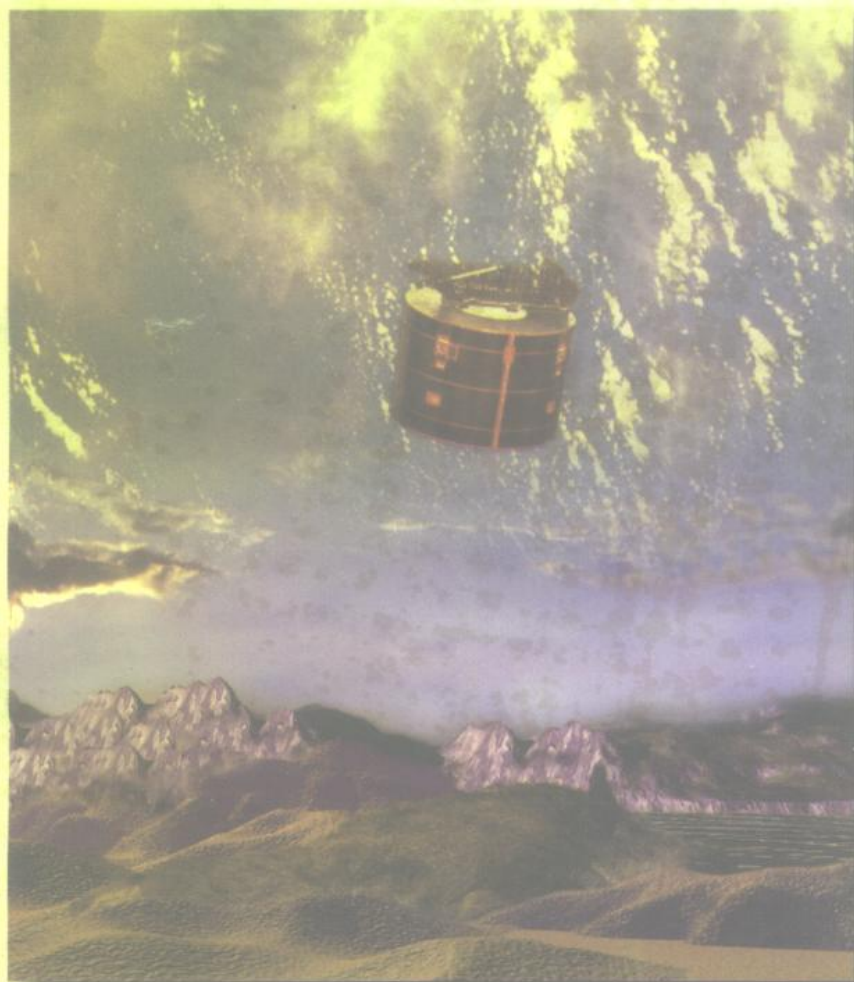


现代控制 理论基础

主编 武俊峰 主审 刘志东



哈尔滨工程大学出版社

现代控制 理论基础

第二版



清华大学出版社

0231
W83

425436

现代控制理论基础

主 编 武俊峰
副主编 孙晓波 荣盘祥
主 审 刘志东

哈尔滨工程大学出版社

内 容 简 介

本书系统地介绍了线性控制系统的基本理论和基本方法。全书共五章。第一章介绍动力学系统的数学描述,主要介绍状态空间描述。第二章介绍状态方程的求解。第三章介绍了控制系统稳定性分析的李亚普诺夫方法。第四章分别从时域和频域的观点出发,详细分析了动力学系统的基本特性。第五章结合一些典型的工程控制问题,介绍控制系统的近代综合技术以及一些重要而普遍的基本控制原理。

本书可以作为自动控制、工业自动化专业本科生“现代控制理论”课教材,也可以为自动化工程技术人员学习现代控制理论和技术提供参考。

DY69/13

现代控制理论基础

Xiandai kongzhi lilun jichu

主 编 武俊峰

主 审 刘志东

责任编辑 陈晓军

哈尔滨工程大学出版社出版发行

哈尔滨市南通街145号哈工程大学11号楼

发行部电话(0451)2519328 邮编:150001

新华书店经销

哈尔滨理工大学印刷厂印刷

开本:787×1092毫米 1/16 印张:16.375 字数:370千字

1998年2月第1版 1998年2月第1次印刷

印数:1~1000册

ISBN 7-81007-837-2

TP·72 定价:20.00元

前 言

目前,几乎所有的工科院校中的自动控制、工业自动化专业的本科生都开设了“现代控制理论”课,已出版的有关这门课的教材也为数不少,这些教材都包含了现代控制理论的主要内容。但是,由于该门课程学时的限制(50~60学时),学习现代控制理论的全部内容是不可能的,而只能重点学习近代线性控制理论的基础部分。况且有些内容,如系统辨识、最优控制、最佳估计等已单设了必修或选修课。结果,已出版的某些教材从内容上看就有些繁冗。因此,根据本科学生的特点,提供一部适合其学习的教材,就是编写者们在编写这部教材之前和过程中的基本出发点。

