

复合材料力学 分析与设计

王兴业 等编著

国防科技大学出版社

复合材料力学分析与设计

王兴业	肖加余	编著
唐羽章	江大志	
唐羽章		审校

国防科技大学出版社
· 长沙 ·

图书在版编目(CIP)数据

复合材料力学分析与设计/王兴业等编著. —长沙:国防科技大学出版社,1999.11
ISBN 7-81024-568-6

I. 复… II. 王… III. ①复合材料-材料力学-分析②复合材料-设计 IV. TB

中国版本图书馆 CIP 数据核字(99)第 32600 号

内 容 简 介

本书论述了复合材料力学分析和设计的特点、原理和方法。对单向复合材料的刚度和强度,层合复合材料的刚度和强度进行了详细的分析讨论,介绍了复合材料材料设计和结构设计的基础理论——细观力学和复合材料结构力学。全书在内容编排上循序渐进深入浅出,主要作为复合材料及工程专业的本科生和研究生的基础教材,也可作为力学、机械专业相应课程的教学参考书和从事复合材料科研生产的科技工作者的自学读物。

国防科技大学出版社出版发行

电话:(0731)4555681 邮政编码:410073

E-mail:gfkdcbs@public.cs.hn.cn

责任编辑:罗青 责任校对:黄八一

新华书店总店北京发行所经销

国防科技大学印刷厂印装

*

787×1092 1/16 印张:15.75 字数:364 千

1999 年 11 月第 1 版第 1 次印刷 印数:1—3000 册

*

定价:19.00 元

前 言

这本《复合材料力学分析与设计》是按照复合材料与工程专业的教学要求编写的,十几年前我们曾出版了《复合材料力学性能》一书,作为复合材料专业本科生和非复合材料专业毕业攻读复合材料方向硕士研究生的教材。十几年来复合材料学科发展很快,从事复合材料专业的高级专门人才,在力学方面需要具备复合材料力学分析和结构设计方面的知识,为此我们在原书的基础上做了较大的修改和补充,对原书中复合材料的刚度和强度分析作了必要的精简,增加了不连续相增强复合材料的力学性能、编织体增强复合材料力学性能、复合材料结构力学和复合材料结构设计,构成了复合材料力学分析和设计的一个完整体系,将更符合培养从事复合材料研究、设计的专门人才的要求。

本书第一章由王兴业、唐羽章合写,王兴业编写了第二、三、七、八章,第四章由唐羽章编写,第五章由肖加余编写,第六章由江大志编写,全书由王兴业统编,并由唐羽章审校定稿。

本书在编写中得到了国防科技大学材料工程与应用化学系领导的支持,对此我们表示衷心感谢。

编 者
1999 年 6 月

目 录

第一章 复合材料力学特性和弹性本构关系

1.1 复合材料力学分析与设计的特点	(1)
1.1.1 复合材料力学分析和设计应用的历史发展	(1)
1.1.2 复合材料力学性能的特点	(2)
1.1.3 复合材料力学的分类与应用范围	(4)
1.1.4 复合材料力学分析的基本假设	(5)
1.2 应力和应变及其变换	(6)
1.2.1 应力与应力变换	(6)
1.2.2 应变与应变变换	(10)

第二章 连续纤维增强复合材料的刚度分析

2.1 单向复合材料的正轴刚度	(14)
2.1.1 单向复合材料正轴应力-应变关系	(14)
2.1.2 模量和柔量的对称性	(17)
2.2 单向复合材料的偏轴刚度	(20)
2.2.1 单向复合材料偏轴应力-应变关系	(20)
2.2.2 单向复合材料偏轴模量变换——模量莫尔圆	(21)
2.2.3 单向复合材料的偏轴柔量	(25)
2.2.4 偏轴工程常数	(29)
2.3 层合板的面内刚度	(33)
2.3.1 层合板的标记与类型	(33)
2.3.2 层合板面内力-应变关系	(35)
2.3.3 层合板面内模量计算	(37)
2.3.4 层合板面内模量变换	(40)
2.3.5 典型层合板面内模量	(42)
2.4 层合板的弯曲刚度	(52)
2.4.1 弯矩和弯曲变形	(52)
2.4.2 层合板内力-变形关系	(54)
2.4.3 单向板的弯曲特性	(57)
2.4.4 对称层合板的弯曲模量计算	(59)
2.4.5 一般层合板的模量	(62)
2.4.6 平行移轴定理及其应用	(66)

第三章 复合材料的强度

3.1 引言	(70)
3.2 最大应力准则和最大应变准则	(71)
3.2.1 最大应力准则	(71)
3.2.2 最大应变准则	(73)
3.3 蔡-希尔(Tsai-Hill)强度准则	(74)
3.4 蔡-吴(Tsai-Wu)张量多项式准则	(76)
3.4.1 蔡-吴张量多项式准则方程	(76)
3.4.2 强度参数的确定	(77)
3.5 蔡-吴准则方程强度参数变换	(81)
3.6 强度比方程	(84)
3.7 层合板的强度分析	(85)
3.7.1 按最大应力准则绘制层合板失效特征线	(86)
3.7.2 按张量多项式准则确定层合板的最先一层破坏	(88)
3.8 层合板的极限强度	(93)

第四章 复合材料的细观力学 I

——连续纤维增强复合材料的力学性能

4.1 引言	(98)
4.2 复合材料的密度、应力和应变	(99)
4.2.1 复合材料的密度与各相所占的分数	(99)
4.2.2 复合材料的应力和应变	(100)
4.3 用材料力学方法确定复合材料的工程常数	(100)
4.3.1 纵向杨氏模量 E_x 和泊松比 ν_x	(101)
4.3.2 剪切模量 E_s	(103)
4.3.3 横向杨氏模量 E_y	(103)
4.4 用弹性力学方法确定复合材料的工程常数	(105)
4.4.1 用最小余能原理确定杨氏模量 E_x 的下限	(106)
4.4.2 用最小应变能原理确定杨氏模量 E_x 的上限和 ν_x 值	(107)
4.5 用半经验法确定复合材料的工程常数	(108)
4.5.1 蔡的半经验公式	(108)
4.5.2 哈尔平-蔡(Halpin-Tsai)的半经验公式	(109)
4.6 用材料力学方法确定复合材料的强度	(109)
4.6.1 拉伸强度 X_t 的确定	(110)
4.6.2 压缩强度 X_c 的确定	(112)
4.6.3 横向强度 Y_t 、 Y_c 和剪切强度 S 的确定	(116)

第五章 复合材料的细观力学Ⅱ

——不连续增强相复合材料的力学性能

5.1 短纤维增强复合材料的力学性能	(118)
5.1.1 短纤维在复合材料中的受力分析	(118)
5.1.2 单向平行短纤维增强复合材料的工程常数和强度	(128)
5.1.3 随机取向短纤维增强复合材料的强度	(131)
5.2 颗粒增强复合材料的力学性能	(133)
5.2.1 颗粒增强复合材料的拉伸模量	(133)
5.2.2 颗粒增强复合材料的拉伸强度	(136)

第六章 复合材料的细观力学Ⅲ

——织物增强复合材料的力学性能

6.1 织物预成型体及其成型技术	(138)
6.1.1 编织技术	(139)
6.1.2 针织技术	(141)
6.1.3 辫织技术	(142)
6.2 二维织物增强复合材料的弹性性能	(143)
6.2.1 莫赛克(Mosaic)模型	(143)
6.2.2 皱褶模型	(146)
6.2.3 桥联模型及实验验证	(148)
6.3 三维编织体增强复合材料的力学性能	(151)
6.3.1 三维编织结构	(151)
6.3.2 三维编织物增强复合材料力学性能的分析模型	(153)

第七章 复合材料结构分析

7.1 复合材料结构分析的基本问题	(157)
7.1.1 各向异性体弹性力学基本方程	(157)
7.1.2 弹性力学问题的一般解法	(160)
7.2 复合材料简单受力构件分析	(161)
7.2.1 复合材料受拉直杆分析	(161)
7.2.2 受纯剪和纯弯载荷的复合材料构件分析	(164)
7.3 复合材料梁	(168)
7.3.1 层合梁	(168)
7.3.2 复合材料板梁	(172)
7.3.3 复合材料薄壁梁	(175)

7.4 复合材料板	(180)
7.4.1 关于板的基本概念	(180)
7.4.2 薄板的基本方程	(181)
7.4.3 受横向载荷复合材料薄板的应力和应变	(185)
7.4.4 正交异性板弯曲问题的解	(187)
7.4.5 一般层合板的弯曲	(191)
7.4.6 用能量法解复合材料板的弯曲问题	(195)
7.4.7 复合材料板的屈曲	(197)
7.4.8 夹芯板的弯曲	(200)
7.5 复合材料壳	(204)
7.5.1 薄壳的定义与简化假设	(204)
7.5.2 曲面的基本几何概念	(204)
7.5.3 壳体上任意点的位移	(209)
7.5.4 壳体的应变	(210)
7.5.5 壳体内力及变形与内力的关系	(214)
7.5.6 壳体的平衡方程	(216)
7.5.7 复合材料圆柱壳分析	(217)
7.5.8 层合壳的薄膜理论	(221)

第八章 复合材料结构设计

8.1 概述	(222)
8.2 结构设计	(224)
8.2.1 结构设计的一般原则	(224)
8.2.2 结构设计应考虑的工艺性要求	(225)
8.2.3 许用值与安全系数	(225)
8.3 典型结构件的设计	(227)
8.3.1 典型承载构件设计	(227)
8.3.2 结构形式的选择	(231)
8.3.3 结构设计应考虑的其他问题	(233)
8.4 复合材料连接设计	(234)
8.4.1 复合材料连接方式	(235)
8.4.2 胶接	(235)
8.4.3 机械连接	(239)

参考文献

第一章 复合材料力学特性和弹性本构关系

1.1 复合材料力学分析与设计的特点

1.1.1 复合材料力学分析和设计应用的历史发展

在复合材料可供利用的各种优异的性能中,力学性能处于最重要的地位。在现有关于复合材料设计的所有原理中,力学原理研究所达到的程度与水平要远远超过其他方面。从历史发展来看,复合材料在工程结构方面的设计、应用,曾经经过了由低级到高级的过程。

等代设计 或者又称直接替换法。它是将复合材料简单地代替常规材料,用与常规材料构件相同的结构型式、尺寸、形状和连接方法来制作复合材料构件,设计时的载荷条件、安全系数、计算方法均完全套用常规材料的规范。由于复合材料有高的比强度和比刚度,尽管等代设计完全不注意利用复合材料各向异性的特殊性能而显得不合理,一般仍能得到比常规材料轻的结构。

网格分析 认为在纤维增强复合材料中,只有纤维在沿着纤维方向提供承载能力,在分析中完全忽略基体的作用。这种方法用于纤维缠绕成型的内压力容器(例如固体火箭发动机的壳体)的初步设计中,可以迅速简便地确定铺层的方向、数目与比例。

局部增强的混合结构 这种设计方法的要点是在常规材料所组成的结构的关键部位上,增用一些复合材料。例如,在加筋件的凸缘上采用单向纤维复合材料,形成复合材料与常规材料构成的混合结构。但是,由于它是在常规材料结构基础上的修修补补,不论在设计分析或者工艺方法上都显得复杂和麻烦,甚至可能会在某些方面不是突出了两种材料的优点,而是集中了它们的缺点。

常规材料结构设计的第一步工作是选材,即在材料部门提供的有确定性能数据的材料手册中选择牌号与规格。复合材料显著区别于常规材料的地方是:它是一种性能可设计的材料,因而复合材料结构设计的第一步工作是进行复合材料的材料设计。可见它赋予结构设计者的自由度要大得多。在目前水平,材料设计的内容包括:根据结构各处工作环境及载荷的类型与量级,对不同地点与方位选用增强材料和基体,确定它们的体积含量、配置方向及成型方法。这种设计是在已有的增强材料和基体的基础上,考虑不同相之间在化学、机械、热、电……诸方面的相容性及界面现象,并运用关于复合材料力学分析及破坏、损伤断裂机制研究的知识,使复合材料的特点得到充分发挥,以获得优化的材料与结构。

下一步的目标应当是把设计工作深入到更深的层次,即材料的分子设计。增强相和基体相本身作为材料而言,它们的性能均取决于其分子或晶体结构,如果弄清了微观结构与宏观性能之间的关系,并设法使材料在受控制的条件下组成规定的微观结构,从而得到具有预定宏观性能的新材料,这就把材料研究从摸索、筛选和倚重经验的现状,提高到在理

论指导下的有目的的发展,即从必然王国进入了自由王国。这正如我国著名科学家钱学森所描述的:“可以让工程设计人员、力学工作者和材料工作者一道工作,再加上电子计算机,把一项工程设计一直设计到细观或微观的水平,而不是像过去那样材料只能选用不能设计,材料工作和工程设计分两段干的局面,这个新的发展将大大提高将来工程设备的使用性能。”

1.1.2 复合材料力学性能的特点

从力学分析的角度看,复合材料同常规材料(例如工程上大量采用的金属材料)的显著区别是非均质和各向异性。现在先来解释几个有关的术语:

均质——物质在各处有相同的性能。也就是说,物体的性能不随物体内部位置的改变而变化。

非均质——物质在各处有不同的性能,即物体的性能随物体内部位置的改变而变化。

各向同性——在物体内部一点的每个方向上都表现有相同的性能。

各向异性——在物体内部一点各方向上表现有不相同的性能。在各向异性中,有一类称为正交异性,在这类材料中,过每一点均可找到三个相互垂直的对称平面,在关于这三个平面的对称方向上,材料具有相同的性能。

一种材料,可以视为均质的,也可以视为非均质的,这取决于分析时观察问题的尺度。事实上,从原子水准来说,任何材料都是不连续的和非均质的。当所考虑的区域增大到某种程度时,原子结构在分析中已经失去了它的重要性,连续介质力学的理论开始有效。对于常规材料,即可视为是均质的。而对于复合材料,由于存在可以从界面区分的相和迭层,一般认为是非均质的。但是,分析的尺度继续扩大以后,它又可以用等效的均质体来代替。此时,颗粒复合材料和方向随机分布的短纤维(和晶须)复合材料可以认为是各向同性的,而纤维(包括织物)规则排列的复合材料,通常认为是非各向同性的。

同传统材料相比,复合材料在力学性能上有以下特点:

一、复合材料是一种结构

从传统的力学分析观点来看,连续纤维增强高聚物复合材料是由纤维和高聚物两种组分材料组成的,两者之间有明显的界面,所以,实际上就是一种结构。另外,这种材料是以层合的形式制成的,所以这种材料又是一种层合结构。如图 1-1 所示,它是由纤维与基体所组成的一种铺层(或称单层板),以不同方向层合而成的多向层合板。如果每一铺层都处于同一方向,则称为单向层合板。铺层有许多种类,可以由无纬布、经纬交织布或斜向交织布形成(见图 1-2)。在工程实际中,层合板和复合材料结构件是一次完成的,也就是将形成铺层的经预浸处理的布(无纬布或交织布)按实际结构件的形状及规定的铺层方向进行铺设,然后固化制成。所以,层合板是复合材料结构件的基本单元,而铺层又是层合板的基本单元。

二、比强度、比模量较高

纤维增强复合材料是由高强度、低密度的纤维材料(增强体)与基体所组成。具有比传统材料较高的比强度和比模量,见表 1-1。

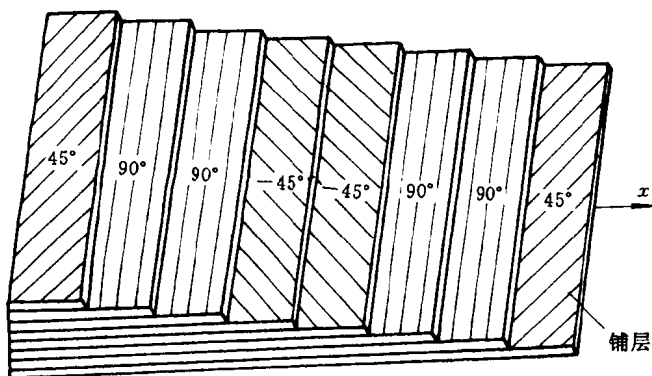


图 1-1 层合复合材料

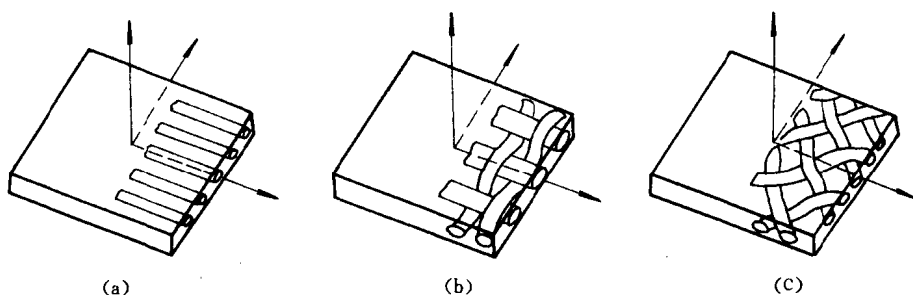


图 1-2 铺层的种类

(a) 无纬铺层；(b) 经纬交织铺层；(c) 斜向交织铺层

表 1-1 各种材料的比强度与比模量

材 料	比强度 $\sigma_b / \rho (\times 10^7 \text{cm})$	比模量 $E / \rho (\times 10^9 \text{cm})$	材 料	比强度 $\sigma_b / \rho (\times 10^7 \text{cm})$	比模量 $E / \rho (\times 10^9 \text{cm})$
钢	0.13	0.27	高强度碳纤维/环氧	1.03	0.97
铝	0.17	0.26	高模量碳纤维/环氧	0.67	1.5
钛	0.21	0.25	硼纤维/环氧	0.66	1.0
			玻璃纤维/聚酯	0.53	0.21

三、具有可设计性

纤维增强复合材料是由两种或两种以上不同强度和模量的材料组成的,而且多数又是每一铺层方向可随意设置的层合结构材料。所以,可以改变组分材料的种类、含量,以及铺层方向和顺序,使之在一定的范围内满足结构设计中材料强度、弹性和方向性的要求。这在通常金属材料的结构设计中是很难办到的。因此,复合材料不仅给设计人员提供了一种比强度、比模量高的材料,而且给设计人员提供了一种在一定范围内可随意改变性能的材料,以达到结构设计 with 材料设计高度统一的优化设计。

总之,复合材料可以改善材料的各种性能,包括力学性能和其他物理性能(如强度、刚

度、疲劳寿命、重量、抗腐蚀性、隔热、隔音……),它可以尽量发挥组分材料的某些特点以获得优于单个组分材料的综合性能。

四、力学性能有别于传统材料的一些特点

复合材料单向板由于它的组成结构特点,其弹性性能至少需用四个独立的工程弹性常数(纵向弹性模量 E_L 、横向弹性模量 E_T 、纵向泊松比 ν_{LT} 或横向泊松比 ν_{TL} 和面内剪切弹性模量 G_{LT} ,见第二章)表征,其强度性能至少需用五个基本强度参数(纵向拉伸强度 X_T 、纵向压缩强度 X_C 、横向拉伸强度 Y_T 、横向压缩强度 Y_C 和面内剪切强度 S ,见第三章)表征。而且,在外力作用下所引起的力学行为也不同于通常的金属材料,一种外力可引起多种基本变形。如单向层合板受到非材料主方向的拉伸时,除了使试件在受载方向伸长和在垂直于受载方向缩短之外,还将引起剪切变形(见图 1-3(a))。单向板受到非材料主方向的弯曲力矩时,除弯曲变形外,还将引起扭转变形(见图 1-3(b))。由彼此垂直(正交)的铺层构成的层合板(如图 1-3(c)),在图示的拉力作用下,除拉伸变形外还将引起弯曲变形。这种力学行为的复杂性在通常的金属材料中是不常见的。

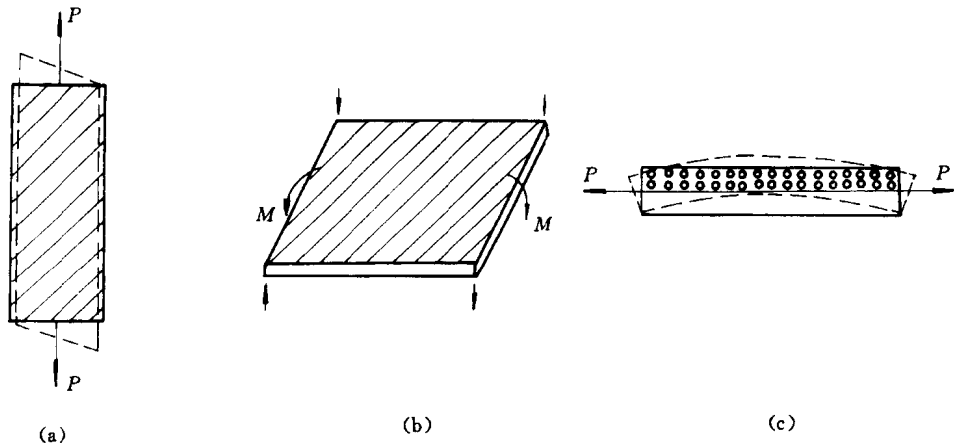
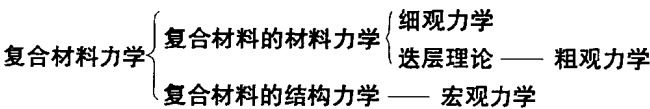


图 1-3 一种外力引起多种基本变形举例
(a)拉-剪耦合; (b)弯-扭耦合; (c)拉-弯耦合

1.1.3 复合材料力学的分类与应用范围

由于考察对象的尺度不同,力学分析被区分为微观与宏观两个体系。在传统上,微观力学的研究范围以原子、分子或晶格的大小为其尺度,宏观力学研究各种结构和元件在不同载荷及环境下的强度、变形、稳定性和冲击、振动等问题。对于复合材料力学,这种划分尚嫌粗糙,它的体系可划分如下:



细观力学 复合材料的细观力学研究单向(或单层)复合材料的平均物理性能与各相材料的物理性能和相几何之间的关系,以及研究复合材料各相内部的真实应力与应变场

分布,以作为确定复合材料性能与破坏机制的根据。此时,复合材料被视为连续的非均匀介质,它不是以原子、分子尺度量级,而是以颗粒或纤维的直径为其特征尺寸。在分析中,常常引入一“典型单元体”(有的作者称为“代表性体积单元”representative volume element)的概念。典型单元体,通常应包含有复合材料的各个相,并且有与整个复合材料相同的特征(这主要是指各相体积的比例及增强体几何分布)的最小体积。因此,它的尺寸远远大于原子、分子尺度量级,又不同于经典连续介质理论中的微分单元(differential element)。

简单说来,细观力学是以复合材料中各相材料的性能及相几何作为已知条件,来计算把复合材料视为均匀材料(即等效均匀体)的平均性能的数值。它是以各相材料性能的实验精确测定和关于相几何的准确抽象为前提的。但是在这个基础上由细观力学方法所计算的单向复合材料的平均性能,往往与实验结果有差距。如果仅是为了获得单向复合材料的性能,与其借助于细观力学计算,倒不如制成复合材料试样直接测量。细观力学的意义,在于阐明复合材料性能的机制,并作为复合材料的材料设计的理论基础。例如,通过细观力学预测复合材料的某项性能随各相材料性能及相几何变化的规律,即可在选材及工艺中按照这些规律调节各相材料及相几何,据以指导改进复合材料以获得预期的性能。

对于颗粒增强复合材料和随机分布的短纤维复合材料,它的力学分析的特殊性能唯一地体现于细观力学部分。

迭层理论——粗观力学 在迭层理论中,各单层分别被视作是均质的。由单层迭合而成的层合板的性能,取决于各单层的性能及迭层几何。可见,迭层理论主要适用于各种整齐排列的纤维及织物增强复合材料构件,如板、壳等。它所讨论的重点,是材料力学部分,即将载荷和合内力分布作为分析的已知条件。迭层理论是复合材料力学研究的重点,也是本书的重点,它在复合材料工程实践中是一种重要的工具,是复合材料工作者必须掌握的基本知识。

复合材料的结构力学 复合材料结构力学的研究对象是用复合材料组成的各种结构件。它包括静力、动力和稳定分析,以及结构优化设计等内容。在复合材料结构力学中,层合板及壳被当作具有平均性能的元件。因此在实质上,它就是非各向同性材料的结构力学。

混杂复合材料的力学分析,涉及复合材料的材料力学和复合材料结构力学两个领域。混杂复合材料及其结构件的力学分析较之普通(单一纤维增强)复合材料要复杂得多。但是,它们在分析原理及基本设计方法上都是相同或相通的。读者掌握了本书的内容,遇到混杂复合材料的力学分析是不难解决的。

1.1.4 复合材料力学分析的基本假设

本书在研究复合材料的力学分析和设计时,对研究的对象作如下基本假设:

一、层合板是连续的

认为组成复合材料构件的体积空间内充满着物质,其结构材料是密实的。即忽略由于工艺等原因在材料内部所造成的不可避免的少量空隙等缺陷,并认为相邻的各组分材料或各铺层都是紧密贴合的。由于连续性假设,使数学分析中的一些连续性概念、极限概念

以及微积分等数学工具都能应用于本书的力学分析中。

二、单向板是均匀的

认为从单向板内取出的任一部分,不论其体积大小如何,其力学性能在给定的坐标系下都是完全相同的。即不考虑组分材料之间细观结构的效应,也就是说,这里考虑的是单向板宏观的平均性能。因此,从单向板的任一点处按给定坐标系切取的典型单元体,其力学性能相同,而与典型单元体所处的地点无关。按此假设,对于多向层合板,则在同一铺层(或同一铺层方向的若干层组成的铺层组)内是均匀的,而对于不同铺层方向的层,尽管各层是同种材料,但在同一坐标系内所切取的典型单元体,其力学性能是不同的,所以多向层合板是分段均匀的。

三、单向板是正交各向异性的

单向板具有两个互相垂直的弹性对称面。一般的无纬布、经纬交织布或斜向交织布都具有一对互相垂直的弹性对称面,因此,由它们的任一种作增强体制成的单向板也都具有一对互相垂直的弹性对称面。对称面的垂直方向为材料的主方向。图 1-1 及以后的所有图中,用平行线条表示铺层方向,且均指两个主方向中模量较大的一个。多向层合板一般是各向异性的,但不一定是正交异性的。即使是单向层合板,它在坐标方向与材料主方向重合时是正交异性的,但当坐标方向不与材料主方向重合时,也呈现各向异性的性能。

四、层合板是线弹性的

认为层合板在外力作用下产生的变形与外力成正比关系,且当外力卸去后,层合板能够完全恢复其原来的形状。

五、层合板的变形是很小的

认为变形与层合板构件的原始尺寸相比通常可以略去不计。所以,在研究层合板构件的平衡和运动,以及其内部受力和变形等问题时,均可按构件的原始尺寸和形状进行计算。

1.2 应力和应变及其变换

应力和应变是描述材料力学性能的基本变量,根据材料的应力-应变关系,可以确定材料的刚度、强度、变形及失效等性能与状态。

1.2.1 应力与应力变换

一、应力

应力是物体内力的度量,它是物体内力分布的集度。

如图 1-4 所示的弹性体,在外力 P_i 作用下处于平衡状态。外力 P_i 在弹性体内各点引起内力。如果用假想中的 m 平面将弹性体切成 A 、 B 两部分,单独考察其中的一个部分,则该部分还应维持平衡状态。例如 B 部分,它将在作用于 B 部分的外力和 A 部分通过 m 平面对于 B 部分的作用下保持平衡。 A 部分通过 m 平面对于 B 部分作用的力(或者反之, B 部分通过 m 平面对于 A 部分作用的力),就是弹性体在 m 平面的内力。一般情况下,内力在 m 平面中并不是均匀分布的,为了描述内力分布的情况,常采用应力的概念。在截面上取任

