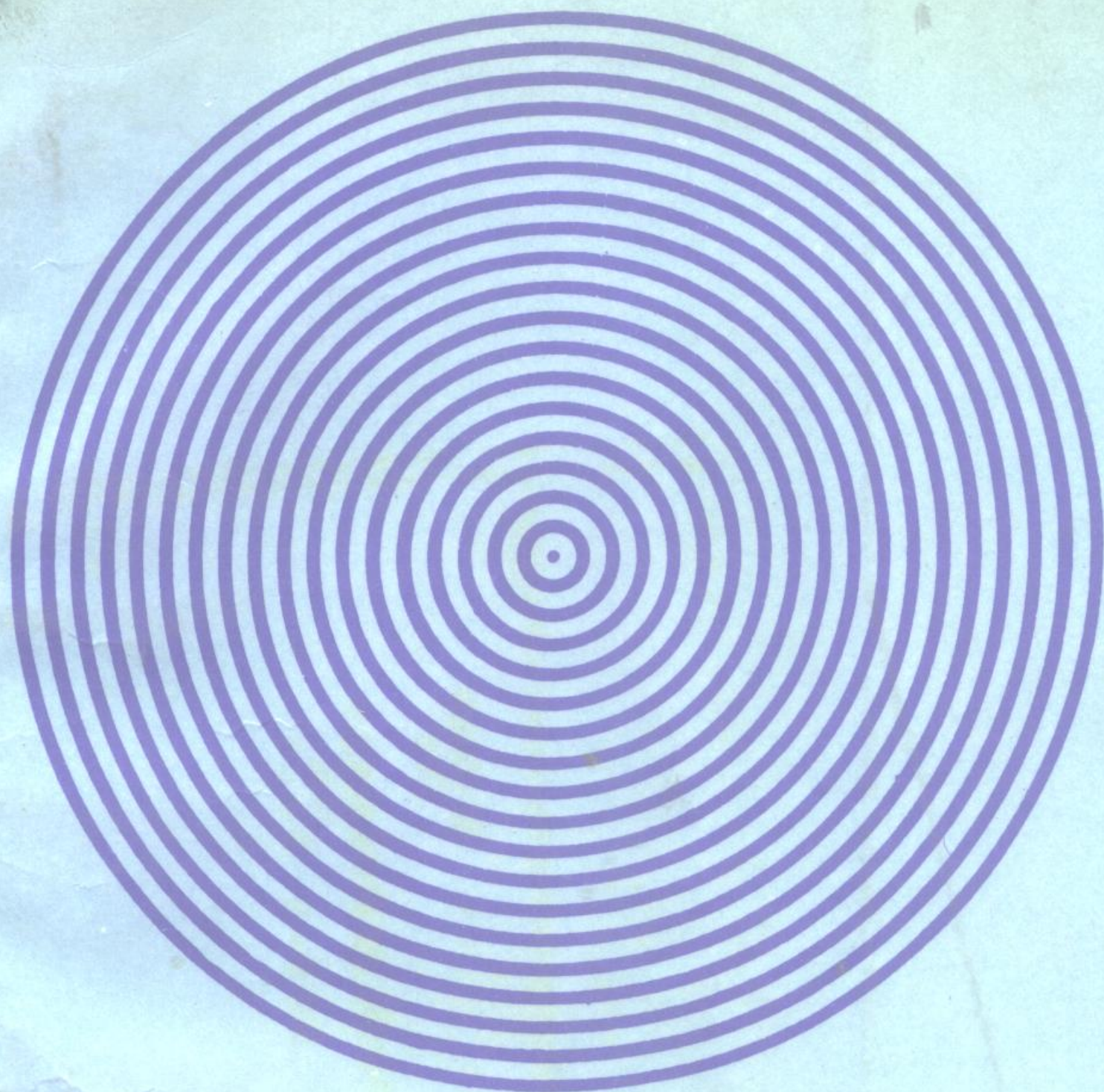




田自耘 郭素云 编著

计算机辅助陀螺稳定系统 分析与设计

哈尔滨工业大学出版社



U 666.12

T 71

计算机辅助陀螺稳定系统 分析与设计

田自耘 郭素云 编著

哈尔滨工业大学出版社

内 容 简 介

本书在作者多年为自动控制专业本科生和研究生授课的基础上编写而成，并包含了作者的科研成果。陀螺稳定系统是多变量控制系统。书中介绍了控制系统数字仿真原理、计算机辅助陀螺稳定系统计算和分析方法；结合多变量陀螺稳定系统的设计实例，对多变量控制系统现代频域设计理论、方法和计算步骤，计算机辅助陀螺稳定设计的软件包及其子程序的使用方法等内容都作了介绍。