鉴于现代控制理论基础——线性控制理论内容的丰富与广泛,并涉及到近代数学的许多分支,故尽量减少数学推导,突出工程控制问题,更多地注重理论的工程意义将是本书的特点之一。书中将避免追求数学证明的完整性和严密性,尽量不涉及高深的数学概念,着重于逻辑推理和明确的物理概念,并通过一些常见的工程控制问题来阐明理论的应用。但是,学习本门课程所需的数学基础仍然是必不可少的,为了便于读者查阅,在书后的附录 I、II、III 中扼要地引录了有关线性代数、多项式矩阵理论及二次型等基本知识。读者只要掌握了这部分知识,就能顺利地学习本书的内容。

本课程计划教学时间为 56 学时,可以讲授本书内容的 90%左右,注有“*”号的章节可以略去或只作概要的介绍,留给有兴趣的读者自学。

本书由哈尔滨理工大学自动控制教研室的同志编写。具体分工是:孙晓波编写第一、第二章,荣盘祥编写第三章,武俊峰编写绪论、第四章、第五章和附录。全书由武俊峰任主编,由哈尔滨理工大学副校长刘志东教授任主审。

本书在编写及出版过程中,得到了哈尔滨工程大学出版社陈晓军、哈尔滨理工大学教务处段永成及哈尔滨理工大学自动控制教研室全体教师的热心支持和帮助,作者向他们表示衷心的感谢。

由于时间仓促,加之作者水平有限,书中遗漏及不当之处在所难免,敬请读者批评指正。

编者

1998年1月

目 录

0	绪 论	1
0.1	控制理论的发展与完善	1
0.2	现代控制理论的主要内容	2
0.3	本书的主要内容	4
1	线性控制系统的状态空间描述	5
1.1	概 述	5
1.2	系统的状态空间描述	5
1.3	非线性状态方程的线性化	11
1.4	由状态空间描述求传递函数矩阵	13
1.5	状态方程的规范形式	17
1.6	化输入-输出描述为状态空间描述	30
1.7	组合系统的状态空间描述	43
1.8	离散系统的状态空间描述	47
	习 题	50
2	线性控制系统的运动分析	55
2.1	概 述	55
2.2	线性定常系统的自由运动	55
2.3	矩阵指数 e^{At} 的计算方法	58
2.4	线性定常系统的强迫运动	62
2.5	线性时变系统的运动分析	66
2.6	线性连续系统的离散化	73
2.7	线性离散系统的运动分析	80
	习 题	84
3	控制系统的稳定性分析	87
3.1	概 述	87
3.2	系统的稳定性及李亚普诺夫第一方法	87
3.3	李亚普诺夫第二方法	90
3.4	李亚普诺夫方程解法举例	107
	习 题	110
4	线性系统的能控性与能观测性	112
4.1	概 述	112
4.2	系统的能控性及其判据	116
4.3	系统的能观测性及其判据	124

4.4	基于对角型或约当型的能控性、能观测性判据	129
4.5	离散系统的能控性与能观测性.....	132
4.6	系统的能控性、能观测性和传递函数矩阵	136
4.7	能控规范型和能观测规范型.....	144
4.8	能控性与能观测性的对偶原理.....	153
4.9	线性系统的标准分解.....	154
4.10	最小实现	166
	习 题	168
5	线性定常控制系统的综合	172
5.1	概 述.....	172
5.2	状态反馈和输出反馈.....	173
5.3	单输入-单输出状态反馈系统的极点配置法	176
*5.4	多输入-多输出系统状态反馈的极点配置法	193
5.5	状态观测器.....	200
*5.6	渐近跟踪、干扰阻塞及鲁棒控制	213
	习 题	226
	附录.....	230
	参考文献.....	255

