3.8) 式之后, 我们得到

$$\frac{\partial^{2p+1}}{\partial z^{2p+1}} \mathbf{H}_r = \hat{D}^p [\varepsilon \sigma \mathbf{E}_r + \nabla_r H_z]. \quad (3.10)$$

回到级数 (3.3) 式上来, 写成

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_r(z) = \mathbf{H}_r(0) + \sum_{p=0}^{\infty} \frac{z^{2p+1}}{(2p+1)!} \hat{D}^p [\varepsilon \sigma \mathbf{E}_r(0) + \nabla_r H_z(0)] \\ + \sum_{p=1}^{\infty} \frac{z^{2p}}{(2p)!} \hat{D}^p \mathbf{H}_r(0). \end{aligned} \quad (3.11)$$

这样一来, 如果在具有已知电导率 $\sigma(x, y)$ 的层的上界上场 $\mathbf{E}$