本书可作为自动控制、陀螺导航、船电等专业研究生的教材和大专院校相关专业本科生教学参考书，亦可供有关工程技术人员参考。

DV10/25

计算机辅助陀螺稳定系统分析与设计

田自耘 郭素云 编著

*

哈尔滨工业大学出版社出版
新华书店首都发行所发行
哈尔滨工业大学印刷厂印刷

*

开本787×1092 1/16 印张9.625 字数222 000

1991年7月第1版 1991年7月第1次印刷

印数1—2 000

ISBN 7-5603-0320-X/TP·24 定价2.90元

出 版 说 明

根据国务院国发[1978]23号文件批转试行的“关于高等学校教材编审出版若干问题的暂行规定”，中国船舶工业总公司承担了全国高等学校船舶类专业教材的编审、出版的组织工作。自1978年以来，完成了两轮教材的编审、出版任务，共出版船舶类专业教材116种，对解决教学急需，稳定教学秩序，提高教学质量起到了积极作用。

为了进一步做好这一工作，中国船舶工业总公司成立了“船舶工程”、“船舶动力”两个教材委员会和“船电自动化”、“惯性导航及仪器”、“水声电子工程”、“液压”四个教材小组。船舶类教材委员会（小组）是有关船舶类专业教材建设的研究、指导、规划和评审方面的业务指导机构，其任务是为作好高校船舶类教材的编审工作，并为提高教材质量而努力。

中国船舶工业总公司在总结前两轮教材编审出版工作的基础上，于1986年制订了《1986年——1990年全国高等学校船舶类专业教材选题规划》。列入规划的教材、教学参考书等共166种。本规划在教材的种类和数量上有了很大增长，以适应多层次多规格办学形式的需要。在教材内容方面力求做到两个相适应：一是与教学改革相适应；二是与现代科学技术发展相适应。为此，教材编审除贯彻“打好基础，精选内容，逐步更新，利于教学”的原则以外，还注意了加强实践性教学环节，拓宽知识面，注重能力的培养，以适应社会主义现代化建设的需要。

这批教材由各有关院校推荐，同行专家评阅，教材委员会（小组）评议，完稿后又经主审人审阅，教材委员会（小组）复审。本规划所属教材分别由国防工业出版社、人民交通出版社以及各有关高等学校的出版社出版。

限于水平和经验，这批教材的编审出版工作还会有许多缺点和不足，希望使用教材的单位和广大师生积极提出宝贵意见，以便改进工作。

中国船舶工业总公司教材编审室

1988年3月

前 言

本教材根据中国船舶工业总公司 1987 年 715 教材会议评审通过的教材大纲编写而成。

陀螺稳定系统是多变量控制系统，回路间存在较强的关联性。工程实践中，通常采用单输入单输出的古典频域法进行系统设计，计算量大、设计周期长。

当前，由于计算机、计算技术的迅速发展和普及，促进了数字仿真，计算机辅助设计和数字控制等学科的迅速发展。而这些学科的知识和技术，对于优化及计算机辅助陀螺稳定系统的设计、缩短设计周期、提高经济效益是必不可少的。

为此，教材的前半部分，作为基础知识，对数字仿真的基本原理和计算机辅助控制系统的计算与分析方法，作了必要的介绍，试图形成一个计算机辅助陀螺稳定系统设计的新的教学体系。

英国学者罗森布洛克(Rosenbrock)的著名论文“应用逆奈奎斯特阵列法设计多变量系统”，利用多项式有理函数矩阵对角优势的概念，把一个多变量系统的设计转化为人们比较熟悉的单变量系统的设计问题。我们相应介绍了这一被称为现代频域法的内容，以作为对计算机辅助多变量控制系统设计的理论与应用、以及进一步深入探讨的基础。

教材中，列举了设计实例，供读者在阅读过程中进一步理解概念和作为设计方法的参考。

哈尔滨船舶工程学院四系程录副教授审阅了全部书稿，提出了许多宝贵意见，在此深表谢意。对于陀螺稳定系统应用多变量控制系统现代频域理论进行分析与设计还是首次尝试。由于作者水平和时间的限制，书中谬误、疏漏之处，敬请读者批评指正。