0 绪 论

0.1 控制理论的发展与完善

控制理论的发展历史,亦是线性控制理论的发展历史。它基本上可分为两个阶段,即古典控制理论与现代控制理论。

0.1.1 古典控制理论

概括地说,古典控制理论主要包括一个核心概念——传递函数,两个基本方法——频率响应及根轨迹法。原则上它们只适合用来对单输入-单输出控制系统进行分析、综合与设计。

17世纪瓦特(Watt)飞锤控制器的应用,可以看成是自动控制学科发展的起点。到了19世纪后半叶,虽然自动控制技术已取得了许多重大的进展,例如到1870年,已经在闭环系统中应用完善的PID控制;与此同时,反馈原理也开始用于笨重机械——伺服机械的控制;但是在控制理论方面却进展迟缓。直到本世纪20年代,常微分方程及稳定性代数检验方法仍然是控制工程师的唯一分析工具。控制理论进一步发展的关键性转机来自另一个重要的技术领域——通讯工程。1932年奈奎斯特(Nyquist)的《再生理论》一文,开辟了频域法的新途径。经过大约10年的时间,控制理论的微分方程法几乎完全被频域法所取代。

第二次世界大战期间,由于战争对高性能伺服机构(如火炮系统)的迫切要求,促使反馈控制系统的设计与研制有了很大的进展。战后,武器系统中的经验和方法向社会公开,导致迅速地把频域法推广应用于机械、航空、航海、化工等的控制问题,并产生了统一的单变量反馈控制理论。随后,1948年伊万思(Evans)的根轨迹法,又给予频域法以重要补充。因此,到了本世纪50年代,古典的频域法在自动控制领域中已占据了统治地位,完全改变了20年代那种时域法不可挑战的局面,从而构成了控制理论发展的第一阶段。

0.1.2 现代控制理论

促使古典控制理论向现代控制理论发展的主要因素有两个:

(1)科学技术及生产的发展,特别是空间技术的发展(飞船和卫星的发射、导航、跟踪等),一方面使控制系统变得越来越复杂(如时变、非线性、特别是多变量系统),另一方面对控制系统的性能要求也越来越高,这就要求对控制系统做更深入更详尽的研究。古典频域法显然已不能适应这一需要,因此急需发展一种新的理论和方法。

(2)50年代后期,数字计算机的出现和发展,也为控制理论新的发展创造了必要的条件,它使得人们有可能对复杂控制系统做深入细致的研究。接着微型计算机技术的迅猛发展,并直接进入控制系统,又为实现各种各样的复杂的控制方案提供了可能性。因此可以说,现代控制理论的出现,是60年代人类探索空间的需要及计算机技术飞速发展和普及的产物。

50年代中、后期,空间技术开始发展,原苏联和美国都竞相进行大量研究。这时遇到的

控制系统大多是多变量系统,且被控设备的数学模型往往可以根据力学的原理,通过对其物理机理的分析来获得,其数学表达式为一组高阶微分方程。

早在1844年,莫格诺(Moigno)就证明了 n 阶微分方程可以化为一阶微分方程组;1892年,坡恩克(Poincare)指出用一阶微分方程组描述动态系统的深刻意义。于是,到了60年代前后,这种描述方法便成为当时空间技术控制工程师采用的标准方法,统称为状态空间法,并于1960年在美国自动控制联合会第一届年会上首次提出“现代控制理论”这个名称。因此,这时候的现代控制理论与状态空间法几乎是同义的,并一直沿用至今。在状态空间法发展初期,具有重要意义的是庞特里亚金(Понтрягин)的极大值原理、贝尔曼(Bellman)的动态规划理论和卡尔曼(Kalman)的最佳滤波理论,有人把它们作为现代控制理论的起点。

状态空间法的出现,标志着自动控制学科的发展进入了一个新的阶段,并以一个成熟的科学体系面貌出现。在这期间,一个最具代表性的问题是LQG最优问题,美国IEEE会刊1971年曾为LQG最优问题出了专辑,表明这一问题已达到了相当成熟的地步。LQG这一套理论用来解决空间技术控制系统的问题,实践证明是非常成功的,并对空间技术做出了重要贡献。但是,当人们试图把它推广用来解决工业控制的问题时,却遇到了不少困难,主要有:

- (1)对于工业设备,不易获得比较精确的数学模型;
- (2)难于承受工业生产中各种不利因素的影响;
- (3)对控制系统的性能要求不易形成最优控制的性能指标。

因此,一方面状态空间法在继续发展着,另一方面,从60年代末期开始,人们又重新对频域法发生了兴趣。适用于单变量系统的古典控制理论在长期的工业控制实践中,证明了它是相当有效而简单的。人们自然会想到,能否把它发展成为适合于多变量控制系统的所谓近代频域法呢?答案是肯定的。在这方面首先进行系统性研究的是英国的罗森布劳克(Rosenbrock)。于是,状态空间法、近代频域法各自独立地、互相渗透地、同时地沿着几个研究方向迅速展开。概括地说,除状态空间法外,目前主要尚有:

