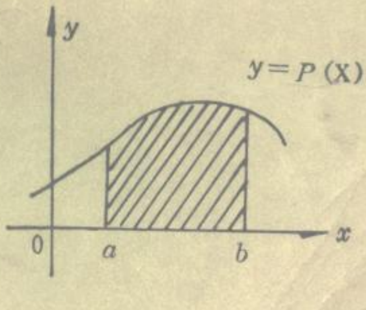
成人高等学校教材

概率论与数理统计初步



北京出版社

成人高等院校教材

概率论与数理统计初步

北 京 出 版 社

成人高等学校教材

概率论与数理统计初步

*

北 京 出 版 社 出 版

(北京崇文门外东兴隆街51号)

新华书店北京发行所发行

北 京 京 辉 印 刷 厂 印 刷

*

787×1092 毫米　32开本　5.625 印张　122,000字

1986 年 3 月第 1 版　1986年 3 月第 1 次印刷

印数：1—9,400

书号：7071·1102　定价：0.90元

前　言

这套教材包括微积分、线性代数与线性规划初步、概率论与数理统计初步三册．是根据北京市成人教育局制定的财经类大专院校高等数学教学纲要的精神，由北京市成人教育学院数学组主持，由北京市财贸管理干部学院、机械局职工大学等院校教师编写的．可作为经济类职工（干部）大专院校基础数学教学用书，也可作为经济工作者自学用书．

本书《概率论与数理统计初步》介绍了与企业管理有关的概率论和数理统计的基本知识，以及正交实验的的基本原理（其中有些内容画有＊号，可以选学或不学）．

本书是由王光兆、楚建儒执笔．在编写时，吸取了本市职工大学的一些教师的宝贵意见，在此特别表示感谢．

由于时间和水平所限，缺点在所难免，敬希批评指正．

北京市成人教育学院编

一九八五年十二月

目　录

第一章　随机事件与概率

在自然界及人们的实践活动中，大体存在着两种现象．一种是必然现象，例如在标准大气压下，水在100℃时会沸腾；物体在重力作用下自由下落；人造天体脱离火箭时的速度达到7.9公里/秒（第一个宇宙速度）时，它就可以围绕地球转动等等．另一种现象是偶然现象，例如抛掷一枚硬币，可能出现正面*向上或背面向上；一段时间内某种货物的销售量不是一个定值等等．这些现象都带有偶然性，事先不能肯定．这就是偶然现象，也叫做随机现象．概率论与数理统计就是研究随机现象的统计规律的数学学科．

§1.1　随机事件

在研究随机现象的规律时，必须做多次“试验”或“观测”，我们把它们统称为“试验”．在试验中可能出现的每一个结果叫做事件．

在一次试验中可能发生，也可能不发生，而在大量的试验中具有某种规律性的事件叫做随机事件（或偶然事件），简称事件．记作A，B，C，…．例如：

1．投掷一枚硬币，“正面朝上”记作A，是一个随机事件．

2．100个产品中有5个废品，从中任取3个，A=“3

*硬币的国徽面为正面。

个都是废品”，$B=$“3个都是正品”，$C=$“至少1个废品”，这里A、B、C都是随机事件.

3. 一射手向某目标射击，$A=$“击中”，$B=$“没有击中”，A，B都是随机事件.

4. 掷骰子，可能出现“一点”，“二点”，…“六点”均为随机事件.

在一次试验中一定发生的事件叫做**必然事件**，记为 Ω. 例如三个产品中有两个次品，从中任取两个，“至少有一个次品”是必然事件.

在一次试验中，不可能发生的事件叫做**不可能事件**. 记作$\varnothing$. 例如，100个产品中有5个次品，从中任取10个，“都是次品”是不可能事件.

以后我们所说的事件，都是指的随机事件，为了方便，我们把必然事件和不可能事件都看做特殊的随机事件.

在随机事件中，大家必须搞清楚什么是基本事件.

例如，投掷两枚硬币，可能出现的事件有：$A=$“上上”（就是两个都正面朝上），$B=$“下下”，$C=$“上下”，$D=$“下上”. 如果事件$E=$“至少一个朝上”，$F=$“一个朝上，一个朝下”，那末事件E包括事件“上上”、“上下”、“下上”，而事件F包括两个事件“上下”、“下上”. 我们把由几个事件组成的事件叫做**复合事件**. 而不可分的事件叫做**基本事件**. 这里事件A、B、C、D是基本事件，事件E、F是复合事件.

所有基本事件的集合叫做**基本事件空间**（或**样本空间**）.