作 者

1989年6月于哈尔滨

目 录

第一章 陀螺稳定系统的数字仿真方法	(1)
§ 1-1 控制系统模型的相互转换	(1)
§ 1-2 面向微分方程的数字仿真	(3)
§ 1-3 结构图法数字仿真原理	(15)
§ 1-4 连续系统离散相似法数字仿真	(36)
§ 1-5 连续系统快速仿真方法	(44)
§ 1-6 双线性变换的计算机算法	(49)
§ 1-7 非线性系统的数字仿真	(59)
第二章 单轴陀螺稳定系统的设计指标及其分析	(68)
§ 2-1 单轴陀螺稳定系统	(68)
§ 2-2 单轴陀螺稳定系统的数学模型	(69)
§ 2-3 单轴陀螺稳定系统的方块图	(74)
§ 2-4 传动装置元件角刚度对系统性能的影响	(77)
§ 2-5 陀螺稳定平台漂移角速度的估算	(79)
§ 2-6 陀螺稳定系统提高精度的途径	(83)
§ 2-7 陀螺稳定系统的主要性能指标	(86)
第三章 计算机辅助陀螺稳定系统分析	(89)
§ 3-1 奈奎斯特稳定判据及其程序设计	(89)
§ 3-2 伯德 (Bode) 图法及其程序设计	(95)
§ 3-3 陀螺稳定系统校正环节的设计	(98)
第四章 陀螺稳定系统的数字仿真	(104)
§ 4-1 陀螺稳定系统的仿真模型	(104)
§ 4-2 在典型干扰力矩作用下陀螺稳定系统的动态特性	(107)
§ 4-3 在典型干扰力矩作用下陀螺稳定系统的数字仿真	(112)
第五章 陀螺稳定系统对输入随机信号的响应	(116)
§ 5-1 概述	(116)
§ 5-2 脉冲过渡函数	(116)
§ 5-3 线性系统输出的期望值和自相关函数	(117)
§ 5-4 系统输出的功率谱密度	(118)
§ 5-5 随机信号的产生	(120)
§ 5-6 动力陀螺稳定系统对随机输入信号的瞬态响应	(122)
第六章 多变量控制系统逆奈奎斯特阵列设计法及其应用	(125)
§ 6-1 引言	(125)

§ 6-2	多变量反馈系统结构形式和基本关系式·····	(125)
§ 6-3	有理函数矩阵的对角优势·····	(128)
§ 6-4	奈奎斯特阵列法稳定判据·····	(132)
§ 6-5	奈奎斯特阵列法的设计步骤·····	(133)
§ 6-6	多变量双轴陀螺稳定系统的频域分析和设计·····	(134)
第七章	附录 ·····	(142)
§ 7-1	多项式·····	(142)
§ 7-2	多项式矩阵及其运算·····	(143)
参考文献	·····	(145)

第一章 陀螺稳定系统的数字仿真方法

§ 1-1 控制系统模型的相互转换

陀螺稳定系统是一种连续的控制系統。这种控制系统的动态性能通常可用一组微分方程，或传递函数，或状态方程进行描述。下面就介绍这几种常用的方法以及它们之间的相互转换关系。

一、微分方程

通常，惯性系统是一连续系统，可用如下微分方程描述：

$$\begin{aligned} y^{(n)}(t) + a_{n-1}y^{(n-1)}(t) + \cdots + a_1\dot{y}(t) + a_0y(t) \\ = b_nu^{(n)}(t) + b_{n-1}u^{(n-1)}(t) + \cdots + b_1\dot{u}(t) + b_0u(t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

式中 $u(t)$ ——系统输入量；
 $y(t)$ ——系统输出量；
 $y^{(n)}(t)$ —— $y(t)$ 的 n 阶导数；
 $u^{(n)}(t)$ —— $u(t)$ 的 n 阶导数；
 a_i 、 b_i ——常系数。

当然式(1-1)也可写成算子形式。

二、传递函数

对式(1-1)两边取拉氏变换，并假设 $y(t)$ 、 $u(t)$ 及其各阶导数的初值均为零，则可得

$$W(s) = \frac{Y(s)}{u(s)} = \frac{b_ns^n + b_{n-1}s^{n-1} + \cdots + b_1s + b_0}{s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_1s + a_0} \quad (1-2)$$

