[苏]P·B·格姆克列里兹

最优
控制理论基础

复旦大学出版社

最优控制理论基础

〔苏〕P·B·格姆克列里兹　　著
姚允龙　尤云程　　译
金福临　　审校

复旦大学出版社

内 容 简 介

本书是继庞特里雅金等著的"最佳过程的数学理论"之后，反映最优控制理论进展的重要著作，作者在书中以自己独创的广义控制为工具，严格地证明了庞特里雅金的最大值原理，进而得到了相当广泛的一类由常微分方程所确定的非线性系统最优解的存在性条件。

本书可作为理工科高校有关专业的高年级学生及研究生的教材，也可供从事自动控制理论的教学、研究与应用的高等院校教师、科学工作者和工程技术人员阅读参考。

最 优 控 制 理 论 基 础

复旦大学出版社出版
（上海国权路579号）

新华书店上海发行所发行　　上海蔡家弄印刷厂印刷

开本 850×1168　1/32　印张 5　字数 144,000
1988年第2月第1版　1988年2月第1次印刷
印数：1—6,000

ISBN 7—309—00124—9/O·035　定价：1.05元

中译本序

本书是继庞特里雅金等著的“最佳过程的数学理论”之后，在最优控制理论方面的一部重要著作。

控制理论中的变分方法首先由美国著名控制理论专家 L. D. Berkovitz 教授在1961年提出。本书作者格姆克列里兹（P. B. Гамкрелидзе）继承并发扬光大了这一方法。1984 年 L. D. Berkovitz 在复旦大学讲学时指出，迄今为止，控制理论中最先进的变分方法已表述在格姆克列里兹所发展的理论和著作中。

作者在本书中应用广义控制的概念给出了庞特里雅金最大值原理的一个新证明，他所采用的方法的优点还体现在最优控制存在性的证明中。近年来，本人与李训经教授在对无限维拟线性带时滞的发展系统的最大值原理所作的研究中，进一步发现了该方法对分布参数控制系统也是有效的。

本译本是根据1978年版的英译本译出的，为了方便读者阅读，中译本中对原书的若干段落的叙述作了更动，有些地方加上了译注。

金福临教授详细地审阅了全稿，并提出许多宝贵的修改意见．复旦大学出版社为本书中译本的出版给予了很大的支持，在此一并表示谢忱。

姚允龙

1984年4月

前　言

本书是1974年秋我在第比利斯国立大学的讲稿基础上整理而成的。其主要内容是控制理论的一般原理，最大值原理的证明，以及最优控制理论的基本存在定理。

我认为本书所介绍的基本定理的证明虽然未必是最简捷的，但在理论上是完全严格的。我们所引进的概念与方法有一个无可置疑的优点——它们不仅对本书中的定理证明有用，而且对整个控制理论有用.

本书仅限于处理具有固定端点的时间最优问题。这样做既避免了一般性结果表述上的烦赘，同时又保留了最优控制问题所特有的一切实质性难点。所得到的结果推广到具有一般边界条件和更一般的目标泛函的问题通常并无任何特殊困难，并且在多数情形可自动地实现。

本书可作为应用数学系选修或专修最优化理论的学生与研究生一学期课程的教材。假定学生已熟悉最优控制理论的初步知识，包括线性系统理论与凸集理论的基础，并假定读者已掌握一般测度论的最基本的概念。

P•B•格姆克列里兹

目　　录

第一章　时间最优问题与最大值原理

1.1　最优问题的提法

考察 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的微分方程

$$\dot{x}=f(t,x,u), \tag{1.1}$$

我们称它为受控方程，其中，

$$x=\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^n$$

称为相点，而

$$u=\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^r$$

称为控制参数[注1]，向量

$$f(t,x,u)=\begin{bmatrix} f^1(t,x,u) \\ \vdots \\ f^n(t,x,u) \end{bmatrix}\in \boldsymbol{R}^n$$

称为相速度．假定 f 是定义在

$$\boldsymbol{R}^{1+n+r}=\{(t,x,u):t\in \boldsymbol{R},x\in \boldsymbol{R}^n,u\in \boldsymbol{R}^r\}$$