例如，从放有红、白、黑三个球的口袋中，随机取出一个球，取后放回，再取出一个. 在这个试验中，基本事件是

"红红"、"红白"、"红黑"、"白白、"白黑"、"白红"、"黑红"、"黑白"、"黑黑"，共有九个基本事件. "出现黑球"这个事件是复合事件，它包括五个基本事件.

§1.2 事件的关系及运算

在一个试验中，有许多不同的事件发生，它们之间有一定的联系，存在着这样或那样的关系. 只有搞清楚事件之间的关系，才能进一步去研究比较复杂的事件.

（一）事件的包含

如果事件 A 发生，必然导致事件 B发生，则称事件B包含事件A，或称事件A被事件B包含. 记作$B\supset A$，或$A\subset B$.

例如，投掷两枚硬币，设$A=$"两个正面朝上"；$B=$"至少一个正面朝上"，包括"上上"、"上下"、"下上"，则

$$A\subset B.$$

（二）事件的相等

如果有$A\subset B$，并且$B\subset A$，则称事件A与事件B相等（等价），记作$A=B$.

例如，投掷两枚硬币，设$A=$"上上"，$B=$"无下"，则

$$A=B.$$

（三）事件的和（并）

设有两个事件A、B，事件"A和B至少一个发生"叫做事件A与B的和（并），记作 $A+B$（或$A\cup B$）.

例如，某人打靶，设 $A=$"击中4～6环"，$B=$"击中5～7环"，则$A+B=$"击中4～7环".

又如，十个产品中有二个次品，从中任取二个，设A=“有一个次品”，B=“有二个次品”，则$A+B$=“至少一个次品”

（四）事件的积（交）

设有两个事件A、B，事件“A发生并且B发生”叫做事件A与B的积（交），记作AB（或$A\cap B$）.

例如，设A=“击中4～5环”，B=“击中5～7环”，则AB=“击中5环”.

又如，设“甲去开会”，B=“乙去开会”，C=“丙去开会”，则ABC=“三个人都去开会”.

（五）事件的逆

对于事件A，在事件空间中，事件“A不发生”叫做事件A的逆（对立事件），记作$\overline{A}$.

由定义不难看出（$\overline{\overline{A}}$）$=A$. 所以A与$\overline{A}$互为逆事件（互为对立事件）. 它们不能同时发生，并且至少发生一件. $\overline{A}$是由基本事件空间里，不包含在A中的所有基本事件组成的，所以，显然有$A+\overline{A}=\Omega$. $A\overline{A}=\varnothing$. 例如：

1. 掷骰子，设A_i表示出现“i点”，$i=1$，2，3，4，5，6.则

$$\overline{A_1}=A_2+A_3+A_4+A_5+A_6.$$

2. 掷两枚硬币，设A=“至少一个正面朝上”，则$\overline{A}$=“没有一个正面朝上”.

（六）事件的差

设有两个事件A、B，事件“A发生但B不发生”叫做事件A与B的差，记作$A-B$.

例如，掷两枚硬币.设A=“至少一个正面朝上”，B=“两个正面都朝上”，C=“一个正面朝上”.则

$$A-B=C.$$

（七）互不相容事件

设有两个事件A、B，如果A、B不能同时发生，即若A发生，则B就不发生；或若B发生则A就不发生，则称**事件A、B互不相容**．例如：

1．掷骰子，“出一点”与“出两点”是互不相容的．

2．10个产品中有2个次品，从中任取5个．“都是正品”与“有一个次品”是互不相容的．

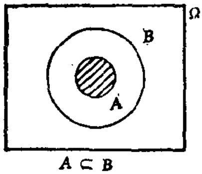
对于n个事件A_1，A_2，…，A_n，如果它们两两互不相容，则称这n个事件是不相容的．

显然，两个对立事件一定是互不相容的，但是两个互不相容的事件不一定是对立事件．

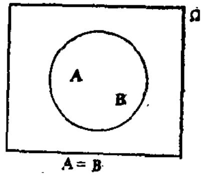
例如从一批产品中任意抽取一件，设A=“是合格品”，B=“是次品”，C=“是优等品”，则事件A与B是对立事件，也是互不相容的，而B与C是互不相容的事件，但它们不是对立事件．

对于事件A与B，如果它们是互不相容的，一定满足$AB=\varnothing$；如果它们是对立的，除满足$AB=\varnothing$外，还应该满足$A+B=\Omega$.