式中 $u(s)$ ——输入量 $u(t)$ 的拉普拉斯变换；
 $Y(s)$ ——输出量 $y(t)$ 的拉普拉斯变换；
 $W(s)$ ——系统的传递函数。

三、状态方程和输出方程

若用状态变量表示，则式(1-1)又可表示为

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} \\ \dot{x}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_0 & -a_1 & -a_2 & \cdots & -a_{n-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_{n-1} \\ \beta_n \end{bmatrix} u \quad (1-3)$$

$$Y = (1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0 \ 0) \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{n-1} \\ x_n \end{bmatrix} + \beta_0(u)$$

式中 x_i —— 状态变量；

β_i —— 由 a_i 和 b_i 所确定的常数。

为了寻找出式 (1-1)、式 (1-2) 和式 (1-3) 之间的相互转换关系, 也就是为了获得 β_i 和 a_i 、 b_i 之间的关系式, 可将式 (1-3) 写成展开的形式, 有

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + \beta_1 u \\ \dot{x}_2 = x_3 + \beta_2 u \\ \vdots \\ \dot{x}_{n-1} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \dot{x}_n = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u \end{cases} \quad (1-4)$$

及 $Y = x_1 + \beta_0 u \quad (1-5)$

将式 (1-5) 从取其一阶导数, 一直取到 n 阶导数, 并将式 (1-4) 代入, 于是可得

$$\begin{cases} \dot{y} = \dot{x}_1 + \beta_0 \dot{u} = x_2 + \beta_1 u + \beta_0 \dot{u} \\ y^{(2)} = \dot{x}_2 + \beta_0 \ddot{u} = x_3 + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 \ddot{u} \\ \quad = x_3 + \beta_2 u + \beta_1 \dot{u} + \beta_0 \ddot{u} \cdots \cdots \cdots \\ y^{(n-1)} = \dot{x}_{n-1} + \beta_0 u^{(n-1)} = x_n + \beta_{n-1} u \\ \quad + \beta_{n-2} \dot{u} + \cdots + \beta_1 u^{(n-2)} + \beta_0 u^{(n-1)} \\ y^{(n)} = \dot{x}_n + \beta_0 u^{(n)} = -a_0 x_1 - a_1 x_2 - \cdots - a_{n-1} x_n + \beta_n u^{(n)} \\ \quad + \beta_{n-1} \dot{u} + \cdots + \beta_1 \dot{u}^{(n-1)} + \beta_0 u^{(n)} \end{cases} \quad (1-6)$$

再将式 (1-5)、式 (1-6) 从上到下依次乘以 $a_0, a_1, \cdots, a_{n-1}, 1$, 然后相加, 这时可得

$$\begin{aligned}
y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1\dot{y} + a_0y &= \dot{x}_n + a_{n-1}x_n + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1 \\
&+ \beta_0u^{(n)} + (\beta_1 + a_{n-1}\beta_0)u^{(n-1)} + (\beta_2 + a_{n-1}\beta_1 + a_{n-2}\beta_0)u^{(n-2)} \\
&+ \cdots + (\beta_{n-1} + a_{n-1}\beta_{n-2} + \cdots + a_2\beta_1 + \cdots + a_1\beta_0)\dot{u} \\
&+ (a_{n-1}\beta_{n-1} + \cdots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0)u
\end{aligned} \quad (1-7)$$

由式 (1-4) 中的最后一式看到

$$\dot{x}_n + a_{n-1}x_n + \cdots + a_1x_2 + a_0x_1 = \beta_n u$$

再由式 (1-1)、式 (1-7) 可得

$$\begin{aligned}
&b_n u^{(n)} + b_{n-1}u^{(n-1)} + b_{n-2}u^{(n-2)} + \cdots + b_1\dot{u} + b_0u \\
&= \beta_0u^{(n)} + (\beta_1 + a_{n-1}\beta_0)u^{(n-1)} + (\beta_2 + a_{n-1}\beta_1 + a_{n-2}\beta_0)u^{(n-2)} \\
&+ \cdots + (\beta_{n-1} + a_{n-1}\beta_{n-2} + \cdots + a_2\beta_1 + a_1\beta_0)\dot{u} \\
&+ (\beta_n + a_{n-1}\beta_{n-1} + \cdots + a_1\beta_1 + a_0\beta_0)u
\end{aligned} \quad (1-8)$$

