頻譜和分析

苏联 A. A. 哈尔凱維奇 著
徐澄波 譯

人民郵电出版社

А. А. ХАРКЕВИЧ

СПЕКТРЫ и АНАЛИЗ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1953

頻譜和分析

著者：苏联 A. A. 哈尔凱維奇
譯者：徐澄波
校訂者：蔡長年
出版者：人民邮电出版社
北京东四六条13号
（北京市書刊出版业營业許可証出字第〇四八号）
印刷者：北京市印刷一厂
發行者：新华書店

开本850×1168 1/32　　1958年7月北京第一版
印張5[illegible] 頁数93　　1958年7月北京第一次印刷
印刷字数150,000字　　統一書号：15045·总778—無195
印数1—2,600册　　定价(10)1.00元

目　　录

3303403

第一章 頻 譜

第一节 引 言

当貝努利(Бернулли)和欧拉(Эйлер)，繼之而傅里哀(Фурье)初次采用函数的三角級数展开式时①，这种展开式仅被当作解决数学物理問題的数学工具。傅里哀本人曾利用以他命名的級数来对热傳导方程进行积分。傅氏的方法成了解波动方程——弦方程和随后的电报方程——的古典方法。可是，傅氏展开式長期未能与任何物理观念發生直接的联系。甚至在發現了电振盪和电波之后，人們对傅氏展开式在物理現象上是否适用仍表怀疑。如赫芝(Герц)就对頻譜观念抱否定的态度[見他同普安卡列(Пуанкаре)的通信②]。

頻譜观念在長时期內仅为相当少的理論物理学家所采納和發展。但从二十年代起，随着無綫电技术、声学、振动力学以及一般以振动理論为基础的技术領域的蓬勃發展，頻譜观念得到了非常普遍的推广。在頻譜展开和实际振盪系統的性能之間建立了直接的联系。現象的頻譜表示法获得了公認。

不但如此，頻譜語言成了解釋与各种振盪的技术应用有关的一切方面的共同語言。运用頻譜語言，不仅能說明一些現象，而且能說明机械的性能。

沒有疑問，頻譜观念如此普遍的發展起了重大的推进作用；依靠頻譜观念，复杂的振盪現象开始为广大的技术工作人員和物理学家所能理解。

但是，頻譜观念的發展史說明，这些观念有时会“失灵”。造成了——和正在繼續造成——很大的錯誤。在一些基本問題上曾發生过長期的爭論（例如，关于無綫电傳輸中的边帶的爭論），产生了可笑的誤会(例如，对于調頻时帶寬的不正确的观念)。出現了各种

① 有趣地指出，这种展开是否可能，在当时是有爭执的。

② 在安得列也夫(Н. Н. Андреев)的著作中是有引証的。

各样的奇談怪論。正如已故的曼傑尔什达姆(Л. И. Мандельштам)說得好，只有在沒有充分理解的地方——照他說来，就是沒有“第二类理解”的地方——才可能有奇談怪論（如果因理論本身不完滿而引起的奇談怪論撇开不談的話）。

事实上，頻譜处理法是無可非难的。只要合理地运用这种方法，它永远不会引起錯誤。上述錯誤和誤解并不是方法本身的缺陷，而是不善于运用的結果。

如果不把自己的視野局限于頻譜范圍之內，而以时間处理法来补充頻譜处理法，使它更透徹，那就能避免許多錯誤。

在發展頻譜观念方面，我們① 作了不少工作。安得列也夫(Н. Н. Андреев)［文献 1, 2］第一个留意于頻譜观念，把它用在电振盪上。曼傑尔什达姆及其学生高列里克（Г. С. Горелик)，雷托夫(С. М. Рытов）等的著作［文献 19, 10—12, 27—29］对于發展頻譜观念領域中的“第二类理解”起了非常重大的作用。李特瓦克(И. М. Литвак）提出了富有成果的重要思想，李姆斯基-戈尔薩柯夫（А. В. Римский-Корсаков）指出了有趣的可能性［文献 23—25］；在發展实驗技术方面，罗德曼(М. И. Родман)［文献 26］作了很多工作。