(1)代数方法 它主要是在探索状态空间描述与频率响应描述之间的关系,以及把零、极点概念推广至多变量系统等的发展起来的。卡尔曼和罗森布劳克的研究表明,对于多变量控制系统,代数理论是贴切而有效的,因而出现了许多有关代数方法的重要研究。

(2)几何空间法 它展示了一个全新的研究前景。现在已可以看到,几何理论在把状态空间法和频域法紧密地联系起来将起关键作用。

(3)复变量法 它是古典控制理论中奈奎斯特-伯德技术、根轨迹法等向多变量系统的直接推广,它又与代数方法密切相关。

因此,现代控制理论,尤其是线性控制理论,其内容是极其丰富的,它的发展又是非常迅速的。虽然,1981年IEEE会刊又就线性控制理论出了专辑,但是它的发展还远未结束,并已渗透到许多邻近的学科中。

0.2 现代控制理论的主要内容

如前所述,现代控制理论的内容极其丰富而广泛。概括地说,它主要包括以下一些内容:

0.2.1 系统辨识

简而言之,所谓系统辨识就是利用系统(设备)在试验或运行中测得的数据构造出系统的数学模型,并估计其参数的理论和方法。

研究任何实际系统的控制问题,首先就涉及建立系统的数学模型问题。现代控制理论所涉及的控制问题往往都比较复杂,例如多变量系统、最优控制等问题,这就面临获取比较复杂比较精确的数学模型的问题。显然,古典控制理论中所介绍的简单辨识技术,已很难直接应用,必须研究新的辨识理论和方法。因此,系统的辨识一直是一个非常活跃的研究领域。

0.2.2 最优控制

它是研究在给定的限制条件和给定的性能指标下,寻找使该性能指标达到最佳值(最大或最小)的控制规律问题。例如要求控制一个飞行器达到预定目标的时间最短、燃料消耗最小或偏离预定轨道最小等的控制规律。

最优控制问题的提出,是促使现代控制理论出现的一个重要原因,是现代控制理论的重要内容,并已设有专门课程给予介绍。

0.2.3 最佳估计

亦称为最佳滤波,它与最优控制是构成一个最优控制系统的两个最基本的内容。理论上,最优控制应来自状态反馈;但是,系统的状态往往无法直接测量,实际能够量测到的信息往往是受到随机噪声污染的系统输出。因此,必须应用概率论中的理论和方法,在系统的结构和参数为已知的条件下,对所量测到的信息进行在线处理,滤去噪声,对系统的真实状态做出最好估计,这就是最佳估计问题。1961年卡尔曼的递推滤波理论卓有成效地解决了这一问题。

前已叙及,最优控制及最佳估计中的一个最重要且研究得最完善的问题就是LQG最优控制问题。严格说来,它们也应隶属于线性控制理论的范畴,但是由于其内容的深刻与丰富,因此总是单独地予以讨论。

0.2.4 自适应控制

自适应控制所研究的对象是具有不确定性的系统。任何一个实际控制系统,都在不同程度上具有不确定性。在系统内部,被控设备的数学模型的结构和参数,事先可能无法确切知道,或随时间而发生变化;在系统外部,可能有许多作用于系统上的无法确切知道的干扰。面对这些各种各样的不确定性,如何设计一个满意的控制系统来适应这些变化,这就是自适应控制系统所需研究和解决的问题。当然对于不确定性问题,也可以采用鲁棒控制的设计方法,但是当不确定性较大时,就需要自适应控制。

因此,自适应控制是一个比较复杂的问题,也是控制理论用于实际的重要问题,是目前非常活跃的研究课题,并且正朝着更高级更复杂的自学习及智能控制系统等方向发展。

0.2.5 线性控制系统理论

有限维线性时不变系统是实际中最经常遇到的一类系统,因此多变量线性系统理论一直是20多年来研究的重心。其主要内容有系统的结构问题,如能控性、能观测性、最小性等;以及关于反馈控制问题,如极点配置、解耦、鲁棒控制等问题。长期以来,线性控制理论虽然一直从几个不同的观点得到了充分的研究,但是,由于这一理论在许多研究和应用领域中的重要作用,新的研究和发展至今一直没有停止,本书就是介绍这一重要理论问题所需的基础