考虑到等式两边 u 的同阶导数项系数应该对应相等, 于是得出

$$\begin{cases} \beta_0 = b_n \\ \beta_1 = b_{n-1} - a_{n-1}\beta_0 \\ \beta_2 = b_{n-2} - a_{n-1}\beta_1 - a_{n-2}\beta_0 \\ \dots\dots\dots \\ \beta_{n-1} = b_1 - a_{n-1}\beta_{n-2} - \cdots - a_2\beta_1 - a_1\beta_0 \\ \beta_n = b_0 - a_{n-1}\beta_{n-1} - \cdots - a_1\beta_1 - a_0\beta_0 \end{cases} \quad (1-9)$$

到此, 只要知道式 (1-1)、式 (1-2) 和式 (1-3) 中任意一组参数时, 则另两组参数即为已知。

§ 1-2 面向微分方程的数字仿真

面向微分方程的数字仿真主要用的是数值积分方法。我们将对几种常见的数值积分方法加以介绍。

一、数值积分方法

设某系统的数学模型可以表示为

$$\frac{d}{dt}x = f(x, t), \quad x(0) = x_0 \quad (1-10)$$

式中 x —— n 维状态向量, 其初始值为 x_0 ;

$f(x, t)$ —— n 维向量函数;

t ——时间变量。

现将 $x(t+h)$ 在时间 t 处按台劳级数展开, 则有

$$x(t+h) = x(t) + h \frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2!} \frac{d^2x}{dt^2} + \dots + \frac{h^n}{n!} \frac{d^{(n)}x}{dt^n} \quad (1-11)$$

式中 h —— 计算步长。

1. 欧拉法

这种方法的形式最简单, 即在式 (1-11) 中仅取一次项, 这时可得

$$x(t+h) \approx x(t) + h \frac{dx}{dt} = x(t) + hf(x, t) \quad (1-12)$$

这一算法虽然很简单, 但计算精度较低。式 (1-12) 中只取了式 (1-11) 的一次导数项, 而被舍弃的部分即为这一方法的截断误差, 很明显这一截断误差正比于 h^2 。显然若想提高这一方法的计算精度, 就必须减小计算步长 h 。这样一来就加大了计算工作量, 并且由于计算次数增多, 计算的舍入误差也必然随之增加。所以在精度要求较高的场合, 这一数值积分的方法很少被采用。现在举例说明欧拉法的具体运用。

例 1-1 试求 $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 1 \quad t \geq 0$ 的欧拉近似计算式。

解 $\ddot{x} + a_1\dot{x} + a_2x = 1$ 的状态方程为

$$\begin{aligned} x_1 &= x \\ \dot{x}_2 &= x_1 \\ \dot{x}_2 &= -a_1x_2 - a_2x_1 + 1 \end{aligned}$$

所以欧拉近似式为

$$\begin{aligned} x_2(n+1) &= x_2(n) + h[-a_1x_2(n) - a_2x_1(n) + 1] \\ x_1(n+1) &= x_1(n) + hx_2(n) \end{aligned}$$

2. 梯形法

我们取台劳展开式至二次导数项, 这时

$$\begin{aligned} x(t+h) &\cong x(t) + h \frac{dx}{dt} + \frac{h^2}{2} \frac{d^2x}{dt^2} \\ &= x(t) + hf + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^T} \frac{\partial x}{\partial t} \right) \\ &= x(t) + hf + \frac{h^2}{2} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x^T} f \right) \end{aligned} \quad (1-13)$$

令

$$\begin{aligned} K_1 &= f(x, t) \\ K_2 &= f(x + \alpha_0 h K_1, t + \beta_0 h) \end{aligned} \quad (1-14)$$

$$x(t+h) = x(t) + r_0 h K_1 + r_1 h K_2 \quad (1-15)$$

式中 α_0 、 β_0 、 r_0 和 r_1 —— 待定常数。

综合式 (1-14) 和 (1-15) 可得

$$x(t+h) = x(t) + r_0 h f(x, t) + r_1 h f(x + \alpha_0 h K_1, t + \beta_0 h) \quad (1-16)$$

