现代控制工程的数学基础

王永初　任秀珍　编著

化学工业出版社

现代控制工程的数学基础

王永初　任秀珍　编著

化 学 工 业 出 版 社

内 容 提 要

本书系统地介绍现代控制工程中最常用的数学方法和基本概念，共分十章。包括微分方程与差分方程、状态方程的计算、褶积运算、线性代数、微积运算、集与空间、变分方法以及统计学和随机过程等方面的内容。本书的特点是内容深入浅出，侧重介绍实用性方法以及对控制工程非常有用而在一般数学教本上不太强调的许多内容，并列举控制工程中应用数学方法的大量实例。

本书第一章由任秀珍同志编写，其它各章由王永初同志编写。

本书可供高等院校自动控制、仪器仪表、计算机应用等专业的高年级学生、研究生、教师以及工程技术人员参考。

现代控制工程的数学基础

王永初　任秀珍 编著

责任编辑：李诵雪

封面设计：许　立

*

化学工业出版社出版

（北京和平里七区十六号楼）

化学工业出版社印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行

*

开本850×1168 1/32 印张16 3/4 字数442千字 印数1—11,000

1985年6月北京第1版 1985年6月北京第1次印刷

统一书号15063·3645 定价3.10元

前　　言

随着控制理论与自动化技术工具的发展，自动化系统的设计逐步由定性分析发展到定量计算，数学所起的作用越来越重要。控制理论应用了数学的绝大多数分支。许多读者在学习控制理论的时候，会遇到许多数学问题，有些问题如拉普拉斯变换、微分方程与褶积，可能早已熟悉，但拉普拉斯变换只适用于初始条件为零的场合，为了处理初始条件不为零的系统问题，出现了双向拉普拉斯变换；微分方程与褶积虽然本身是一个古老问题，但有丰富的技巧性与实践上的问题，而要从包含微分算子的微分方程确定脉冲响应，则不是一件简单的工作。本书有许多问题可能还是读者比较陌生的，如线性代数的迹、内积，各种形式的范得蒙变换矩阵，z 变换、s 变换传递函数与状态方程间的转换，FFT 变换，李雅普诺夫方程及黎卡提方程的解，集与空间，变分方法；随机过程的协方差矩阵定理，随机微积分，维纳积分，伊藤积分等，而这些方法或概念是经常在各种控制理论的文献中出现的。有些数学方法，数学的定义比较灵活，如 z 变换与差分，都有多种形式，以致于各种文献出现了许多形式不同而实质相同的数学表示式，其内在的联系对读者来说也是很重要的。值得指出的是同一个控制系统可以应用的数学工具有很多，问题是如何选择最适合的工具使求解问题简化。所以，很久以来，我们就想把控制问题的数学归纳一下，向读者作一个比较系统的介绍，以加深对各种控制理论的理解。但是，在这样一本书中要介绍所有与控制有关的数学是不可能的，只能介绍一些与目前水平相适应，而又与工程控制关系比较密切的内容。在写法上，我们注重那些对读者比较有用的概念，并尽量用工程控制的例子说明数学方法的应用，而不单纯追求数学上的完整性与严格性。

本书包括如下内容：

1．微分方程、差分方程以及状态方程：这些方程常用来描述系统的动态模型，系统的模型决定系统的品质，如稳定性、终值、动态误差以及静态误差等。我们着重介绍方程的求解方法，尤其注意介绍包含有重复复根情况，或者强迫函数包含有微分算子这样一类比较困难的问题的求解方法。

2．褶积、线性代数以及时域运算：是一个系统进行运算的基础。我们要知道一个系统品质好或不好，通常要通过求输出响应才能知道，不好是哪些因素在起主要作用，参数如何进行修改、系统结构如何进行选择，都同这些运算有关。我们特别注意对控制理论非常有用、而在数学课本中却经常受到忽视的那些内容。