知识。

0.3 本书的主要内容

本书主要介绍线性控制系统的分析综合与设计所需要的一些基本概念、基本理论和基本方法。书中所涉及到的问题都是根本性的,例如关于能控性、能观测性、稳定性、最小性等系统结构问题;还有关于极点配置、跟踪、鲁棒控制等基本控制问题。因此,本书虽属于线性控制理论范畴,却包括了进一步学习现代控制理论所必备的基本概念和基本知识。此外,书中虽然主要涉及连续系统,对离散系统只做简单讨论,但是所介绍的理论和方法,经过适当修改,完全可以用于离散系统。如希望更详细了解离散系统的内容的读者,请参阅文献[11]。

第一章首先介绍了现代控制理论中一个最重要的概念,即状态变量和状态空间描述。接着介绍状态空间描述的建立。它既可以根据物理系统所应遵从的物理规律直接建立,也可以由传递函数(阵)转化而成,后者是“实现”理论的重要内容。对此,书中首先较为详细地介绍单变量系统的“实现”及几种特殊形式的“实现”,而后简单介绍多变量系统的其它描述,并在此基础上,介绍了组合系统、离散系统的状态空间描述。

第二章、第三章及第四章主要是控制系统基本性能的分析。第二章介绍控制系统状态方程的求解问题,即控制系统的定量分析。书中着重于解的一般表达式、解的结构及状态转移矩阵的性质和意义,而后介绍几种常见的状态转移矩阵的计算方法。第三章介绍控制系统的一个重要性质——稳定性,以及稳定性分析的另一重要理论工具的基本概念,即李亚普诺夫(Ляпунов)的稳定性定义及其第二法的基本定理,然后利用第二法具体分析了线性时不变系统的稳定性,以便使读者对李亚普诺夫第二法有一个概念性的了解。第四章则着重于控制系统的结构性质,介绍控制系统的两个基础性概念——能控性与能观测性。从状态空间描述出发,介绍能控性、能观测性的定义、判据及结构分解定理,并据此给出最小实现的基本方法。通过这一章的学习,读者能对线性系统的内部结构有一个比较清楚的了解。

第五章是关于控制系统的综合与设计的内容,详细介绍利用状态反馈达到极点配置的基本理论和方法。因为极点配置最能简明地说明状态反馈的重要意义,是其它控制问题的基础,也最容易为初学者所理解。此外,还介绍了渐近跟踪、干扰阻塞及鲁棒控制的基本概念和综合方法。

通过本课程的学习,学生应具备根据所给定的被控系统,对于常见的控制问题,能够综合出一个线性控制系统的初步知识和能力;并掌握进一步深入学习现代控制理论中的其它有关课程的基础知识。

1 线性控制系统的状态空间描述

1.1 概 述

如前所述,现代控制理论研究的对象主要是多输入-多输出自动控制系统。在研究分析这类系统时,首先应将系统的运动状态用一个一阶微分方程组或一阶矩阵微分方程来描述,这个微分方程组通常即被称为系统的状态方程,也就是系统的数学模型。

我们知道,经典线性系统理论的数学基础是拉普拉斯变换,系统的数学模型为传递函数,主要的分析和综合方法是频率响应法。而状态空间法是反映输入变量、状态变量和输出变量间关系的一种时域方法。它既适用于单输入-单输出系统又适用于多输入-多输出系统,既可处理定常系统又可处理时变系统。状态空间法主要的数学基础是线性代数,在系统分析和综合中所涉及的计算主要是矩阵运算和矩阵变换,并且这些计算适合在计算机上来运行。不管是系统分析还是系统综合,状态空间法都已建立了一整套完整、成熟的理论和方法。本章中,我们首先讨论建立系统的状态空间描述问题,包括状态和状态空间的概念,状态空间描述的组成和形式,以及状态空间描述的线性变换特性等。在以后各章中,我们将在状态空间描述基础上逐步讨论系统的结构特性和采用状态空间法分析和综合线性系统时要解决的各种问题。

1.2 系统的状态空间描述

1.2.1 状态、状态空间

系统的数学描述通常可分为两种类型。一种是系统的外部描述,对此称为输出-输入描



图 1-1 系统输出-输入描述框图

述,如图 1-1 所示。这种描述是把系统视为一个“黑箱”,不去表征系统的内部结构和内部变量,只是反映外部变量组间的因果关系即输出和输入间的因果关系。在经典控制理论中所学的传递函数就是一种外部描述。系统数学描述的另一类型是内部描述,即状态空间描述。内部描述是基于系统的内部结构分析的一类数学模型。它由两部分组成:一部分是反映系统