再将 $f(x + \alpha_0 h K_1, t + \beta_0 h)$ 在 $f(x, t)$ 点展成台劳级数, 并取一次项, 得

$$f(x + \alpha_0 h K_1, t + \beta_0 h) \cong f(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t} \beta_0 h + \frac{\partial f}{\partial x} \alpha_0 h K_1 \quad (1-17)$$

将式 (1-14)、(1-17) 代入式 (1-16), 整理之后得到

$$x(t+h) = x(t) + (r_0 + r_1) h f + h^2 \left(r_1 \beta_0 \frac{\partial f}{\partial t} + r_1 \alpha_0 \frac{\partial f}{\partial x} f \right) \quad (1-18)$$

比较式 (1-13) 和 (1-18) 可得

$$\begin{cases} r_0 + r_1 = 1 \\ r_1 \beta_0 = \frac{1}{2} \\ r_1 \alpha_0 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1-19)$$

在上式中未知数多于方程数, 可以有多个解。我们取

$$\begin{cases} \alpha_0 = \beta_0 = 1 \\ r_0 = r_1 = \frac{1}{2} \end{cases} \quad (1-20)$$

代入式 (1-14) 和 (1-15), 可得

$$\begin{cases} K_1 = f(x, t) \\ K_2 = f(x + h K_1, t + h) \\ x(t+h) = x(t) + \frac{h}{2} (K_1 + K_2) \end{cases} \quad (1-21)$$

由于式 (1-13) 只取 h 、 h^2 两项, 而将 h^3 及其以上的高阶项忽略, 所以这种计算方法的截断误差正比于 h^3 。

3. 四阶龙格——库塔 (Runge-Kutta) 法

我们可以取台劳展开式四次项, 同上述方法相似, 不再详细推导, 只将其结果列写如下:

$$\begin{cases} K_1 = f(x, t) \\ K_2 = f\left(x + \frac{h}{2} K_1, t + \frac{h}{2}\right) \\ K_3 = f\left(x + \frac{h}{2} K_2, t + \frac{h}{2}\right) \\ K_4 = f(x + h K_3, t + h) \\ x(t+h) = x(t) + \frac{h}{6} (K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases}$$

或

$$\begin{cases} K_1 = hf(x, t) \\ K_2 = hf\left(x + \frac{K_1}{2}, t + \frac{h}{2}\right) \\ K_3 = hf\left(x + \frac{K_2}{2}, t + \frac{h}{2}\right) \\ K_4 = hf(x + K_3, t + h) \\ x(t+h) = x(t) + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4) \end{cases} \quad (1-22)$$

由于四阶龙格-库塔法的截断误差正比于 h^5 ，所以准确度高。但它每步积分要计算四次 $f(x, t)$ 的值，因而计算量增加。一般用于准确度要求较高的场合。

例 1-2 用四阶龙格-库塔法对

$$\frac{dy}{dx} = y - \frac{2x}{y} \quad y|_{x=0} = 1 \text{ 求解。}$$

解 令计算步长 $h = 0.2$ ，并有 $x_0 = 0$ ， $y_0 = 1$ ，而

$$\begin{aligned} K_1 &= 0.2\left(y_n - \frac{2x_n}{y_n}\right) \\ K_2 &= 0.2\left(y_n + \frac{K_1}{2} - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_n + \frac{K_1}{2}}\right) \\ K_3 &= 0.2\left(y_n + \frac{K_2}{2} - \frac{2(x_n + 0.1)}{y_n + \frac{K_2}{2}}\right) \\ K_4 &= 0.2\left(y_n + K_3 - \frac{2(x_n + 0.2)}{y_n + K_3}\right) \end{aligned}$$

则有
$$y_{n+1} = y_n + \frac{1}{6}(K_1 + 2K_2 + 2K_3 + K_4)$$

我们还不难算出本题的精确解，为

$$y(x) = \sqrt{1+2x}$$

现将计算结果列于表 1-1。

表 1-1

x_n	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1.0
y_n	1	1.1823	1.34167	1.48328	1.61251	1.73214
$y(x_n)$	1	1.18323	1.34164	1.48324	1.61245	1.73205

4. 四阶龙格-库塔法运行子程序

设有系统

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bu \\ Y &= CX\end{aligned}\quad (1-23)$$

式中 X —— n 维状态向量;

u ——输入纯量;