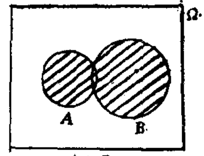
以上介绍了事件的四种关系和三种运算，为了更清楚的理解它们，可用下面图形来表示．



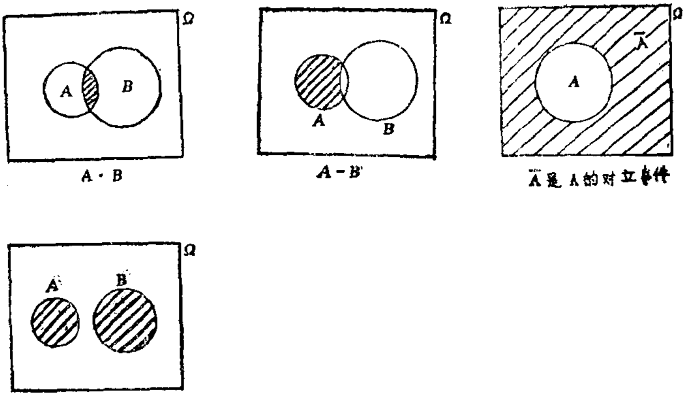
$A\subset B$



$A=B$



$A+B$



$A\cdot B$　　$A-B$　　$\bar{A}$是A的对立事件

A、B互不相容

图 1-1

例 1　设A_1、A_2、A_3分别表示第一人、第二人、第三人击中目标，那么事件$A_1A_2A_3$，$A_1+A_2+A_3$，$\overline{A_1A_2A_3}$，$\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}$，$\overline{A_1+A_2+A_3}$，$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}$，分别表示什么意思？

解：$A_1A_2A_3=$"三人都击中"；

$A_1+A_2+A_3=$"三人至少有一人击中"；

$\overline{A_1A_2A_3}=$"不是三人都击中"="三人至少有一人没击中"；

$\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}=$"三人至少一人没击中"；

$\overline{A_1+A_2+A_3}=$"三人都没击中"（是三人至少有一人击中的对立事件）；

$\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3}=$"三个人都没击中"

从此例中可以得出

$$\overline{A_1+A_2+A_3}=\overline{A_1}\,\overline{A_2}\,\overline{A_3};$$

$$\overline{A_1A_2A_3}=\overline{A_1}+\overline{A_2}+\overline{A_3}.$$

（八）事件的运算规律

1. $A+B=B+A$ （加法交换律）；

2. $A+(B+C)=(A+B)+C$ （加法结合律）；

3. $A+A=A$；

4. $AB=BA$ （乘法交换律）；

5. $A(BC)=(AB)C$ （乘法结合律）；

6. $AA=A$；

7. $A(B+C)=AB+AC$ （乘法分配律）；

8. $\overline{A+B}=\overline{A}\ \overline{B}$ （对偶律）；

9. $\overline{AB}=\overline{A}+\overline{B}$ （对偶律）；

10. $A\Omega=A$，$A\varnothing=\varnothing$.

这里只说明7，左边为$A(B+C)$，它表示“A发生”，并且“B发生或C发生”．也就是“A发生且B发生或A发生且C发生”，这刚好是右边的事件$AB+AC$．其他的运算规律可类似说明．

§1.3 古典概型

我们知道，在一次试验中（或在一定的条件下），可能出现不同的事件，且每个事件发生的可能性也不尽相同．例如，袋中有两个红球，一个白球，随机地抽取一个，“抽到红球”的可能性比“抽到白球”的可能性大，因此某个随机事件是否发生，这是偶然的，但它发生的可能性大小却是固有的，实践告诉我们，随机事件发生的可能性大小可以用一个数值来表示．

表示随机事件发生的可能性大小的数值，叫做事件的**概率**．事件A的概率记为$P(A)$．

古典概型 设试验的一切基本事件有n个，它们发生的可能性是相同的(等可能性)，如果事件A包含k个基本事件，

则事件A发生的概率定义为：$P(A)=\frac{k}{n}$. 从这个公式可以看出，$0\leqslant P(A)\leqslant 1$.

例 1 投掷一枚均匀的硬币，求事件"正面朝上"的概率.

解：因为试验包括两个等可能的基本事件. 设"正面朝上"为事件A，它只有一个基本事件. 所以$P(A)=\frac{1}{2}$.

例 2 投掷两枚硬币，求"两个上"和"至少一个上"的概率.

解：本题基本事件总数为4，有"上上"、"下下"、"上下"、"下上"，它们发生的可能性相同. 设A="两个上"，B="至少一个上"，

则
$$P(A)=\frac{1}{4},\qquad P(B)=\frac{3}{4}.$$

例 3 盒中有5个球，三个白球，二个黑球. 从中任取两个，求"两个都是白球"的概率.

解：从5个球中任取两个，一共有$C_5^2=10$种不同的取法，它们出现的机会相同，所以基本事件总数为10，抽到"两个白球"的取法有$C_3^2=3$种，它包含三个基本事件，设所求事件为A，则$P(A)=\frac{3}{10}$.