内部变量组和输入变量组的因果关系；另一部分是反映内部变量组和输入变量组与输出变量组间的转换关系。如图 1-2 所示。下面我们就讨论有关状态空间描述的内容。

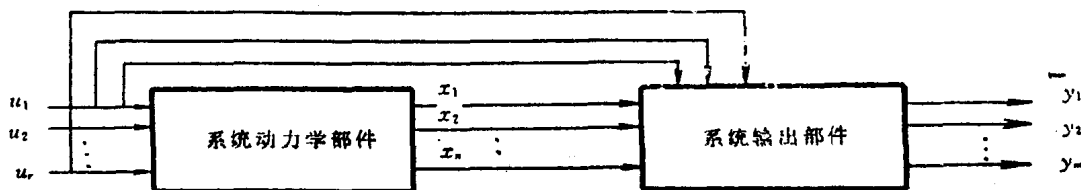


图 1-2 系统状态空间描述框图

1. 状态

动力学系统的状态,是能够完全描述动力学系统时域行为的一个最小变量组。这里完全描述是指,如果给定了 $t=t_0$ 时刻这组变量的值和 $t \geq t_0$ 时外加输入函数,那么系统在 $t \geq t_0$ 的任何时刻的行为就完全确定了。最小变量组中的每个变量称为状态变量,而以这组状态变量组成的向量称为状态向量。状态实际上是状态向量的简称。

设 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 是系统的一组状态变量,则状态向量就是以这组状态变量为分量的向量,记为

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{bmatrix}$$

一般来说,状态变量并不一定要在物理上是可测量的或可观察的。但是,从控制系统的构成来说,还是选择状态变量为可测量的量比较合理。很明显,动力学系统在 t 时刻的状态 $\mathbf{x}(t)$ ($t_0 \leq t < \infty$) 是由其在 t_0 时刻的初始状态 $\mathbf{x}(t_0)$ 和 $t \geq t_0$ 时的外加输入 $\mathbf{u}(t)$ 所唯一确定的,而与 t_0 时刻前的状态和输入无关。

2. 状态空间

由状态变量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 所张成的 n 维正交空间称为状态空间。考虑到状态向量的每个分量只能取实数值,因此状态空间是建立在实数域上的向量空间,其维数为 n ,记为 R^n 。状态空间中的每一点都代表了状态变量唯一的、特定的一组值,而状态随时间的变化过程,则构成了状态空间中一条轨迹,称为状态轨线。为了方便起见,将状态 $\mathbf{x}(t)$ 及各个分量 $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ 简记为 \mathbf{x} 及 x_1, x_2, \dots, x_n 。

1.2.2 被控过程的状态空间描述

在引入状态和状态空间的基础上,现在来建立被控过程的状态空间数学模型。由图 1-2 知, u_1, u_2, \dots, u_r 为控制变量,它是由控制器提供的加于被控过程的输入变量; x_1, x_2, \dots, x_n 为被控过程的状态变量,通常并不要求必须是可测量的;而输出变量 y_1, y_2, \dots, y_m 则是可以直接测量的,又称为量测变量。

一般情况下,被控过程的动力学特性可以用下面的 n 个一阶微分方程的方程组来描述

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad i = 1, 2, \dots, n$$

而其输出特性则是简单的函数关系,即

$$y_j = g_j(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \quad j = 1, 2, \dots, m$$

以上两式,构成了被控过程在状态空间的完整描述。但是这种表达式不够简洁,书写也很麻烦。这里引入向量矩阵,以简化表达式。为此,令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_r \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

它们分别为 n 维、 r 维和 m 维的状态向量、控制向量和输出向量。则有

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \\ \mathbf{y} &= \mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) \end{aligned} \quad (1-1)$$

其中

$$\mathbf{f}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} f_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ f_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ f_n(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{g}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, t) = \begin{bmatrix} g_1(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ g_2(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \\ \vdots \\ g_m(x_1, x_2, \dots, x_n, u_1, u_2, \dots, u_r, t) \end{bmatrix}$$

以上两个方程分别称为状态方程和输出方程,它们构成了系统的状态空间表达式。

如果所描述的被控过程是线性的,那么在状态方程和输出方程中,向量函数 \mathbf{f} 及 \mathbf{g} 与 \mathbf{x} 及 \mathbf{u} 都具有线性的关系。这时,线性系统的状态方程和输出方程可表示为如下的一般形式:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}(t)\mathbf{u} \\ \mathbf{y} = \mathbf{C}(t)\mathbf{x} + \mathbf{D}(t)\mathbf{u} \end{cases} \quad (1-2)$$