3．微积运算：包括 z 变换、傅利叶变换与拉普拉斯变换。这部分内容读者比较熟悉。我们发现许多读者虽然了解这些基本方法，但对变换的实质并不一定都了解，以至遇到一个工程问题常常感到无从着手，原因在于没有掌握函数转换或变换函数的技巧。z 变换常在离散系统中出现，而且经常采用的有两种形式，为什么会有两种形式呢？它们之间又有什么关系呢？本书都作了比较和解释。傅利叶变换发展很快，傅利叶变换的重要性在于引出正交函数的概念和快速傅利叶变换的方法，随着控制理论的发展，这些内容变得更加重要。

4．集与空间的概念：各个数学分支都涉及到集与空间的概念。在比较新的控制理论中，经常出现凸集、闭包、开集、闭集以及测度等概念，而这些概念又分布在实变函数论、解析函数论、泛函分析、概率论以及拓朴学当中，我们专门开辟一章简要介绍这些概念看来是需要的。本章不同于其它章，着重的不是运算技巧而是数学概念。读者在学习前面各章时如遇到这些概念的困难，可以首先阅读本章。

5．概率论及随机过程：在控制理论中，随机控制占有特殊重要的位置。随机过程包括马尔柯夫过程、平稳随机过程以及维

纳过程。随机过程可以用概率统计量来描述。一个随机变量是定义在欧几里得空间或希尔伯脱空间内的泛函数，一般情况下是一个实函数，它可以有连续、微分与积分的概念，这些概念通常用相关函数、协方差函数或平均值来研究的。本书注意应用这些概念来解决控制理论中的问题，如估值、滤波与识别。

根据上述五个部分的内容，我们安排了十章。但是必须指出，本书作为一本控制理论的数学基础还是不全面的，实际上除了上述内容以外，我们还可能会遇到符号数学、逼近理论、图论、群论、拓朴以及不明集等。由于篇幅所限，加上本书是从工程角度来编写的，有些内容虽然很重要，但在工程控制中至今还应用较少，所以本书只能写到目前这样的地步，其它内容只好等以后有机会再作专题介绍。

藉本书出版的机会，作者特别感谢启蒙导师周春晖教授，在编写过程中和审阅本书时给予作者许多具体的指导和帮助。

因作者水平不高，书中错误肯定不少，欢迎读者批评指正。

目　　录

第一章　微分方程与差分方程

一、微分方程式

（一）概述

在控制理论中，微分方程是一种重要的数学工具，经常用以描述系统或者对象的动态特性。

1. 对象特性的描述举例

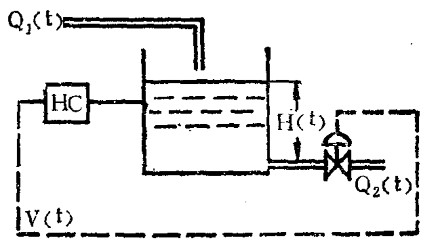

图 1-1　液位控制对象

例一　液位控制对象

根据物料平衡，列写液位变化微分方程式

$$C\frac{dH(t)}{dt}=Q_1(t)-Q_2(t) \tag{1-1}$$

式中　C为圆柱容器的截面积；$Q_1(t)$为输入流量，$Q_2(t)$为输出流量；$H(t)$为容器液位高度。

为了得到用增量表示的微分方程式，将$Q_1(t)$、$Q_2(t)$按泰勒级数展开，并取至一次项，得

$$Q_2(t)=\alpha\sqrt{H(t)}\approx\alpha\sqrt{H_0(t)}+\frac{1}{2}\alpha\frac{1}{\sqrt{H_0(t)}}\Delta H(t)$$

$$=Q_{20}(t)+\frac{\Delta H(t)}{R} \tag{1-2}$$

式中　$R=\frac{2\sqrt{H_0(t)}}{\alpha}$表示输出管道的流阻。

$$Q_1(t)=Q_{10}(t)+\Delta Q_1(t) \tag{1-3}$$

且知在稳态时

$$Q_{20}=Q_{10} \tag{1-4}$$

上述关系式代入原微分方程式得

$$C\frac{d\Delta H(t)}{dt}=\Delta Q_1(t)-\frac{\Delta H(t)}{R} \qquad (1\text{-}5)$$