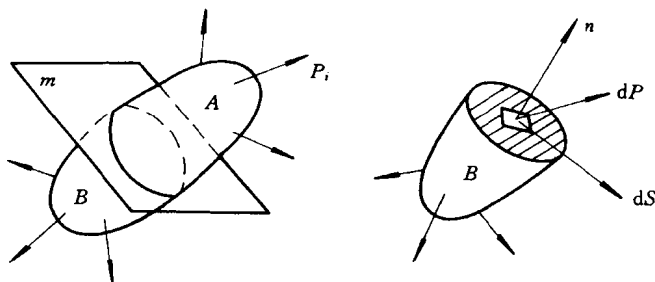


图 1-4 在外力作用下处于平衡状态的弹性体及内力示意图

一微面 dS , 若作用于此微面上的内力为 dP , 则定义

$$\sigma = \frac{dP}{dS}$$

为微面 dS 上的应力矢量, 应力 σ 不仅与力的大小有关, 还将随所取的微面方向不同而改变。例如由图 1-5 所示正截面为 F 的单向拉伸试件, 在拉力 P 作用下, 对于垂直于拉伸方向的截面, 其应力为

$$\sigma = \frac{P}{F}$$

如果取与拉伸方向成 θ 角的斜截面, 则在此截面上的应力为

$$\sigma_n = \frac{P \cos^2 \theta}{F} \quad \text{和} \quad \sigma_s = \frac{P \sin \theta}{F} \cos \theta$$

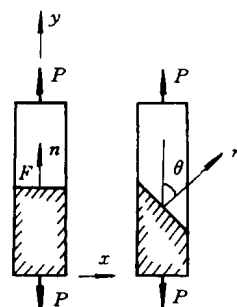


图 1-5 单向拉伸试件

其中 σ_n 称为正应力, σ_s 称为剪应力。应力是无法直接测量的, 为确定材料的应力, 必须通过一些间接的方法, 如根据材料所受的载荷、或在一定载荷下材料产生的变形(位移或应变)经应力分析方可求得。

为了便于讨论弹性体内一点的应力状态, 我们用平行于坐标平面的截面切割出一平行六面微元体, 将作用在各面上的应力分解到与坐标平行的方向上, 如图 1-6。图上垂直于作用面的应力分量 σ_{xx} 、 σ_{yy} 、 σ_{zz} 称为法向应力或正应力, 其余的平行于作用面的应力分量 σ_{xy} 、 σ_{xx} 、 σ_{yx} 、 σ_{yz} 、 σ_{zx} 、 σ_{zy} 称为剪应力。应力符号的双下标中, 第一个表示作用面的外法线方向, 第二个表示应力分量的指向。应力的正负号可按这两个下标的指向来判定。如果作用面的外法线指向坐标系中相应坐标轴的正向, 而应力分量也指向对应坐标轴的正向, 则此应力分量为正; 若两个下标的方向皆为负, 则此应力分量也为正。当两个下标中只有一个指向坐标轴的负向, 则这时应力分量就为负。图 1-6 所示的应力分量都是正的。

用简单的方法就可以证明作用于相邻的两个相互垂直的平面上的剪应力是两两相等的, 即 $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}$ 、 $\sigma_{xz} = \sigma_{zx}$ 、 $\sigma_{yz} = \sigma_{zy}$ 。因而描述弹性体内一点应力状态的应力分量只需六个, 通常可将应力分量写成一个方阵

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix}$$

对于各应力分量, 有时使用简化符号, 即法向应力 σ_{xx} 用 σ_x 代替, σ_{yy} 用 σ_y 代替, σ_{zz} 用 σ_z 代

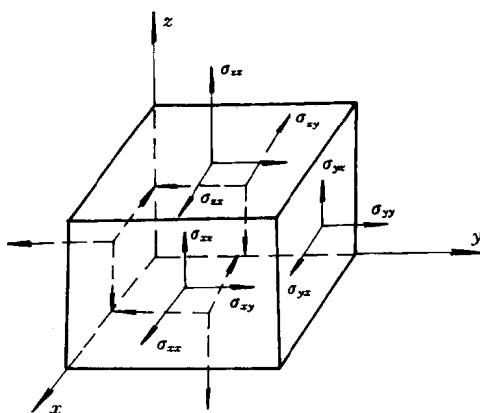


图 1-6 微元体及应力记号

替, σ_{yz} 用 σ_z 代替, σ_{zx} 用 σ_x 代替, σ_{xy} 用 σ_y 代替。

由于纤维增强复合材料大多是板状结构, 在分析复合材料的力学性能时, 往往只需考虑二维问题就够了。

二、应力变换

应力变换用于确定两个坐标系下弹性体内应力分量之间的关系, 即用原坐标系下的应力分量表示新坐标系下应力分量的关系式。对于复合材料, 一个坐标系通常选取材料主轴, 此坐标系称为正轴坐标系, 相应的应力分量称为正轴应力(图 1-7(a))。另一坐标系是任意方向的, 它通常是与结构件的几何特性联系的, 此坐标系称为偏轴坐标系, 相应的应力分量称为偏轴应力(图 1-7(b))。下面导出偏轴应力与正轴应力的关系。