其中, $\mathbf{A}(t)$ 为 $n \times n$ 矩阵, $\mathbf{B}(t)$ 为 $n \times r$ 矩阵, $\mathbf{C}(t)$ 为 $m \times n$ 矩阵, $\mathbf{D}(t)$ 为 $m \times r$ 矩阵,它们的各元都不依赖于状态变量 x_1, x_2, \dots, x_n 和输入变量 u_1, u_2, \dots, u_r 。即 $\mathbf{A}(t), \mathbf{B}(t), \mathbf{C}(t), \mathbf{D}(t)$ 可表示为

$$\mathbf{A}(t) = \begin{bmatrix} a_{11}(t) & a_{12}(t) & \cdots & a_{1n}(t) \\ a_{21}(t) & a_{22}(t) & \cdots & a_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1}(t) & a_{n2}(t) & \cdots & a_{nn}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{B}(t) = \begin{bmatrix} b_{11}(t) & b_{12}(t) & \cdots & b_{1r}(t) \\ b_{21}(t) & b_{22}(t) & \cdots & b_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1}(t) & b_{n2}(t) & \cdots & b_{nr}(t) \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C}(t) = \begin{bmatrix} c_{11}(t) & c_{12}(t) & \cdots & c_{1n}(t) \\ c_{21}(t) & c_{22}(t) & \cdots & c_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1}(t) & c_{m2}(t) & \cdots & c_{mn}(t) \end{bmatrix} \quad \mathbf{D}(t) = \begin{bmatrix} d_{11}(t) & d_{12}(t) & \cdots & d_{1r}(t) \\ d_{21}(t) & d_{22}(t) & \cdots & d_{2r}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_{m1}(t) & d_{m2}(t) & \cdots & d_{mr}(t) \end{bmatrix}$$

线性系统的状态空间的描述的结构图如图 1-3 所示。

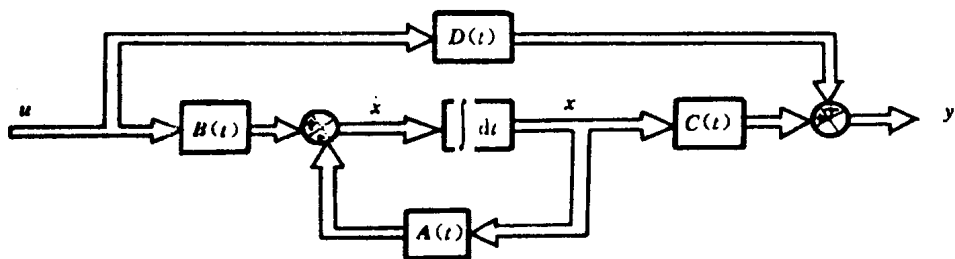


图 1-3 线性系统状态空间描述结构图

特别地,若式(1-2)中系统矩阵 A, B, C 和 D 是与时间变量无关的定常矩阵,这时被控过程是一个线性定常系统,其状态空间描述为

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Cx + Du \end{cases} \quad (1-3)$$

其中 A, B, C 和 D 分别为 $n \times n, n \times r, m \times n$ 和 $m \times r$ 维常数矩阵。

为了正确地理解状态和状态空间的含义,下面通过一些简单系统讨论其状态空间模型的建立问题,目的在于说明列写系统状态空间表达式的一般步骤。

例 1-1 设有如图 1-4 所示的 RLC 网络, u 为输入变量, u_c 为输出变量。试求其状态空间描述。

解:根据基尔霍夫定律,可得如下方程

$$\begin{aligned} C \frac{du_c}{dt} &= i \\ L \frac{di}{dt} + Ri + u_c &= u \end{aligned}$$

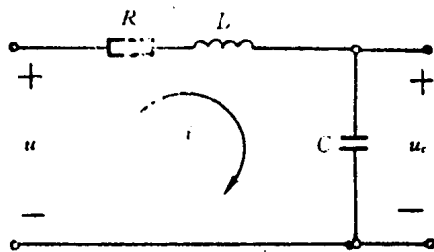


图 1-4

将上述方程中含有导数的项写在等式左端,其余写在等式的右端,可得

$$\begin{cases} \frac{du_c}{dt} = \frac{1}{C}i \\ \frac{di}{dt} = -\frac{1}{L}u_c - \frac{R}{L}i + \frac{1}{L}u \end{cases}$$

写成向量矩阵方程为

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix} u$$

取 $x_1 = u_c, x_2 = i$ 作为状态变量,可得状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{C} \\ -\frac{1}{L} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{L} \end{bmatrix}$$