上的一个连续函数且关于 x 连续可微：

$$\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x^n}\right).$$

U 是"参数空间" $\boldsymbol{R}^r$ 中一个任意给定的集合，这个集合是控制参

[注1]　u 是 t 的函数 $u(t)$．——译者注．

数 u 的允许值集．任意一个定义在 $\boldsymbol{R}$ 上并取值于集合 U 中的有界可测函数称为允许控制．允许控制全体组成的集合 Ω_U 称为允许控制类．

任取一允许控制 $u(t)$ 代入受控方程（1.1）得微分方程

$$\dot{x}=f(t,x,u(t))=F(t,x),$$

其右端函数 $F(t,x)$ 关于 x 连续可微且关于 t 可测．在第四、五章将详细讨论这类方程，并证明所有必要的结论．现在我们只须注意以下事实：如果 $x(t)$ 是 $[t_1,t_2]$ 上的绝对连续函数，且对几乎所有的 $t\in[t_1,t_2]$ 满足等式

$$\dot{x}(t)=f(t,x(t),u(t))=F(t,x(t)),$$

则称它是这一方程在区间 $[t_1,t_2]$ 上的一个解．由于 $x(t)$ 的绝对连续性，这等价于 $x(t)$ 对一切 $t\in[t_1,t_2]$ 满足积分方程

$$x(t)=x(t_1)+\int_{t_1}^{t}F(\theta,x(\theta))d\theta.$$

显然，如果 $u_1(t)$ 与 $u_2(t)$ 对几乎所有的 $t\in\boldsymbol{R}$ 相等，则微分方程

$$\dot{x}=f(t,x,u_1(t))\text{ 与 }\dot{x}=f(t,x,u_2(t))$$

是等价的．

受控对象是由受控方程(1.1)和允许控制类 Ω_U 确定的．这个对象的“状态”可用相点 x 描述，它的相轨迹被选定的允许控制 $u\in\Omega_U$ 所控制．如果在时刻 $t=t_1$ 对象的初态 x_1 已知并且控制 $u(t)$ 已给定，则对象的相轨迹唯一地由方程

$$\dot{x}=f(t,x,u(t)),\qquad x(t_1)=x_1,$$

确定．

由受控方程（1.1）与允许控制类 Ω_U 所给定的控制问题将写成如下形式，

$$\dot{x}=f(t,x,u),\qquad u(t)\in\Omega_U. \tag{1.2}$$

具有固定端点的时间最优问题可表述如下：给定相空间 $\boldsymbol{R}^n$ 中的两点 x_1 和 x_2，以及初始时刻 t_1，求一个允许控制 $\tilde{u}\in\Omega_U$，使得方程

$$\dot{x}=f(t,x,\tilde{u}(t))$$

在 $[t_1,t_2]$ 上有一个解 $\tilde{x}(t)$ 满足边界条件

$$\tilde{x}(t_1)=x_1,\qquad \tilde{x}(t_2)=x_2,$$

并且从 x_1 转移到 x_2 的时间为最小：

$$t_2-t_1\longrightarrow \min.$$

这样，对任何其他的允许控制 $\hat{u}(t)$，如果在 $[t_1,t_2]$ 上，方程 $\dot{x}=f(t,x,\hat{u}(t))$ 也存在解 $\hat{x}(t)$，并且满足同样的边界条件

$$\hat{x}(t_1)=x_1,\qquad \hat{x}(\hat{t}_2)=x_2,$$

则必有 $\hat{t}_2-t_1\geqslant t_2-t_1$，即 $\hat{t}_2\geqslant t_2$.

控制 $\tilde{u}(t)$ 将称为（时间）最优控制，$\tilde{x}(t)$ 将称为对应的最优轨线，而 t_2-t_1 称为在初始条件 $x(t_1)=x_1$ 下从 x_1 到 x_2 的最优（转移）时间。

$\{\tilde{u}(t),\tilde{x}(t)\}$，$t\in[t_1,t_2]$，将称为下列（时间）最优问题的解，或最优解：

$$\begin{aligned}
&\dot{x}=f(t,x,u),\qquad u(t)\in\Omega_U,\\
&t=t_1,\qquad x(t_1)=x_1,\\
&x(t_2)=x_2,\qquad t_2-t_1\longrightarrow\min.
\end{aligned}\tag{1.3}$$