初始条件 $X(t_0) = X_0$ 。

为了便于编写计算程序, 现将式 (1-23) 写出其分量形式

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n + b_1u \\ \dot{x}_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n + b_2u \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ \dot{x}_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{nn}x_n + b_nu \end{cases} \quad (1-24)$$

其初始条件为

$$\begin{cases} x_1(t_0) = x_{10} \\ x_2(t_0) = x_{20} \\ \quad \quad \quad \cdots \quad \quad \quad \cdots \\ x_n(t_0) = x_{n0} \end{cases}$$

用四阶龙格-库塔法求出 n 个状态变量 $x_1, x_2, \cdots, x_n$ 的数值解, 每个状态变量又都要计算 n 步, 为此我们不妨假设

已知

$$\begin{cases} x_{1,n} \\ x_{2,n} \\ \vdots \\ x_{n,n} \end{cases}$$

求取

$$\begin{cases} K_{1,n} \\ K_{2,n} \\ K_{3,n} \\ K_{4,n} \end{cases} \quad \text{与} \quad \begin{cases} x_{1,n+1} \\ x_{2,n+1} \\ \vdots \\ x_{n,n+1} \end{cases}$$

我们知道状态变量 x_i 每计算一步都需要计算四个 K 值, 即 $K_{i1}, K_{i2}, K_{i3}, K_{i4}$ 。而第一个状态变量 $x_{1,n}$ 的第一个 K 值为

$$\begin{aligned}K_{11} &= f_1(t_n, x_{1n}, x_{2n}, \cdots, x_{nn} + b_1u) \\ &= a_{11}x_{1n} + a_{12}x_{2n} + \cdots + a_{1n}x_{nn} + b_1u\end{aligned}$$

将 $K_{21}, \cdots, K_{n1}$ 一并写成循环形式, 则有

$$\begin{cases} K_{11} = \sum_{l=1}^n a_{1l} x_{ln} + b_1 u \\ K_{21} = \sum_{l=1}^n a_{2l} x_{ln} + b_2 u \\ \dots \dots \dots \\ K_{n1} = \sum_{l=1}^n a_{nl} x_{ln} + b_n u \end{cases}$$

同理

$$\begin{cases} K_{12} = \sum_{l=1}^n a_{1l} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l1} \right) + b_1 u \\ K_{22} = \sum_{l=1}^n a_{2l} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l1} \right) + b_2 u \\ \dots \dots \dots \\ K_{n2} = \sum_{l=1}^n a_{nl} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l1} \right) + b_n u \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{13} = \sum_{l=1}^n a_{1l} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l2} \right) + b_1 u \\ K_{23} = \sum_{l=1}^n a_{2l} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l2} \right) + b_2 u \\ \dots \dots \dots \\ K_{n3} = \sum_{l=1}^n a_{nl} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l2} \right) + b_n u \end{cases}$$

$$\begin{cases} K_{14} = \sum_{l=1}^n a_{1l} (x_{ln} + h K_{l3}) + b_1 u \\ K_{24} = \sum_{l=1}^n a_{2l} (x_{ln} + h K_{l3}) + b_2 u \\ \dots \dots \dots \\ K_{n4} = \sum_{l=1}^n a_{nl} (x_{ln} + h K_{l3}) + b_n u \end{cases}$$

可进一步简化为

$$\begin{cases} K_{i1} = \sum_{l=1}^n a_{il} x_{ln} + b_i u \\ K_{i2} = \sum_{l=1}^n a_{il} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l1} \right) + b_i u \\ K_{i3} = \sum_{l=1}^n a_{il} \left(x_{ln} + \frac{h}{2} K_{l2} \right) + b_i u \\ K_{i4} = \sum_{l=1}^n a_{il} (x_{ln} + h K_{l3}) + b_i u \end{cases} \quad (1-25)$$

引入矢量

$$h_j = h(h_1, h_2, h_3, h_4)$$

$$j = 1, 2, 3, 4$$

$$\left\{ \begin{array}{l} h_1 = 0 \\ h_2 = \frac{h}{2} \\ h_3 = \frac{h}{2} \\ h_4 = h \end{array} \right.$$

綜上，可寫出如下通式：

$$K_{ij} = \sum_{l=-1}^n a_{il}(x_{ln} + h_j K_{l(j-1)}) + b_i u \quad (1-26)$$

$$l = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, 3, 4, \quad i = 1, 2, \dots, n$$