例 4 在50个产品中有5个次品，从中任取3个，问"三个都是正品"、"三个都是次品"、"二个正品一个次品"的概率各是多少？

解：从50个产品中，每次取3个共有C_{50}^3种取法，设"3个都是正品"为A有C_{45}^3种取法，"三个都是次品"为B有

C_5^3种取法，“二个正品1个次品”为C有$C_{45}^2\cdot C_5^1$种取法，所以

$$P(A)=\frac{C_{45}^3}{C_{50}^3}=\frac{\frac{45\cdot 44\cdot 43}{3\cdot 2\cdot 1}}{\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0.72;$$

$$P(B)=\frac{C_5^3}{C_{50}^3}=\frac{5\cdot 4\cdot 3}{50\cdot 49\cdot 48}\approx 0.00051;$$

$$P(C)=\frac{C_{45}^2\cdot C_5^1}{C_{50}^3}=\frac{\frac{45\cdot 44\cdot 5}{2\cdot 1}}{\frac{50\cdot 49\cdot 48}{3\cdot 2\cdot 1}}\approx 0.25.$$

对于一般的情况，设有N个产品，其中有M个次品，从中任取n件，则其中有m个次品的概率为$\frac{C_M^m\cdot C_{N-M}^{n-m}}{C_N^n}$.

例5　10个产品中，8个正品，2个次品．从中任取三个，问“恰有一个次品”和“至少一个次品”的概率各是多少．

解：$P(\text{“恰有一个次品”})=\frac{C_8^2\cdot C_2^1}{C_{10}^3}=\frac{\frac{8\cdot 7}{2}\cdot 2}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2\cdot 1}}$

$$=\frac{7}{15}\approx 0.47;$$

$$P(\text{“至少一个次品”})=\frac{C_2^1C_8^2+C_2^2C_8^1}{C_{10}^3}=\frac{\frac{2\cdot 8\cdot 7}{2}+8}{\frac{10\cdot 9\cdot 8}{3\cdot 2}}$$

$$=\frac{8}{15}\approx 0.53\ .$$

例 6　在20个人中，有两名组长，现在把20人随机分成两组，每组10人，问两组中各有一名组长的概率为多少？

解：设事件A=“两组中各有一名组长”

所以
$$P(A)=\frac{C_2^1C_{18}^9}{C_{20}^{10}}=\frac{2\cdot\dfrac{18!}{9!(18-9)!}}{\dfrac{20!}{10!(20-10)!}}$$

$$=\frac{2}{\dfrac{20\cdot 19}{10\cdot 10}}=\frac{10}{19}\approx 0.53\ .$$

例 7　从1，2，3，4，5五个数码中可重复地取出3个数码，按顺序排成一排，求下列事件的概率：

A=“3个数码全相同”；

B=“3个数码都不同”；

C=“3个数码不全同”．

解：从五个数码中可重复地取三个数码，按顺序排列，这是一个可重复选排列问题，所以基本事件总数为$5^3=125$.

事件A包括五个基本事件，所以$P(A)=\frac{5}{125}=\frac{1}{25}=0.04$；

如果3个数码都不同，这是一个无重复的选排列．事件B包括$P_5^3=5\times 4\times 3=60$种取法，所以$P(B)=\frac{60}{125}=\frac{12}{25}$

$$=0.48;$$

“三个数码不全同”这个事件包括$(5^3-5)=120$个基

本事件. 所以$P(C)=\frac{120}{125}=0.96$.

古典概型的特点是：

（1）每次试验只有有限个基本事件；

（2）这些基本事件的发生是等可能的.

这种概型之所以称为古典概型，是因为古典的概率论最早正是从这种简单场合发展起来的，直到现在，这种方法在概率的计算中仍然起着相当重要的作用，并有广泛的应用.

§1.4 概率的统计定义

在古典概型中给出了一种简便的求概率的方法. 但是在实践中还有许多问题不能用古典概型计算. 例如求一台机床生产的产品的次品率，产品为多少不确定，即基本事件个数是不定的；还有的基本事件的发生也不是等可能的，例如，在某一时刻，来到商店的顾客数是“5个”，“6个”，…，这些事件发生的可能性不相同. 但是在大量的试验中是有规律的，所以我们可以通过多次试验找出它们的规律.

我们把n次试验中，事件发生的次数k和n的比值叫做事件的相对频率（简称频率），即

$$\text{频率}=\frac{\text{该事件发生的次数}\,k}{\text{试验总数}\,n}.$$

例如，我国某地区某年关于出生婴儿数的一份统计资料如下：