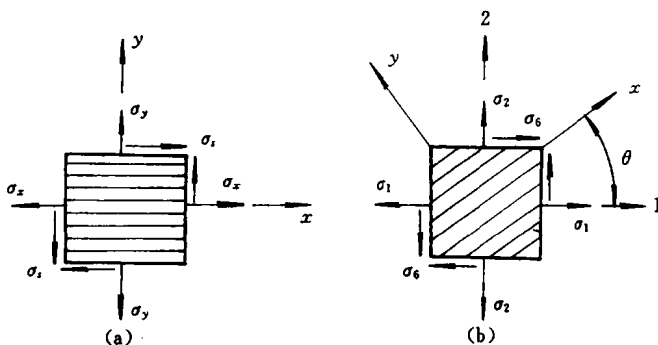


图 1-7 单向复合材料的坐标系和相应的应力分量

(a) 正轴情况; (b) 偏轴情况

图 1-7 为单向复合材料的两个坐标系: $x-y$ 为正轴坐标系, $1-2$ 为偏轴坐标系。坐标系 $1-2$ 相当于 $x-y$ 坐标系旋转一个角度 θ 。我们规定 θ 值的符号由 $x-y$ 坐标系向 $1-2$ 坐标系沿逆时针旋转为正, 顺时针旋转为负。正轴应力分量和偏轴应力分量分别用 σ_x 、 σ_y 、 σ_{xy} 和 σ_1 、 σ_2 、 σ_6 表示。现在的问题是找出用 σ_1 、 σ_2 、 σ_6 表示 σ_x 、 σ_y 、 σ_{xy} 的关系式。

首先在 $1-2$ 坐标系下的单元体上, 垂直纤维方向取单位长度, 切出一块楔形 ABC (图

1-8(a)), 此楔形 ABC 的三个边长分别为 $1, \cos\theta, \sin\theta$ 。在此楔形各边上作用的应力如图

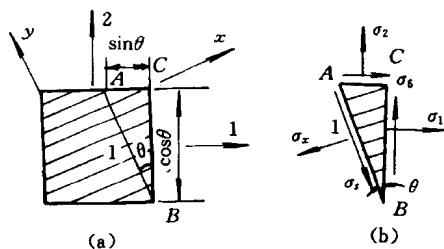
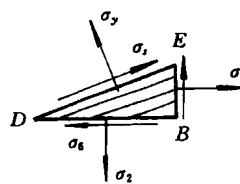


图 1-8 偏轴与正轴应力的关系

- (a) 在单元体上切取楔形 ABC ;
(b) 楔形 ABC 上的应力分量

图 1-9 偏轴与正轴应力的关系



1-8(b)。由于在 1 方向静力平衡 $\Sigma F_1 = 0$, 有

$$\sigma_1 \cos\theta + \sigma_6 \sin\theta + \sigma_x \sin\theta - \sigma_x \cos\theta = 0 \quad (1-1)$$

在 2 方向静力平衡 $\Sigma F_2 = 0$, 有

$$\sigma_2 \sin\theta + \sigma_6 \cos\theta - \sigma_x \cos\theta - \sigma_x \sin\theta = 0 \quad (1-2)$$

由上两式联立解得

$$\sigma_x = \sigma_1 \cos^2\theta + \sigma_2 \sin^2\theta + 2\sigma_6 \cos\theta \sin\theta \quad (1-3)$$

$$\sigma_y = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta + \sigma_6 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (1-4)$$

其次, 沿纤维方向取单位长度, 切出另一个楔形 DEB (图 1-9), 此楔形边长分别为 $1, \sin\theta, \cos\theta$, 各边上作用的应力如图 1-9 所示。

由于在 1、2 方向静力平衡, 可分别得到

$$\sigma_1 \sin\theta - \sigma_6 \cos\theta + \sigma_y \cos\theta - \sigma_y \sin\theta = 0 \quad (1-5)$$

$$\sigma_2 \cos\theta - \sigma_6 \sin\theta - \sigma_x \sin\theta - \sigma_x \cos\theta = 0 \quad (1-6)$$

由此可联立解得

$$\sigma_y = \sigma_1 \sin^2\theta + \sigma_2 \cos^2\theta - 2\sigma_6 \cos\theta \sin\theta \quad (1-7)$$

$$\sigma_x = -\sigma_1 \cos\theta \sin\theta + \sigma_2 \cos\theta \sin\theta + \sigma_6 (\cos^2\theta - \sin^2\theta) \quad (1-8)$$

由式 (1-4) 与式 (1-8) 得到的两个正轴剪应力, 是在两个互相垂直的相邻平面上的剪应力分量, 两个表达式是一样的。若记 $\cos\theta = m, \sin\theta = n$, 则综合上列式 (1-3)、(1-4) 及 (1-7) 三式, 可以写成矩阵形式

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_1 \end{Bmatrix} = [T_\sigma] \begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} \quad (1-9)$$

式中

$$[T_\sigma] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (1-10)$$

称为应力变换矩阵。式 (1-9) 称为幂函数形式的应力变换公式。