记$h(t)=\Delta H(t)$，则式（1-5）可写成

$$T\frac{dh(t)}{dt}+h(t)=R\Delta Q_1(t)$$

式中 $T=RC$

例二 均匀调节系统

在化工生产过程中，经常用均匀调节系统来均衡液位与流量的关系，均匀调节系统如图 1-1 所示。为了研究系统的品质，需要列写其运动的微分方程式。系统的微分方程式由三个部分的微分方程式组成。

（1）描述对象特性的微分方程式

$$C\frac{d\widetilde{H}(t)}{dt}=Q_1-Q_2 \qquad (1\text{-}6)$$

式中 $\widetilde{H}(t)=H(t)-H_0(t)$ 代表实际液位同给定值的偏差。

（2）描述调节器特性的微分方程式：简单均匀调节系统一般用比例积分调节器，即

$$V(t)=K_P\left[\widetilde{H}(t)+\frac{1}{T_i}\int\widetilde{H}(t)dt\right] \qquad (1\text{-}7)$$

式中 T_i为调节器的积分时间；K_p为调节器的放大系数；$V(t)$为调节器的输出。

（3）描述调节阀特性的微分方程式

若选择线性特性的调节阀门，则有

$$Q_2(t)=K_vV(t)$$

$$=K\left[\widetilde{H}(t)+\frac{1}{T_i}\int\widetilde{H}(t)dt\right] \qquad (1\text{-}8)$$

式中 $K=K_vK_p$称为比例调节因素，K_v为线性阀门系数。

由式（1-6）、式（1-7）及式（1-8）可以求出

i）液位系统的状态变化微分方程式

$$\frac{T_iC}{K}\ \frac{d^2\widetilde{H}(t)}{dt^2}+T_i\frac{d\widetilde{H}(t)}{dt}+\widetilde{H}(t)=\frac{T_i}{K}\ \frac{dQ_1(t)}{dt} \tag{1-9}$$

ii) 流量系统的状态变化的微分方程式

$$\frac{T_iC}{K}\ \frac{d^2Q_2(t)}{dt^2}+T_i\frac{dQ_2(t)}{dt}+Q_2(t)=T_i\frac{dQ_1(t)}{dt}+Q_1(t) \tag{1-10}$$

从上述两个例子，可以看出线性微分方程式是经常用以描述系统或对象行为的一种数学方法。

2．线性微分方程式的定义

我们可以对微分方程式作一个定义：凡是表示函数与导数以及自变量间关系的方程式，都称为微分方程式。其中包含有偏导数的微分方程称为偏微分方程式，称满足下列条件的方程为线性微分方程式：

（1）不包含有偏导数；

（2）因变量及其导数的自乘幂均不超过1；

（3）不包含两个或两个以上因变量导数的乘积，或者因变量同其导数乘积。

普通n阶线性微分方程式记为

$$a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}(r(t))+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}(r(t))+\cdots+$$

$$+a_0(t)r(t)=f(t) \tag{1-11}$$

式中　f(t)为已知的强迫函数；r(t)为响应函数或因变量；a(t)为微分方程式的系数；f(t)、r(t)与a(t)为自变量t的函数。

3．微分方程算子及其性质

为使记式简化，定义一个微分方程算子L为

$$L\triangleq a_n(t)\frac{d^n}{dt^n}+a_{n-1}(t)\frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}}+\cdots+a_0(t) \tag{1-12}$$

因此，式（1-11）可写成

$$L(r)=f(t) \tag{1-13}$$