应注意 t_1，$x(t_1)$ 和 $x(t_2)$ 在边界条件中是已经给定的，但是 t_2 不是给定的. 在方程（1.1）自治的情形，即它的右端不依赖于 t 的情形，边界条件中初始时刻 t_1 的固定显然是无关紧要的。

也可以研究由同样的受控方程（1.1）但是允许控制类比 Ω_U 更为广泛的受控对象的最优问题。然而，我们仅限于已经给出的 Ω_U。

有时需要缩小控制类 Ω_U，如仅考虑取值在 U 中的逐段连续控制，甚至逐段常值控制. 如果控制 $u(t)\in\Omega_U$ 在任一有界区间上至多有有限个不连续点且在每一不连续点处存在左右极限，则称它为逐段连续。如果 t 轴可分为有限个区间，在每一区间上 $u(t)$ 取一常值，则此 $u(t)\in\Omega_U$ 称为逐段常值的。

1.2 带参数的典则方程组与庞特里雅金最大值条件

首先，我们约定若干记号．列向量用罗马字母来标记，而行向量总以希腊字母来标记，如 $\xi=(\xi_1, \cdots, \xi_n)$。一个行向量与同维列向量的内积可写成矩阵相乘的形式：

$$\xi x=(\xi_1,\cdots,\xi_n)\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}=\sum_{i=1}^{n}\xi_i x^i.$$

向量值函数$f(t,x,u)$关于向量 x 的坐标分量的 Jacobi 阵将记为

$$f_x(t,x,u)=\frac{\partial f(t,x,u)}{\partial x}=\left(\frac{\partial f^i(t,x,u)}{\partial x^j}\right), \qquad i,j=1,\cdots,n.$$

任一 $n\times m$ 矩阵 $A=(a_{ij})(i=1,\cdots,n;j=1,\cdots,m)$的范数取欧氏范数

$$|A|=\left(\sum_{i,j}a_{ij}^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

定义时间 t 和以下三个向量

$$x=\begin{bmatrix} x^1 \\ \vdots \\ x^n \end{bmatrix}, \quad \psi=(\psi_1,\cdots,\psi_n), \quad u=\begin{bmatrix} u^1 \\ \vdots \\ u^r \end{bmatrix}$$

的数值函数如下：

$$H(t,x,\psi,u)=\psi f(t,x,u)=\sum_{i=1}^{n}\psi_i f^i(t,x,u).$$

函数 H 是向量 ψ 与受控对象的相速度向量 $f(t,x,u)$的内积．它关于ψ是线性的，关于 x 是连续可微的。

记

$$\frac{\partial H}{\partial \psi}=\begin{pmatrix} \dfrac{\partial H}{\partial \psi_1} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial H}{\partial \psi_n} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} f^1 \\ \vdots \\ f^n \end{pmatrix}=f,$$

$$\frac{\partial H}{\partial x}=\left(\frac{\partial H}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x^n}\right)=\left(\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_{x^1}^i(t,x,u),\cdots,\sum_{i=1}^{n}\psi_i f_{x^n}^i(t,x,u)\right)$$

$$=\psi f_x(t,x,u).$$

向量值函数 x 和 ψ 的方程组：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H(t,x,\psi,u)}{\partial \psi}=f(t,x,u),\\ \dot{\psi}&=-\frac{\partial H(t,x,\psi,u)}{\partial x}=-\psi f_x(t,x,u),\end{aligned}\tag{1.4}$$

称为 Hamilton 方程组，或称为关于 x 与 ψ 的典则方程组. 函数 H 称为该系统的 Hamilton 函数. 除了变量 x 和 ψ 以外，函数 H 还含有时间 t 及变量 u，u 可以看作为一个参量.

一般地说，任意一个二次连续可微的数值函数 $H(t,x,\psi)$ 可生成对应的 Hamilton 系统或典则系统：

$$\begin{aligned}\dot{x}&=\frac{\partial H(t,x,\psi)}{\partial \psi}=\begin{pmatrix}\dfrac{\partial H}{\partial \psi_1}\\ \vdots\\ \dfrac{\partial H}{\partial \psi_n}\end{pmatrix},\\ \dot{\psi}&=-\frac{\partial H(t,x,\psi)}{\partial x}=-\left(\frac{\partial H}{\partial x^1},\cdots,\frac{\partial H}{\partial x^n}\right),\end{aligned}\tag{1.5}$$

而函数 H 称为这一系统的 Hamilton 函数.