取 u_c 为输出变量, 得输出方程

$$y = Cx + Du$$

其中

$$C = [1 \ 0] \quad D = 0$$

在此RLC网络中, 若已知电感电流的初始值 $i(t_0)$, 电容电压的初始值 $u_c(t_0)$, 以及 $t \geq t_0$ 时的输入电压 $u(t)$, 则 $t \geq t_0$ 时系统的运动状态可以完全确定。因此 $u_c(t), i(t)$ 可取为系统的一组状态变量。当然也可以选电流 $i(t)$ 和电容的电量 $q(t)$ 作为系统的一组状态变量(见习题)。

例 1-2 有一简单力学系统如图 1-5 所示, 其中外力 F 作为系统输入, 质量为 m 的物体位移为系统输出, 试求其状态空间描述。

解: 根据牛顿力学定律, 得

$$m \frac{dv}{dt} + fv + Ky = F$$

$$v = \frac{dy}{dt}$$

将其写成标准形式

$$\begin{cases} \frac{dv}{dt} = -\frac{f}{m}v - \frac{K}{m}y + \frac{1}{m}F \\ \frac{dy}{dt} = v \end{cases}$$

取 $x_1 = v, x_2 = y$ 作为系统状态变量, 可得状态方程

$$\dot{x} = Ax + Bu$$

其中

$$A = \begin{bmatrix} -\frac{f}{m} & -\frac{K}{m} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} \frac{1}{m} \\ 0 \end{bmatrix}$$

输出方程为

$$y = Cx + Du$$

其中

$$C = [0 \ 1] \quad D = 0$$

例 1-3 考查如图 1-6 所示电路, 取电压源电压 $e(t)$ 为输入变量, 电阻 R_2 两端电压 u_{R_2} 为输出变量, 试确定系统的状态空间描述。

解: 首先确定状态变量

根据电路学理论, 此电路最多有两个线性无关的变量, 可选电容两端电压 u_c 和流经电感的电流 i_L 作为系统状态变量, 对图中的两个回路分别列出回路方程为

$$\text{右回路} \quad u_c + R_2 i_c = L \frac{di_L}{dt}$$

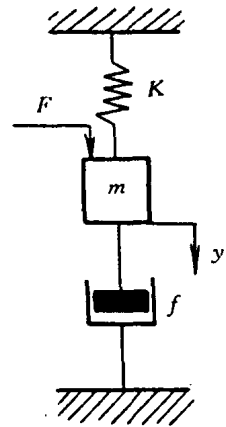


图 1-5

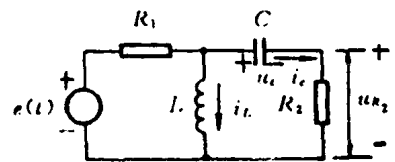


图 1-6

左回路
$$R_1(i_L + i_c) + L \frac{di_L}{dt} = e(t)$$

考虑到选取的状态变量为 u_c 和 i_L , 将 $i_c = C \frac{du_c}{dt}$ 代入上述方程得

$$\begin{cases} R_2 C \frac{du_c}{dt} - L \frac{di_L}{dt} = -u_c \\ R_1 C \frac{du_c}{dt} + L \frac{di_L}{dt} = -R_1 i_L + e(t) \end{cases}$$

以 $\frac{du_c}{dt}, \frac{di_L}{dt}$ 为待定变量求解上述联立方程, 得

$$\begin{aligned} \frac{du_c}{dt} &= -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} u_c - \frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} i_L + \frac{1}{(R_1 + R_2)C} e(t) \\ \frac{di_L}{dt} &= -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} u_c - \frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} i_L + \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} e(t) \end{aligned}$$

写成矩阵形式

$$\begin{bmatrix} \frac{du_c}{dt} \\ \frac{di_L}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix} e(t)$$

导出输出方程

$$u_{R_2} = R_2 i_c = R_2 C \frac{du_c}{dt} = -\frac{R_2}{R_1 + R_2} u_c - \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_L + \frac{R_2}{R_1 + R_2} e(t)$$

写成矩阵形式为

$$u_{R_2} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix} e(t)$$

令

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} u_c \\ i_L \end{bmatrix} \quad \mathbf{y} = u_{R_2}$$

对比式(1-3), 得

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{(R_1 + R_2)C} & -\frac{R_1}{(R_1 + R_2)C} \\ -\frac{R_1}{L(R_1 + R_2)} & -\frac{R_1 R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{(R_1 + R_2)C} \\ \frac{R_2}{L(R_1 + R_2)} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\frac{R_2}{R_1 + R_2} & -\frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{D} = \frac{R_2}{R_1 + R_2}$$

1.2.3 系统状态空间描述问题的讨论

通过以上对状态空间描述的分析 and 讨论, 下面给出以下结论: