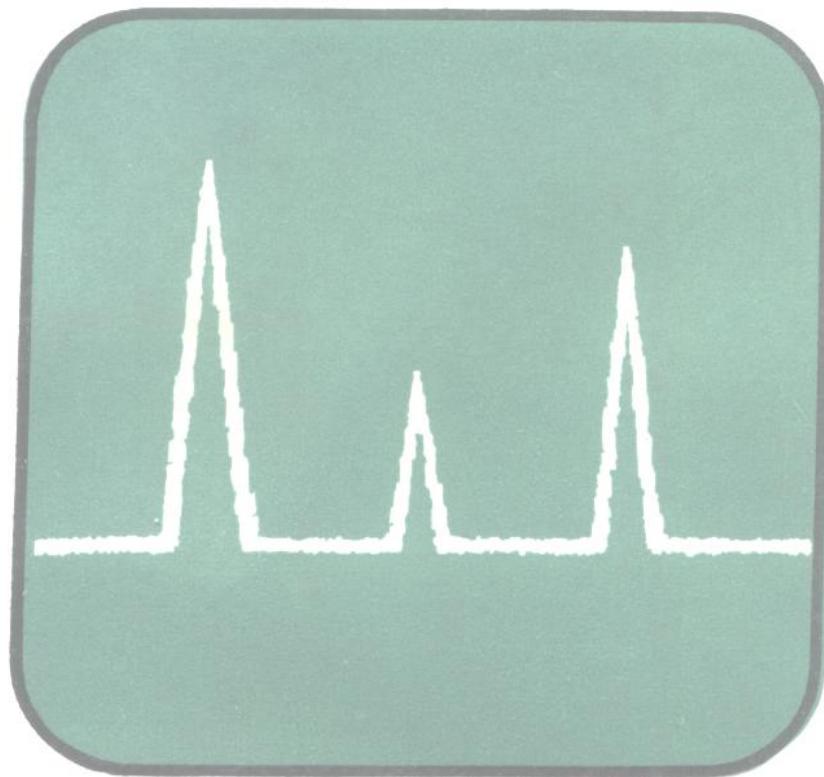


哈尔滨工业大学研究生教材

ULTRASONIC ENGINEERING



金长善 编著

# 超声工程

哈尔滨工业大学出版社

TB35  
丁43

# 超 声 工 程

金长善 编著

哈尔滨工业大学出版社

## 内 容 提 要

全书共分七章：超声波技术的物理基础、超声波换能器、超声波在制造工程中的应用、超声波空间发射接收技术、超声波探伤原理与探伤仪、超声波工业测量技术、超声波在摩擦学研究中的应用。

本书是为大专院校非超声技术专业（机械类和电类等）的研究生和本科生而编写的教材。书中反映了国内外超声波技术的最新成就，以及作者从事多年教学科研成果，涉及面广，内容丰富，不仅可作教材使用，而且可供机械、冶金、计量、自动化、机器人以及医学等领域的工程技术人员参考。

## 超 声 工 程

金长善 编著

哈尔滨工业大学出版社出版  
新华书店首都发行所发行  
哈尔滨建工学院附属印刷厂印刷

开本787×1092 1/16 印张12.875 插页2 字数300 000

1989年7月第1版 1989年7月第1次印刷

印数1—3 000

ISBN 7-5603-0195-9/TN-14 定价5.20元



# 研究生教材出版说明

研究生教材建设是一个长期而艰巨的任务。它不仅关系到研究生的培养质量，还关系到教师的研究成果能否系统地总结起来。因此，我们鼓励、支持和组织多年从事研究生教学、有着丰富教学和科学经验的教师参加研究生教材的编写工作，以促进研究生教材建设的进展，让那些学术水平较高而且急需的教材得以及时出版。

研究生教材的取材，首先着眼于当代新技术和新理论的发展，反映国内外的最新学术动态，使研究生学习之后能迅速接近当代科技发展的前沿，以适应现代化建设的需要；同时，又应该考虑到研究生必须掌握坚实的基础理论和系统知识，要求各课程教材应具有最基本的和最稳定的内容，使得研究生教材有足够的深度和广度。