这一系统具有一个值得注意的性质：如果 $x(t)$，$\psi(t)$ 在 $[t_1,t_2]$ 上是该系统的一个解，则下式成立，

$$\frac{d}{dt}H(t,x(t),\psi(t))=\frac{\partial}{\partial t}H(t,x(t),\psi(t)),$$

其中，左侧是关于 t 的全导数，右侧是关于 t 的偏导数. 特别，当 H 不显式依赖于 t 时，便有

$$\frac{d}{dt}H(t,x(t),\psi(t))=0.$$

这一事实可由直接计算得到：

$$\frac{d}{dt}H(t,x(t),\psi(t))=\dot{\psi}\frac{\partial H}{\partial\psi}+\frac{\partial H}{\partial x}\dot{x}+\frac{\partial H}{\partial t}$$

$$=-\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\psi}+\frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial H}{\partial\psi}+\frac{\partial H}{\partial t}=\frac{\partial H}{\partial t}.$$

不含任何其它参数的系统(1.5)的解 $x(t)$, $\psi(t)$是由初始条件

$$t=t_1,\qquad x(t_1)=\hat{x},\qquad \psi(t_1)=\hat{\psi}$$

唯一确定的。相比之下，仅当我们以 t 的一个特定函数代入 $\boldsymbol{H}$ 中的参数 u 时，系统(1.4)的解才由初始条件唯一确定。到现在为止，除了条件 $u(t)\in\Omega_U$ 而外，我们对函数 $u(t)$的选取并无其它限制。

为了作出确定的选取，我们假定已给出联系着 t,x,ψ 和 u 的一个关系：

$$\omega(t,x,\psi,u)=0. \tag{1.6}$$

粗糙地讲，这一关系应使我们能用 t,x 和 ψ 表示出 u(我们暂不追究这一函数的具体形式)，因而就能从方程 (1.4) 中消去参数 u。为此，将表示式

$$u=u(t,x,\psi)$$

代入(1.4)中的 u，便得到关于 x 和 ψ 的微分方程组：

$$\dot{x}=f(t,x,u(t,x,\psi)),$$

$$\dot{\psi}=-\psi f_x(t,x,u(t,x,\psi)).$$

在函数 $u(t,x,\psi)$充分正则（例如，连续可微）的假定下，只要初始条件给定，这一方程组的解唯一地存在。

但是，方程 (1.6) 关于 u 的正则可解性要加相当严格的限制条件。我们将用如下方法来代替借助于(1.6)从(1.4)中消去 u 的做法。为此，给出下面的精确定义：

设存在绝对连续函数 $x(t)$和 $\psi(t)$ ($t\in[t_1,t_2]$) 以及一个可测函数 $u(t)\in\Omega_U$，满足微分方程组(1.4)，方程(1.6)以及初始条件

$$t=t_1,\qquad x(t_1)=x_1,\qquad \psi(t_1)=\psi_1,$$

那么，我们称函数组 $x(t)$，$\psi(t)$ 与 $u(t)$为典则方程组(1.4)具有给定初始条件的解，并且称这一解是由关系式(1.6)从典则方程组(1.4)中

消去参数 u 而得到的。这里，函数 $u(t)$ 可测，且等式

$$\omega(t,x(t),\psi(t),u(t))=0$$

对几乎所有 $t\in[t_1,t_2]$ 成立。

古典变分法的正则问题中会遇到方程（1.6）关于 u 的正则性与唯一可解性问题。在本章之末将考虑这一情形。

我们主要关心如下形状的条件(1.6)：

$$\boldsymbol{H}(t,x,\psi,u)=M(t,x,\psi), \tag{1.6$'$}$$

这里函数 $M(t,x,\psi)$ 是

$$M(t,x,\psi)=\sup_{u\in U}\boldsymbol{H}(t,x,\psi,u).$$

(1.6)′称为庞特里雅金最大值条件。

如果 $x(t),\psi(t),u(t)(t\in[t_1,t_2])$ 组成典则方程组(1.4)的一个解并对几乎所有的 $t\in[t_1,t_2]$ 满足庞特里雅金最大值条件，即满足等式

$$\boldsymbol{H}(t,x(t),\psi(t),u(t))=M(t,x(t),\psi(t)),$$

则称这组解是用庞特里雅金最大值条件从典则方程组（1.4）中消去参数 u 而得到的解。

1.3 庞特里雅金最大值原理

我们将要叙述的定理 1.1，即庞特里雅金最大值原理，是最优问题（1.3）的任一解所满足的必要条件。我们还将讨论运用这一条件实际地寻求最优解的可能性。最大值原理的证明将在第七章里给出。