由于新的技术部門——主要是無綫电技术，如脈冲技术、特种調变等——的發展，要求工程师更深入地掌握頻譜观念。因此，这本書的任务之一便在于闡述頻譜理論的一些基本問題，其范圍尽可能滿足現代的要求，而它的程度則稍高于高等技术学校中所授知識的平均水平。

这些問題于第一章“頻譜”中闡述。

頻譜观念的实际应用，不可避免地会要求从实驗上实現傅氏展开，也就是需要对各种現象进行諧波分析。虽然有了大量的分析方法，以及利用这些方法的分析仪器，但分析的許多基本問題至今尚未得到充分的探討，而有时則是完全不明了的。特別是对于作为測

① 指苏联——譯者.

試过程的分析和作为测試仪器的分析器的基本要求，往往根本沒有規定和討論。这大概是因为这些問題之提出有着一定的困难。但这些困难是可以克服的，并且必需設法把分析的一些原則問題加以适当的整理。这样的尝試將在第二章"分析"中进行。

与題旨直接有关、并具有一定价值的一些补充問題，放在"补录"中討論。

第二节 傅里哀級数和傅里哀积分

傅氏展开这一概念可以說是大家都知道的。因此，这里只提一些基本关系和定义。关于数学上的詳細情形，讀者可从任何教本中找到。

我們从周期性函数的定义开始：

$$f(t)=f(t+nT), \tag{2,1}$$

式中 T——称为周期的一个常数，n——任意整数（正或負的）。

定义 (2,1) 表示出周期性函数的基本特性：現象的过程周期重复，而此种周期性又是永久的，即存在于由 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的全部时間中。

由此可立即作出結論：就定义 (2,1) 的严格意义講，实际上沒有、也不可能有周期性現象。周期性函数是有用的数学抽象，它同实际現象的关系以后將加以說明。

任何——只受到一些对我們說来并不重要的数学上的限制①——周期性函数都可由三角函数的級数。

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}} \tag{2,2}$$

来表示，其和按 $-\infty$ 至 $+\infty$ 的一切整数 k 值来取。公式(2,2)也就是复数形式的傅里哀級数。这样一来，周期性函数 $f(t)$ 便由 $C_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}}$ 各項之和来表示，其中每項代表一正弦振盪。这些振盪構成一譜波

① 这是指：函数假定是有限的，成段連續的，并在一个周期內具有有限个極值（狄义赫利条件）。

序列。这意味着：各和項的頻率是基頻$\frac{1}{T}$的倍数。各个和項被称为諧波。頻率为$\frac{1}{T}$的振盪被称为第一次諧波（$k=1$）；頻率为$\frac{2}{T}$的——第二次諧波($k=2$)，依此类推。

量 C_k 称为复数振幅。它可以写成下列形式：

$$C_k=c_k e^{-j\varphi_k},$$

式中 $c_k=|C_k|$ ——便是振幅，而 φ_k——該諧波的初相。复数振幅 C_k 按下式計算

$$C_k=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\, e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt. \qquad (2,3)$$

公式(2,3)唯一地确定着(2,2)展开式的系数。关于就給定函数 $f(t)$ 作出傅氏級数的問題，至此便全部解決。

傅氏級数(2,2)也可写成实数形式

$$f(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos 2\pi k\frac{t}{T}+b_k\sin 2\pi k\frac{t}{T}\right), \qquad (2,4)$$

$\frac{1}{T}\int_{-\frac{\tau}{2}}^{\frac{\tau}{2}} e^{-j2\pi k\frac{t}{T}}dt$

$$a_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\cos 2\pi k\frac{t}{T}dt, \qquad (2,5a)$$