可见编写计算程序时有三个循环。

 n 个状态变量的四阶龙格-库塔法计算公式为

$$\left\{ \begin{aligned} x_{1,n+1} &= x_{1,n} + \frac{h}{6}(K_{11} + 2K_{12} + 2K_{13} + K_{14}) \\ x_{2,n+1} &= x_{2,n} + \frac{h}{6}(K_{21} + 2K_{22} + 2K_{23} + K_{24}) \\ &\dots \quad \dots \quad \dots \quad \dots \\ x_{n,n+1} &= x_{n,n} + \frac{h}{6}(K_{n1} + 2K_{n2} + 2K_{n3} + K_{n4}) \end{aligned} \right. \quad (1-27)$$

亦可写成

$$x_{i,n+1} = x_{i,n} + \frac{h}{6}(K_{i,1} + 2K_{i,2} + 2K_{i,3} + K_{i,4})$$

$$i = 1, 2, \dots, n \quad (1-28)$$

输出方程为

$$y = Cx \quad (1-29)$$

从上面已经明显看出, K_{ij} 的计算是四阶龙格-库塔法的基础。现将计算 K_{ij} 的程序框图 (图 1-1) 以及用 BASIC 语言编写出的当 $u(t)$ 为阶跃函数时计算 K_{ij} 的程序清单列写如下:

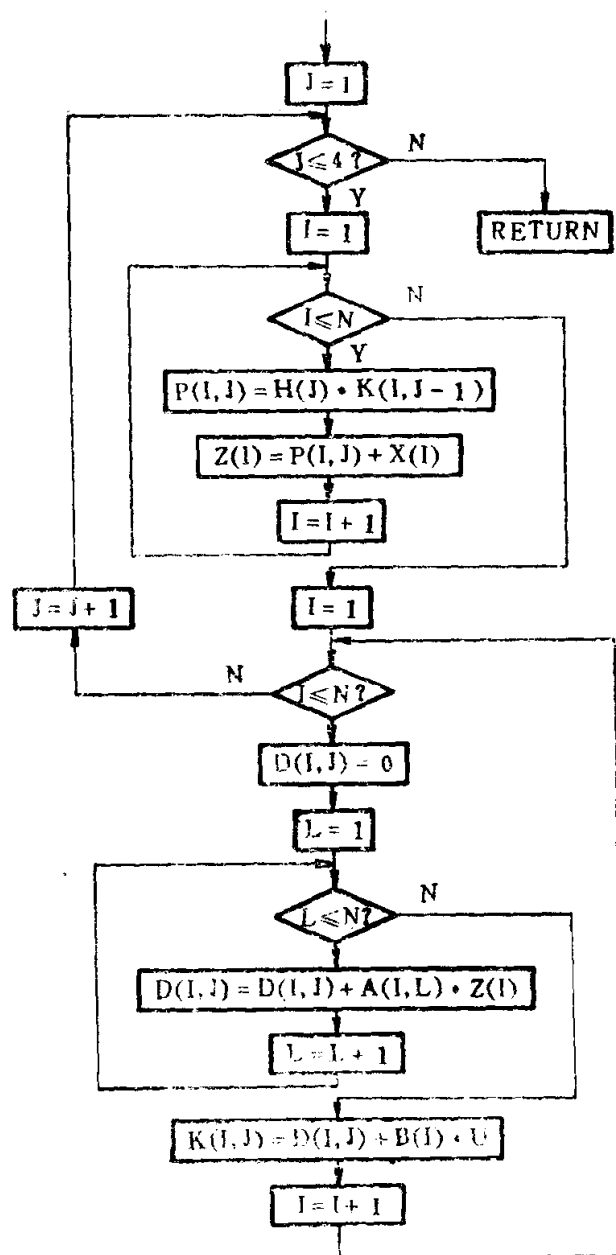


图 1-1 计算 K_{ij} 的程序框图

```

300 REM integrate subroutine
302 FOR J=1 TO 4
310 FOR I=1 TO N
315 P(I,J)=H(J)*K(I,J-1)
320 Z(I)=P(I,J)+X(I)
325 NEXT I
330 FOR I=1 TO N
335 D(I,J)=0
340 FOR L=1 TO N
345 D(I,J)=D(I,J)+A(I,L)*Z(L)
350 NEXT L
355 K(I,J)=D(I,J)+B(I)*U

```