定理 1.1 设

$$\tilde{u}(t)\in\Omega_U,\qquad \tilde{x}(t),\qquad t\in[t_1,t_2],$$

是最优问题(1.3)的解。那么，必存在非零绝对连续函数

$$\tilde{\psi}(t)=(\tilde{\psi}_1(t),\cdots,\tilde{\psi}_n(t)),\quad t\in[t_1,t_2],$$

使得对几乎所有的 $t\in[t_1,t_2]$，函数组 $\tilde{u}(t),\tilde{x}(t)$ 与 $\tilde{\psi}(t)$ 满足典则方程组

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \psi} H(t, x, \psi, u),$$
$$\dot{\psi} = -\frac{\partial}{\partial x} H(t, x, \psi, u), \tag{1.7}$$

其中，Hamilton 函数是

$$H(t, x, \psi, u) = \psi f(t, x, u), \tag{1.8}$$

并且满足庞特里雅金最大值条件

$$H(t, \tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t), \tilde{u}(t)) = M(t, \tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t)). \tag{1.9}$$

函数 $M(t, \tilde{x}(t), \tilde{\psi}(t))$，必是 $t \in [t_1, t_2]$ 的连续函数，且在 $t = t_2$ 处成立如下不等式，

$$M(t_2, \tilde{x}(t_2), \tilde{\psi}(t_2)) \geqslant 0. \tag{1.10}$$

我们将在下一节里讨论最大值条件 (1.9) 和不等式(1.10)的简单几何解释。

关系式组(1.7)—(1.10)满足边界条件

$$t = t_1, \qquad x(t_1) = x_1, \qquad x(t_2) = x_2, \tag{1.11}$$

且 $\psi(t)$ 非零的任一解 $u(t), x(t), \psi(t)$ 称为最优问题(1.3)的一个极值解．函数

$$H(t, x, \psi, u) = \psi f(t, x, u)$$

称为最优问题(1.3)的 Hamilton 函数。

最大值原理断言，最优问题 (1.3) 的解必包含在该问题的极值解集之中．因此，我们简短地讨论一下这样一个问题：在何种程度上，最大值条件(1.9)与不等式(1.10)连同边界条件 (1.11) 能确定典则方程组(1.7)的解？在这里，最大值条件应被看作 t, x, ψ 和 u 之间的一个关系式(1.6)，由它从方程组(1.7)中消去参数 u.

首先，我们看出函数 $\tilde{\psi}(t)$ 不恒为零的假定是很重要的．事实上，由于 H 关于 ψ 是线性的，故满足

$$\dot{x} = \frac{\partial}{\partial \psi} H(t, x, \psi, u) = f(t, x, u), \quad u(t) \in \Omega_U,$$

$$t = t_1, \qquad x(t_1) = x_1, \qquad x(t_2) = x_2$$

的任一解$u(t)$，$x(t)$连同函数$\psi(t)\equiv 0$必满足关系式组(1.7)—(1.11)。因此，若没有条件$\tilde{\psi}(t)\not\equiv 0$，则最大值原理将成为空洞的断言。有了非零的$\psi(t)$，一般来说，利用最大值原理就能以令人满意的方式从(1.7)中消去参数u，从而得到边值问题(1.7)—(1.11)的一个或几个孤立解。

应看到，若$\tilde{\psi}(t)\not\equiv 0$，即$\tilde{\psi}(t)$不恒等于零，则$\tilde{\psi}(t)\neq 0$，$\forall t\in[t_1,t_2]$，这是因为$\tilde{\psi}(t)$是线性齐次方程

$$\dot{\psi}=-\psi f_x(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$$

的解的缘故。

对$\psi(t)$未加边界条件是非常自然的。考虑到关系式组(1.7)—(1.11)中的"实质参数"的个数应等于其中"独立条件"的个数，因此这样的系统不是超定的。但是，添加任何新的（独立）条件将导致系统的超定。