$=\frac{1}{-j\frac{2\pi k}{T}}\cdot\frac{1}{T}\left(e^{-j2\pi k\frac{\tau}{2T}}-e^{+j2\pi k\frac{\tau}{2T}}\right)$

$$b_k=\frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)\sin 2\pi k\frac{t}{T}dt, \qquad (2,5б)$$

$=\frac{1}{j\pi k}\sin 2\pi k\frac{\tau}{T}$ $\qquad C_1=\frac{1}{\pi}\sin 2\pi\frac{\tau}{T}$

$=\frac{1}{\pi k}\sin 2\pi k\frac{\tau}{T}$ $\qquad C_2=\frac{1}{2\pi}\sin 4\pi\frac{\tau}{T}$

$$c_0=\frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} f(t)dt. \tag{2,5в}$$

量 c_0表示函数在一周期內的平均值；它常被称为直流分量；至于量 a_k 和 b_k，則它們与早先导出的下列关系式联系着：

$$C_k=c_k\,e^{-j\varphi_k}=\frac{1}{2}(a_k-jb_k);$$

$$c_k=\frac{1}{2}\sqrt{a_k^2+b_k^2};$$

$$\operatorname{tg}\varphi_k=\frac{b_k}{a_k};\quad a_k=2c_k\cos\varphi_k;\quad b_k=2c_k\sin\varphi_k$$

这样一来，傅氏級数就通过具有所选振幅和相位的正弦函数之和来表示指定的周期函数。若我們將級数限于有限的一些項，則得到函数的近似表示。我們取的級数的項数愈多，便愈近似，我們可写出

$$f(t)\approx c_0+\sum_{k=1}^{N}\left(a_k\cos 2\pi k\frac{t}{T}+b_k\sin 2\pi k\frac{t}{T}\right). \tag{2,6}$$

当 N 以無限大为其極限时，近似式即趋于等式。

同时，重要在于近似式(2,6)对于任何 N 值常是最佳的近似，就是說，如果我們希望以三角函数多項式来近似表示周期函数，那么按公式(2,5)来确定多項式的系数，便可得到最小的均方誤差。

直到現在为止，我們只談了周期函数。現在我們試將傅氏展开用于非周期函数。为此，首先要指出，非周期函数可被看作是周期函数在周期趋于無限大时的極限情形。如果是这样的話，那末就可以对公式(2,2)取 $T\to\infty$ 时的極限。

对于周期函数，我們得

$$f(t)=\sum_{-\infty}^{+\infty} C_k e^{j2\pi k\frac{t}{T}}.$$

当取極限时，角頻率 $2\pi k\frac{1}{T}$ 离散值的序列由連續变化的流动頻率 ω 取代，而和則代之以积分，因此得①

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S(\omega)e^{j\omega t}d\omega, \tag{2,7}$$

式中
$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t}dt,$$

并假定 $f(t)$ 滿足狄义赫利条件，且在無限范圍內絕对可积。

公式(2,7)便是复数形式的傅氏积分。这个公式的意义在于我們可以用正弦波之和代表給定的非周期函数。不过，这里所講的是頻率無限接近的無限个無限小項之和。每个和項的复数振幅为無限小，它等于 $S(\omega)d\omega$。兩相鄰和項之間的頻率間隔也是無限小，它等于 $d\omega$。

假如說，傅氏級数以正弦函数之和表示周期性函数，虽然正弦函数有無限个，但其頻率具有一定的离散值；那末傅氏积分却以具有連續頻率的正弦函数之和代表非周期性函数。正如一般所說的，非周期性函数中包含着一切頻率。

为了正确地从物理意义上解釋傅氏积分，必須注意到由傅氏級数轉至傅氏积分所引起的極重要的本質变化。不了解这种变化，輕率地將屬于周期函数的概念搬用至非周期函数的領域中，便会导致严重的錯誤。