研究生教材的选题、编写、编辑出版等各方面工作，虽然经过认真评审和细致的定稿工作，但就整体来看，这项工作尚属起步阶段，经验不足，缺点和错误在所难免，渴望各方面专家、学者和读者提出意见，使其不断改进和完善。

哈尔滨工业大学研究生院  
哈尔滨工业大学出版社

1989年4月

## 前　　言

超声波技术作为多门学科的边缘技术，正在不断地向各个技术领域渗透。随着超声波应用领域的逐渐扩大，越来越多的科技工作者从事超声波技术应用的研究。在高等院校研究生和本科生科研课题中，超声波内容已占一定的比例，他们需要了解超声波技术的基本内容，如果能有一本既能当教材，又能起导引作用的书籍，对他们将是很有帮助的。这就是编写本教材的目的。

本书是根据非超声技术专业研究生的教学需要而编写的，既考虑了基础知识，又考虑了应用。本书的材料来源有两个方面：一是来自国内外学者的最新科技成就；二是取自作者所从事的教学、科研活动的部分经验和成果。

本书的主要内容包括超声波加工技术、超声波探伤技术和超声波测量技术三个方面。在过去出版的专著中，这些内容是分别叙述的，而本书是以超声波加工作为重点，力求把这三方面的基本内容联系起来，汇编在一起，给读者以比较完整的超声波技术的轮廓。了解了这些基本内容之后，读者还可以深入探讨超声波技术的各个应用领域。

在本书的编写过程中，不少兄弟单位提供了许多宝贵资料，吴永孝教授审阅了本书的编写大纲，书稿由卢福基同志主审，侯国章、王贵生等同志做了大量的技术性工作，在此一并表示感谢。

由于作者水平有限，书中难免存在一些不当之处，热忱希望广大读者批评指正。

编　者

1989年2月

# 目 录

## 绪论

<b>第一章 超声波技术的物理基础</b>	5
1-1 质点的机械振动	5
一、谐振动的复数表示法	5
二、质点振动的机械阻抗	6
三、简单机械振动系统的分析	10
四、谐振动的能量	14
1-2 平面声波的波动方程	15
一、理想媒质中平面声波的波动方程	15
二、波动方程的动力学分析	16
三、弹性介质参量与波阻	17
1-3 简单杆件系统的振动状态分析	18
一、简单杆件振动状态表达式	19
二、无损失杆件的输入阻抗	28
三、无损失杆件的共振频率	30
1-4 超声波在变截面杆中的传播	34
一、波阻按指数规律变化的杆件振动微分方程	34
二、指数杆中弹性波传播常数与相速	37
三、指数杆匹配条件	38
四、指数杆的输入阻抗与共振频率	38
五、锥形杆的相速与固有频率	39
六、指数杆的波节	40
七、指数杆的应用条件	41
1-5 匹配	42
一、匹配的任务	42
二、四分之一波长的匹配装置	43
三、半波长杆件系统	44
四、非均匀杆件匹配装置	45
五、集中器	45
1-6 超声波变幅杆的设计计算	46
一、变幅杆计算程序	46
二、计算实例	47
1-7 表面波与板波的特性及其应用	48

一、表面波（瑞利波） .....	48
二、板波（兰姆波） .....	49
1-8 平面波在半无限媒质分界面处的反射与折射 .....	51
一、两个半无限媒质分界面处的垂直入射情况 .....	51
二、多层媒质的垂直入射情况 .....	52
三、两个半无限的各向同性均匀固体媒质的分界面，斜入射的情况（包括一个媒质是流体的情况） .....	53
1-9 超声波的衍射 .....	55
一、远场区 .....	55
二、近场区 .....	56
1-10 超声波的衰减、吸收与散射 .....	57
1-11 多普勒效应 .....	57
<b>第二章 超声波换能器</b> .....	<b>59</b>
2-1 压电材料 .....	59
一、压电材料的种类 .....	59
二、压电材料的方向性 .....	60
三、压电材料的主要参量 .....	60
2-2 磁致伸缩材料 .....	63
一、常用磁致伸缩材料的物理性能 .....	63
二、磁致伸缩材料的热处理 .....	63
2-3 压电换能器（探头）结构 .....	63
一、用途及种类 .....	63
二、直探头 .....	64
三、斜探头 .....	65
四、表面波探头 .....	65
五、兰姆波探头 .....	65
六、聚焦探头 .....	65
七、压电晶体力传感器 .....	67
<b>第三章 超声波在制造工程中的应用</b> .....	<b>68</b>
3-1 超声波振动切削 .....	68
一、超声波振动切削简介 .....	68
二、超声波振动切削的效能 .....	69
三、超声波振动切削的运动学 .....	72
四、关于超声波振动切削效果机理的主要理论和观点 .....	73
五、塑性波传播理论与沙罗门曲线，超高速切削与超声波切削的关系 .....	74
六、超声波钻削的基本规律 .....	76

3-2 超声波在冶金学中的应用 .....	80
3-3 超声波器械 .....	82
一、超声波马达.....	82
二、超声波塑料缝合装置.....	87
三、手提式超声波工具.....	89
<b>第四章 超声波空间发射与接收技术.....</b>	<b>90</b>
4-1 双压电晶体片的弯曲振动 .....	90
4-2 超声波空间发射电路 .....	93
一、多谐振荡器.....	93
二、555集成电路 .....	93
三、四与非门.....	93
4-3 空间超声波接收电路 .....	94
一、分立元件接收电路.....	94
二、集成块接收电路.....	95
4-4 超声空间发射接收技术的应用 .....	96
一、传送带送料的自动控制.....	96
二、料斗“阻塞”现象的检测.....	96
三、泥浆搅拌槽的料位控制.....	97
四、距离及倾斜度测量.....	98
五、包装件传输带上物体缺额的检测.....	98
六、防止无人驾驶搬运车的碰撞.....	99
4-5 压电晶体人工中耳 .....	99
一、压电晶体人工中耳原理.....	99
二、压电晶体人工中耳的应用效果.....	100
三、压电晶体人工中耳的工艺及试验.....	101
<b>第五章 超声波探伤原理与探伤仪.....</b>	<b>104</b>
5-1 超声波探伤分类法 .....	104
5-2 超声波探伤仪原理 .....	105
一、A型探伤仪工作原理.....	105
二、B型探伤仪工作原理.....	106
三、C型探伤仪工作原理.....	106
四、M型超声波仪器工作原理.....	107
五、连续波探伤仪工作原理.....	107
六、调频波超声波探伤仪工作原理.....	107
七、脉冲式超声波探伤仪主要参数.....	108
5-3 超声波探伤仪单元线路 .....	109

一、触发电路(同步电路) .....	109
二、发射电路.....	109
三、脉冲延迟与延迟发射.....	110
四、几种触发扫描方式.....	110
五、接收放大电路.....	111
六、矩形波电路.....	114
七、锯齿波电路.....	114
八、距离-增益补偿原理与电路 .....	114
九、标距波电路.....	115
5-4 超声波探伤仪典型电路分析 .....	116
一、同步电路(触发波电路) .....	116
二、时基电路.....	117
三、报警电路.....	119
四、接收放大电路.....	121
五、显示电路.....	122
六、整机电路.....	123
5-5 超声波探伤仪与探头的匹配 .....	123
一、压电探头的阻抗.....	123
二、超声波探伤仪的匹配.....	123
5-6 超声波电磁激发与接收 .....	125
一、金属中纵波的产生.....	125
二、金属中横波的产生.....	125
三、电磁超声的接收.....	125
5-7 脉冲压缩技术 .....	126
5-8 声发射技术 .....	127
一、声发射现象.....	127
二、声发射的特点.....	128
三、声发射检测技术.....	129
5-9 超声显像技术 .....	130
一、超声场的光学显示.....	130
二、早期的超声波显象.....	134
三、摄象管显象法.....	134
四、B型线阵显象仪 .....	135
五、超声全息显象.....	139
<b>第六章 超声波工业测量技术.....</b>	<b>141</b>
6-1 超声波声速测量技术.....	141
一、共振干涉法.....	141

二、临界角法 .....	142
三、相位比较法 .....	142
四、脉冲法 .....	143
6.2 共振、干涉法超声波测厚技术 .....	143
一、共振法测厚原理 .....	143
二、干涉式厚度计 .....	145
6.3 脉冲反射式超声波测厚原理 .....	146
一、测厚仪发射电路 .....	147
二、主控振荡器与计数脉冲发生器 .....	148
三、厚度方波形成电路 .....	149
四、反射脉冲选通技术 .....	150
五、时间放大器（脉冲加宽电路） .....	154
六、声速调节 .....	154
七、计算电路 .....	155
八、接触式超声波测厚仪在非接触自动测量与加工中的应用 .....	155
九、炉壁厚度的超声波测量方法 .....	159
6.4 超声波硬度测量法 .....	159
6.5 超声波流量测试原理 .....	162
一、脉冲间隔时间法 .....	163
二、相位差法 .....	163
三、声环法 .....	164
四、声束偏移法 .....	164
五、多普勒法 .....	164
6.6 超声波温度测试原理 .....	166
6.7 超声波液位测量原理 .....	167
6.8 超声粘度计原理 .....	167
<b>第七章 超声波在摩擦学研究中的应用 .....</b>	<b>170</b>
7.1 超声波减摩技术 .....	170
7.2 超声波摩擦探测技术 .....	173
一、滚动轴承工作状态的超声波测试 .....	173
二、油膜厚度的超声波测量 .....	174
三、摩擦副接触状态超声波探测法 .....	180
四、应用超声波探测滑动轴承磨损的方法 .....	184
五、应用声发射技术确定摩擦副完成磨合时刻的方法 .....	187
<b>参考文献 .....</b>	<b>188</b>
<b>附录 常用媒质的声学数据 .....</b>	<b>190</b>

## 绪 论

无线电雷达在空间目标探测方面有着“神奇”的作用，而超声波技术恰恰在无线电雷达不能起作用的固体、液体和生物体中发挥着“神功”。超声波技术就是“固体雷达”，声纳就是“水中雷达”。

超声波技术已经不是简单的固体内部缺陷探测手段，而是全面探索固体和液体内部世界奥秘的有力工具。超声波技术不仅可以测量固体材料强度、硬度、晶粒和内部组织，而且可以测量液体的粘度、密度、流量、温度等几十种表征物体特性的参数。更使人惊奇的是超声波显象技术能使人们用肉眼观察固体、液体和生物体的内部状态。医学上的B超就是典型实例，它可以显示肝胆、子宫、卵巢、心脏、眼球、乳腺和腹部包块等。以上是超声波在检测技术方面的应用实例。

超声波在改变物质的性质和状态方面的应用也是相当广泛的。如：超声波钻孔、清洗、焊接、粉碎、凝聚、萃取、催化等。

现代超声技术是声学、仿生学、电子技术、电子计算机、计量技术、相关技术、激光技术、频谱分析等新技术成就的综合应用。这些新技术逐步汇集成现代超声技术已将近有一百年历史。

回顾历史，超声波技术的起源年代还需要考证。但有两件事与超声波技术起源密切相关：一是蝙蝠在夜间疾速飞行时靠超声波导航的奥秘被人类所认识；二是1880年发现了压电效应。仿生学的启发是很重要的。但是，人类真正科学地开展超声波技术的研究还是从发现压电效应开始的。下表列出了1880年以后同超声波发展有关的大事记<sup>[1]</sup>。

项 目	发明者	年 代
压电效应	J.Curie, P.Curie	1880
电真空管	L.Deforest	1907
声 纳	P.Langevin	1917
超声的生物效应	A.Loomis, R.Wood, E.Harvey	1927—1928
初期的超声实时显象	S.Sokolov, R.Pohlman	1929—1949
NDT中的脉冲回声	F.Firestone	1942
组织的穿透式超声成象	K.Dussik, T.Hueter	1942—1950
脉冲回声法用于医学	J.Wild, J.Reid, D.Howry	1950—1952
超声对组织的基本效应	F.Fry, W.Fry, F.Dunn, P.Schwan	1950—1969
超声医用扫描器	D.Howry, J.Holmas, J.Wild, L.Leksell, Y.Kikuchi	1950—1969
心脏诊断	C.Hertz, I.Edler, S.Satomura	1954—1957
脑诊断	L.Leksell	1956
眼显象	G.Baum, I.Greenwood等	1956—1965

妇产科诊断	I. Donald, G. Kossoff, T. Wagai	1958—1965
脑扫描	R. Heimburger	1958—1970
血流-连续多普勒	里村茂夫	1957
脉冲式	D. Franklin, D. Baker	1959
多普勒区散射	D. Franklin	1961
脉冲多普勒	D. Baker, P. Peronneau	1969
光全息	D. Gabor	1948
乳房肿瘤声衰减的确诊	E. Fry	1966—1971
激光	C. Townes, A. Schawlow, T. Maiman等	1954—1960
计算机应用于超声显象及组织扫描	W. Fry等	1965—1973
超声全息	P. Greguss, R. Mueller, A. Metherell, B. Brenden	1956—1968
声参数测定	P. Pohlman, E. Carstensen H. Schwann, D. Goldman, T. Hueter, W. Fry等	1939—1973
声学的布拉格成象	A. Korpe	1966
时间延迟频谱测量	R. Heyoser	1967
Sokolov管	S. Sokolov	1937
Sokolov管医学成象	J. Jacobs	1964
超声显微镜	S. Sokolov, F. Dunn, W. Fry, E. Suckling, C. Quate等	1949—1972
随机信号雷达	G. Cooper	1966
随机信号多普勒	V. Newhouse, C. Jethwa	1973—1974

同任何科学技术一样，人类在自然界和社会活动的需求是超声技术发展的动力，海底冰山对远洋海轮威胁很大，1912年有人提出用超声波探测海底冰山的设想；第一次世界大战期间，德国潜艇严重威胁法国，1917年法国研究用超声波探测潜艇，并制成了第一个压电式超声波发生器，1918年制成了第一个超声波探测设备（声纳）可以探测一公里左右远的潜艇。

1928年有人提出用超声波探测材料内部缺陷的设想，并制成了第一个连续波超声波探伤仪。1934年有人提出用脉冲超声波进行探伤的设想。

第二次世界大战后，由于雷达技术的发展大大促进了超声波探伤技术的发展；电子计算机、激光技术等新技术的发展又加速了超声波技术的发展，超声显象技术（超声全息）就是其中一例。

超声波技术正在深入到许多科学领域和生产部门，不断出现突破性进展。那么超声波为什么如此“神通”，超声波是如何起作用的？关于超声波改变物质性质和状态的机理还没有定论。但是，目前人们认为超声波有四个基本作用，这些作用导致了五种效

应，这些效应在不同场合得到具体应用<sup>[1]</sup>。为了直观，将这一见解分类归纳如下：

四个基本作用	力学效应	搅拌作用 分散作用 去气作用 成雾作用 凝聚作用 定向作用 冲击破碎作用 疲劳破坏作用等	应用	超声波加工和处理技术	钻孔 切割 粉碎 焊接 清洗 分散 乳化 凝聚 除尘 成雾 烘干 去气 萃取 化学反应 医疗器等
	热学效应	吸收引起的整体加热 边界面处的局部加热 形成激波时波前处的局部加热等			
	光学效应	引起光的衍射、折射、双折射 声致发光等			
	电学效应	在压电、压磁材料中产生电场和磁场 引起电子逸出 电化学效应等			光和激光超声调制器 超声频闪观测器 超声快速光阀 超声显象器等
	化学效应	促进化学反应 促进氧化还原 促进高分子物质的聚合或解聚 引起照相底片的感光 引起声化学发光等			

下面讨论超声波的四个基本作用。第一个基本作用是线性的交变振动作用，就是说超声波在媒质中传播时，必然使媒质粒子作交变振动，并引起媒质中的应力或声压的周期性变化，从而引起一系列次级效应；第二个基本作用是大振幅振动在媒质中传播时会形成锯齿形波面的周期性激波，在波面处造成很大的压强梯度，因而能产生局部高温高压等一系列特殊效应；第三，振动的非线性会引起相互靠近的柏努利力，由粘度的周期性变化而引起的直流平均粘滞力等等，这些直流力可以说明一些定向作用、凝聚作用等力学效应；第四个基本作用是空化作用，这是只能在液体媒质中出现的一种重要的基

本作用。在声场中，液体中的气泡可能逐步生成和扩大，然后突然破灭，在这急速的气泡崩溃过程中，气泡内出现高压高温，气泡附近的液体中也形成局部强烈的激波。因此就可以产生一系列次级效应，如化学效应、声致发光、分散作用和乳化作用等。在液体中进行的超声处理技术，几乎大多数都与空化作用有关。

上述超声波的四个基本作用是超声加工和处理技术的物理基础。而超声波在无损探伤与测量中的物理基础主要是其准光学性质。超声波在不同介质中传播时，其反射、折射以及衰减各不相同，利用这些物理过程可以判断材料内部的状态和性质。

上面我们简单回顾了超声波技术的发展史，并且讨论了超声波作用机理。这些内容对读者深入了解超声波技术是有益的。

# 第一章 超声波技术的物理基础

本章由两部分组成：第一部分是超声波在杆件中的传播特性，就是超声波加工的物理基础；第二部分是超声波在无限与半无限介质中传播特性和场特性，也就是超声波探伤和超声波测量技术的物理基础。

考虑到第二部分在过去出版的有关超声波技术的书籍中介绍的较多，而第一部分的内容相对较少，因此本章的重点放在前一部分。

## 1-1 质点的机械振动

### 一、谐振的复数表示法

谐振过程可以用我们所熟悉的公式表示：

$$\zeta = \zeta_m \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right) = \zeta_m \cos(2\pi f t + \varphi) = \zeta_m \cos(\omega t + \varphi) \quad (1-1)$$

式中， $\zeta_m$ 是质点离平衡位置的最大位移，即振幅； $T$ 是周期； $f = 1/T$ 叫做频率； $\omega = 2\pi f$ 叫做圆频率； $\omega t + \varphi$ 为相位角； $\varphi$ 是 $t = 0$ 时的相位角，叫做初相角。以上是谐振的三角函数表达式。

把谐振过程用复数表示比三角形式更简单，可使运算过程大为简化。

根据数学定理：

$$e^{i\theta} = \cos\theta + j\sin\theta \quad (1-2)$$

式中实数部分用 $\text{Re}[e^{i\theta}]$ 表示，把三角形式谐振表达式可以写成

$$\zeta = \zeta_m \cos(\omega t + \varphi) = \text{Re}[\zeta_m e^{i(\omega t + \varphi)}] \quad (1-3)$$

为了方便，一般不写 $\text{Re}$ 符号，可以写成

$$\zeta = \zeta_m e^{i(\omega t + \varphi)} \quad (1-4)$$

式(1-4)亦可改写成

$$\zeta = \zeta_m e^{i\varphi} e^{i\omega t} = \zeta^* e^{i\omega t} \quad (1-5)$$

式中， $\zeta^* = \zeta_m \cdot e^{i\varphi}$ 叫做复数振幅，它已经包含了振幅和相位这两个物理量。

将式(1-5)对 $t$ 求导数得速度

$$\dot{\zeta} = \frac{d\zeta}{dt} = j\omega \zeta^* e^{i\omega t} = j\omega \zeta \quad (1-6)$$

将式(1-6)对时间再求一次导数，就可以得到质点振动加速度

$$\ddot{\zeta} = \frac{d^2\zeta}{dt^2} = -\omega^2 \zeta \quad (1-7)$$

## 二、质点振动的机械阻抗

受周期力作用的一质点作简谐振动时，力  $F$  作用于质量  $M$ ，有

$$F = M \ddot{\zeta} = M \frac{d\dot{\zeta}}{dt} \quad (1-8)$$

将  $F = F_m e^{i\omega t}$  与  $\dot{\zeta} = \dot{\zeta}_m e^{i\omega t}$  两关系式代入式 (1-8)，得

$$F_m e^{i\omega t} = j\omega \dot{\zeta}_m M e^{i\omega t} \quad (1-9)$$

因此

$$F_m = j\omega M \dot{\zeta}_m$$

即

$$\frac{F_m}{\dot{\zeta}_m} = j\omega M \quad (1-10)$$

力作用于弹性，有

$$F = K\zeta \quad (1-11)$$

因为  $\zeta = \int \dot{\zeta} dt$

$$F_m = \dot{\zeta}_m \frac{K}{j\omega}$$

即

$$\frac{F_m}{\dot{\zeta}_m} = \frac{K}{j\omega} \quad (1-12)$$

对力阻，有

$$F = R \dot{\zeta}$$

$$\frac{F_m}{\dot{\zeta}_m} = R \quad (1-13)$$

将公式 (1-10), (1-12), (1-13) 归纳为

$$\frac{F_m}{\dot{\zeta}_m} = Z_m \quad (1-14)$$

$Z_m$  值代表力振幅与速度振幅的比值，叫做机械阻抗， $Z_m$  是复数阻抗，有

$$Z_m = R + jX$$

对质量

$$X_m = j\omega M \quad (1-15)$$

对弹性

$$X_e = \frac{K}{j\omega} = \frac{1}{j\omega C} \quad (1-16)$$

复数阻抗的模  $|Z_e| = \sqrt{R^2 + X^2}$ ; 速度与力的夹角  $\varphi$  可以写成

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{X}{R} \quad (1-17)$$

下面讨论机械阻抗的连接问题:

在一个简单的集中参量机械振动系统中, 如果作用力直接作用在组成该系统的所有单元上, 则这种连接方式叫做并联(图1-1a); 如果作用力直接作用在组成该系统的一个单元上, 则这种连接方式叫做串联(图1-1b)。串联和并联时, 力学参数之间存在表1-1所示关系。

表1-1

串联和并联时力学参数之间的关系

	串 联	并 联
力 $F$	$F_k = F$	$\sum_{k=1}^n F_k = F$
速度 $\dot{\zeta}$	$\sum_{k=1}^n \dot{\zeta}_k = \dot{\zeta}_0$	$\dot{\zeta}_0 = \dot{\zeta}_1 = \dot{\zeta}_2 = \dots = \dot{\zeta}_n$
阻抗 $Z$	$\frac{1}{Z_0} = \frac{1}{Z_1} + \frac{1}{Z_2} + \dots + \frac{1}{Z_n}$	$Z_0 = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n$

$\dot{\zeta}_0$  和  $Z_0$  为力作用点的相对速度和阻抗

图1-1是简单的集中参量机械振动系统阻抗的连接方式。

我们可以应用力电类比法, 对任何较复杂的系统, 进行阻抗计算。例如, 在图1-2所示系统中, 进行分步计算后, 得出总阻抗

$$Z_0 = \frac{1}{\frac{1}{Z_1 + Z_2} + \frac{1}{Z_3 + \frac{Z_4}{Z_3 + Z_4}}}$$

对图1-1第三种情形

$$Z_0 = \frac{1}{\frac{1}{X_e} + \frac{1}{R_1}} = \frac{1}{\frac{1}{j\omega M} + \frac{1}{R_1}} = \frac{R_1 \omega^2 M^2}{R_1^2 + \omega^2 M^2} + j \frac{R_1^2 \omega M}{R_1^2 + \omega^2 M^2}$$