实际上，设初始值$t_1,x(t_1),\psi(t_1)$及终止时间t_2为边值问题(1.7)—(1.11)的参数，即一共有$2n+2$个数值参数。如果$t_1,x(t_1),\psi(t_1)$已给定，那么，在最大值条件能够从(1.7)消去u的这一假定下，也即在方程

$$H(t,x(t),\psi(t),u(t))=M(t,x(t),\psi(t))$$

对几乎所有的t可唯一地解出u的假定下，(1.7)—(1.9)之解$u(t)$，$x(t)$，$\psi(t)$将唯一地随时间而变化。但现在t_1与$x(t_1)$在边界条件(1.11)中已被固定，所以$n+1$个数值参数$\psi(t_1),t_2$是自由的。由于有这些自由参数，我们能使其余几个数值条件$x(t_2)=x_2$得以满足。

我们要证明，如果

$$u(t),\quad x(t),\quad \psi(t),\quad t\in[t_1,t_2],$$

是关系式组(1.7)—(1.11)的一个解，则对任一非负常数λ，函数组

$$u(t),\quad x(t),\quad \lambda\psi(t),\quad t\in[t_1,t_2],$$

也是(1.7)—(1.11)的一个解。因此，在向量$\psi(t_1)$的n个坐标中，事实上只有$n-1$个实质参数。再加上参数t_2，共有n个可以变动的实质参数，我们必须用这些参数的适当取值来满足在右端点处的边界条件

$x(t_2)=x_2$。

只要注意到，函数 H 关于 ψ 是线性的，函数 $M(t,x,\psi)$ 关于 ψ 是正齐次的，即

$$M(t,x,\lambda\psi)=\lambda M(t,x,\psi), \qquad \forall \lambda\geqslant 0,$$

不等式(1.10)的左端 $\geqslant 0$，以及边界条件(1.11)并不包含 $\psi(t)$ 的任何值，前一段所述的事实不难得知了。

既然最优问题(1.3)的解必在边值问题（1.7)—(1.11）的解集之中，求解这种边值问题的方法就非常重要。在最优化理论中对之应有专门章节来讨论[注1]。

1.4 最大值条件的几何解释

我们以 $P(t,x)$ 记控制问题(1.2)中给定 t 和 x 之值的所有可能的相速度的集合：

$$P(t,x)=\{f(t,x,u):u\in U\}\subset \mathbf{R}^n.$$

考虑问题(1.3)的一个极值解 $\tilde{u}(t)$，$\tilde{x}(t)$，$\tilde{\psi}(t)$，$t\in[t_1, t_2]$，并设 $\Pi_t\subset \boldsymbol{R}^n$ 是在 t 时刻正交于 $\tilde{\psi}(t)$ 的 $(n-1)$ 维子空间。最大值条件(1.9)是说，对几乎所有的 $t\in[t_1,t_2]$，向量 $\tilde{\psi}(t)$ 与相速度向量 $f(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))$ 的内积（其中 $\tilde{x}(t),\tilde{u}(t)$ 是一极值轨线与控制）不小于这一向量 $\tilde{\psi}(t)$ 与受控对象(1.2)的任一可能的相速度之内积：

$$\tilde{\psi}(t)f(t,\tilde{x}(t),\tilde{u}(t))\geqslant\tilde{\psi}(t)p, \qquad \forall p\in P(t,\tilde{x}(t)).$$

因此，对几乎所有的 $t\in[t_1,t_2]$，集合 $P(t,\tilde{x}(t))$ 将位于 $\boldsymbol{R}^n$ 中由超平面

[注1] 在最优控制选自“无限维”函数族 $\boldsymbol{\Omega}_U$ 这一意义上，最优问题（1.3）本质上是“无限维”的．以满足微分方程与边界条件：$\dot{x}=f(t,x,u)$，$t=t_1$，$x(t_1)=x_1$，$x(t_2)=x_2$ 的形式对控制 $u(t)\in\boldsymbol{\Omega}_U$ 所加的“约束”，一般而言，并不能使满足这些约束的所有允许控制组成的函数族的“维数”有限化．

然而，考虑到控制最优性同最大值原理的联系，我们已将原来的“无限维”问题归结成为一个复杂的、但毕竟还是有限维的边值问题（1.7）—（1.11）。