問題在于正弦函数是周期函数，这种函数永远可按(2,1)来确定。这样一来，傅氏級数便能把一个周期性函数展开成一系列的周

---

① 需要注意，$f(t)$ 是实函数，而 $S(\omega)$ 是复函数；兩函数的宗数都是实数。

期函数。所以，在这种情形下，总和（即被展开的函数）具有其各項的本質特性——周期性。

在傅氏积分的情形下，非周期函数由周期函数之和来表示。这时，总和便不再具有其各項的本質特性了。

第三节 頻譜；定义和分类

我們再回来討論傅氏級数公式(2,4)，并把它改写成

$$f(t)=c_0+\sum_{k=1}^{\infty}c_k\cos(k\omega_1 t-\varphi_k),$$

式中 $\omega_1=\frac{2\pi}{T}$ 为基頻。我們看到，复杂的周期函数 $f(t)$ 完全可由 c_k 和 φ_k 等量的总合来决定。量 c_k 总合起来称为幅度頻譜，量 φ_k 总合起来則相应地称作相位頻譜。在許多应用場合，知道幅度頻譜就已經足够了。幅度頻譜是經常用到的，所以一般談起頻譜，指的就是幅度頻譜。否則的話，就得作相应的声明。我們这里也是如此。

周期函数的頻譜可以用圖来表示。为此，我們取座标 c_k 和 $\omega=k\omega_1$。在这座标系統中，頻譜將被繪成若干离散点所組成的总体，因为对应于每一个 $k\omega_1$ 值，有一个一定的 c_k 值。由各个点組成的圖形頗不方便，因此通常取具有相应長度的垂直綫段来表示各諧波的幅度。其結果是周期函数的頻譜成为圖 1 所示的形狀。这是离散頻譜，也叫作綫狀頻譜，这一术語是从光学中借用的。圖 1 所画頻譜的第二个特征在于頻譜是諧波性的。这就是說，頻譜是由等距离的譜綫組成的，諧波頻率有着簡單的倍数关系。当然，个别的諧波，有时甚至是第一次諧波可以沒有，即它們的幅度可以等于零。不过，这并沒有破坏頻譜的諧波性。

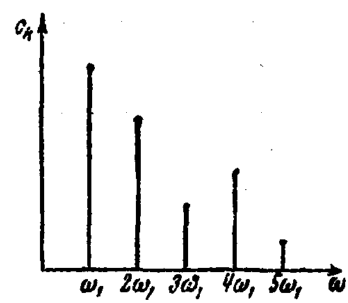

圖 1

不应認为只有周期函数才具有离散頻譜。例如，假定一复杂振盪波为兩正弦波相加之和，而該兩正弦波之頻率又是不可約的，如

ω_1 和 $\sqrt{2}\,\omega_1$。像这样的振盪波显然不是周期性的，但其频譜却是离散的，是由兩条频譜綫所構成的。

凡具有离散频譜而其譜綫在频率标度上作任意分佈的函数，盖·保尔（Г.Бор）称它为概周期函数，它具有許多有趣的特性①。

既然这样，离散频譜或綫狀频譜既可屬于周期性函数，又可屬于非周期性函数。当屬于周期性函数时，綫狀频譜一定是諧波性的。

由下列展开式所表示的概周期函数这一特殊情况有着重大的实际意义：

$$f(t)=\sum c_k\cos[(\omega_0+k\omega_1)t-\varphi_k]\ ,$$

式中 k 可取正値，也可取負値。相应于这展开式的频譜的特点在于它的譜綫是等距离的，因此，我們称此类綫狀频譜为拟諧波性的。例如，受到周期調变的振盪的频譜就是如此，在这里 ω_0 就是載频。

現在我們来談非周期性函数的频譜。我們已經知道，由于从傅氏級数轉至傅氏积分，各譜綫之間的距离無限縮小，綫条被連接起来了，因此频譜不再是离散的点子，而应被画成点子的連續序列，也就是連續曲綫，此类频譜叫作連續频譜。

不过，这里需要說明一点，我們以前把傅氏积分公式写成(2,7)的形式：

$$f(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}S(\omega)e^{j\omega t}d\omega.$$

积分号下的函数表示各个無限小項，即具有無限小振幅 dC 的振盪：

$$S(\omega)e^{j\omega t}d\omega=dCe^{j\omega t}.$$

由此求得

$$S(\omega)=\frac{dC}{d\omega}.$$

① 关于这点，可参閱盖·保尔的概周期函数——国家技术理論出版社，1934年和依·依·普利瓦洛夫（И. И. Привалов）的傅里哀級数一書中所附的概周期函数簡論［見文献22］。

这样的話，量 $S(\omega)$ 所直接表示的并不是振幅，而是所謂頻譜密度。可是，通常忽略这一細节，而称 $S(\omega)$ 为非周期性函数的复数頻譜，它的絕对值（模数）

$$\Phi(\omega)=|S(\omega)|$$

便称为頻譜。只有当我們对周期性函数和非周期性函数的一些关系式直接进行比較时，这才会引起誤会。

这样，我們便有了兩种基本不同的頻譜：綫狀頻譜和連續頻譜。諧波性的綫狀頻譜屬于周期性函数，連續頻譜則屬于非周期性函数。

可能还会遇到混合性的頻譜，它是由綫狀頻譜和連續頻譜相加得到的。如由周期信号和不規則干扰所形成的振盪波就具有这种頻譜。

在結束本节时我們要指出，各种各样的物理量的变化可以由某些时間函数来表示。这些函数的頻譜也具有相应的意义。在实际中常会碰到，例如，位移、速度、加速度、压力等力学量；电流、电压等电学量的頻譜。除此以外，我們还常对功率或能这种二次（平方）量的頻譜發生兴趣。例如在光学中，最常遇上这些量的頻譜。

第四节　有关頻譜的一些定理

現在我們来推导一些根据傅氏变換特性得到的有关頻譜的一般定理。这些定理同运算微积的定理相类似，并且是用相似的方式导出的。要知道，傅氏变換以及構成运算微积基础的拉氏变換是互相近似的。

首先我們要指出，傅氏变換是綫性的。由此直接得出結論，对于傅氏变換可以使用叠加原理。这一情形可由下列关系式来表示：

1

$$S_1(\omega)+S_2(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}[f_1(t)+f_2(t)]dt. \qquad (4,1)$$

关系式(4,1)的意义可以簡短地表述为：和的頻譜等于頻譜之和。

2

現在来証明导数的頻譜定理：假如函数 $f(t)$ 的复数頻譜为

$S(\omega)$，那末$\dot{f}(t)=\frac{df}{dt}$的复数頻譜为$j\omega S(\omega)$。导数的复数頻譜是由函数的复数頻譜乘上$j\omega$而得到的。

为了証明起見，写出表达式

$$S_{(1)}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\dot{f}(t)dt,$$

加以分部积分，得

$$S_{(1)}(\omega)=f(t)e^{-j\omega t}\Big|_{-\infty}^{+\infty}+j\omega\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)e^{-j\omega t}dt.$$

因为当$t=\pm\infty$时，由傅氏积分所表示的函数便趋于零，故

$$S_{(1)}(\omega)=j\omega S(\omega)。\tag{4,2}$$

这个証明可推广至第n級导数。分部积分n次后，我們得到第n次导数的复数頻譜（条件为当$t\to\pm\infty$，包括$(n-1)$次在內的函数的各次导数直到$(n-1)$次时均趋于零）：

$$S_n(\omega)=(j\omega)^nS(\omega)。\tag{4,3}$$

用类似的方法，可以就所論函数的积分导出复数頻譜的表达式。

写下表达式

$$S_{(-1)}(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-j\omega t}\left(\int_{-\infty}^{t}f(\tau)d\tau\right)dt,$$

加以分部积分，得

$$S_{(-1)}(\omega)=\frac{1}{j\omega}S(\omega),\tag{4,4}$$

其条件为

$$\int_{-\infty}^{+\infty}f(t)dt=0.$$

例如，对于在兩無限大間积分的奇函数，这一条件即能滿足。

現在我們来推导与原函数相差一时間迟延 τ 的函数所具之复数頻譜。我們可写出

$$S_\tau(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}f(t-\tau)dt.$$

按式子 $t_1=t-\tau$ 將变数加以簡單的更換，結果得

$$S_\tau(\omega)=e^{-j\omega\tau}S(\omega). \tag{4,5}$$

若將此关系式中的复数頻譜轉为它的模数，則得

$$|S_\tau(\omega)|=\Phi_\tau(\omega)=\Phi(\omega),$$

即当迟延时，或一般說来，当函数受到时間偏移时，其頻譜保持不变。換句話說，頻譜与初始參考时間之如何选擇無关，这也正是預期的情形。

下一个定理是頻譜搬移定理。这个問題的提法如下：被搬移一頻率 Ω 之后的頻譜当相应于怎样的函数？

旣然

$$S(\omega+\Omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j(\omega+\Omega)t}f(t)dt,$$

因而，下列函数將具有該复数頻譜

$$f_\Omega(t)=e^{-j\Omega t}f(t). \tag{4,6}$$

現在来推导某些較为复杂的关系式。取傅氏积分的表达式，

$$f_1(t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega,$$

兩边乘以 $f_2(t)$，幷在范圍 $\pm\infty$ 內对 t 加以积分，得

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)dt\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

改变右边的积分次序

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)dt \int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)e^{j\omega t}d\omega$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} f_2(t)e^{j\omega t}dt.$$

这样一来，便得到

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\omega)S_2(-\omega)d\omega。\qquad (4,7)$$

这个著名公式类似于李姆斯基——戈尔薩柯夫所导出的运算关系式（見文献23）。这公式适用于（例如）能量的計算。如果已知速度和力的頻譜或是电流和电压的頻譜，或是其乘积代表功率的任何兩个其它函数的頻譜，就能按此公式求出能量。

公式(4,7)可按实数形式写成[考虑到$S(-\omega)=S^*(\omega)$]

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi_1(\omega)\Phi_2(\omega)\cos(\varphi_1-\varphi_2)d\omega.\quad(4,8)$$

当 $f_1=f_2$ 的特殊情况时

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f^2(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\infty}\Phi^2(\omega)d\omega.\qquad (4,9)$$

上一关系式被命名为列立定理，以后我們要用到它。

利用新的符号改写公式(4,7)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)\varphi_2(t)dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu)R_2(-\nu)d\nu,$$

并以关系式

$$\varphi_2(t)=f_2(t)e^{-j\omega t}$$

来定义函数$\varphi_2(t)$。若以S_2代表函数f_2的頻譜，则根据定理(4,6)

得

$$R_2(\nu)=S_2(\omega+\nu).$$

因而

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(t)f_2(t)e^{-j\omega t}dt=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu)S_2(\omega-\nu)d\nu.$$

这样一来，如 S_1 和 S_2 分别为函数 f_1 和 f_2 的頻譜，而 S 为乘积 $f=f_1f_2$ 的頻譜；那么我們得到

$$S(\omega)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} S_1(\nu)S_2(\omega-\nu)d\nu. \qquad (4,10)$$

这式子与格林别尔格的运算定理（見文献13）相似，它通过兩函数的頻譜来給出其乘积的頻譜。

最后，我們再来推导一条公式。設

$$f(t)=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau,$$

計算这一函数的頻譜

$$S(\omega)=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\;\;t}dt\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} f_1(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega t}f_2(t-\tau)dt=$$

$$=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\tau}f_1(\tau)d\tau\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-j\omega\mu}f_2(\mu)d\mu\,.$$

这里是將积分次序变化之后，又按式子 $\mu=t-\tau$ 改換了变数。

所以，函数 $f(t)$ 的頻譜便是

$$S(\omega)=S_1(\omega)S_2(\omega), \qquad (4,11)$$