QUANXIN GONGXUE SHUOSHI RUXUE KAOSHI SHUXUE ZHISHI DIAN JIEXI

全新

工学硕士入学考试数学知识点解析

朱来义

北京理工大学出版社

全新工学硕士入学考试数学知识点解析

朱来义

北京理工大学出版社

内 容 提 要

本书由微积分、线性代数、概率论与数理统计三个部分组成，包括了工科硕士入学考试数学一、二所要掌握的所有内容。考虑到工科学生数学基础好的特点，本书就知识的综合理解与分析，解题的常见技巧和方法这两方面作了深入细致的讲解和归纳。对其中所涉及到的知识点用历届考试全真题作为例题进行分析，使学生在学习过程中能更全面地掌握这些知识，更透彻地理解这些知识中的重点和关键。另外，每章都配有大量的习题，全书后面还配有模拟试题，这有利于学生对所学知识进行消化、巩固和检查。此外本书还可作为高等数学的教学参考书。

图书在版编目(CIP)数据

D459/31

全新工学硕士入学考试数学知识点解析/朱来义编．—北京：北京理工大学出版社，1998.8
ISBN 7-81045-438-2

Ⅰ．全…　Ⅱ．朱…　Ⅲ．高等数学-研究生-入学考试-学习参考资料　Ⅳ．O13

中国版本图书馆 CIP 数据核字(98)第 18825 号

责任印制：刘京凤　责任校对：陈玉梅

北京理工大学出版社出版发行
(北京市海淀区白石桥路 7 号)
邮政编码 100081　电话 (010)68912824
各地新华书店经售
北京地质印刷厂印刷

*

787×1092 毫米　16 开本　16.75 印张　423 千字
1998 年 8 月第 1 版　1998 年 8 月第 1 次印刷
印数：1—5000 册　定价：23.50 元

前 言

近年来，工科硕士数学入学考试试题越来越侧重于知识的综合理解、分析及解题的技巧和方法，目前市场上的参考书大多数是按照考试大纲所涉及的内容进行全面的讲述，可是工科学生数学能力的特点是：基本知识掌握得比较好，一些数学理论的综合理解与分析的能力有待提高，鉴于上述原因我们编写了《全新工科硕士入学考试数学知识点解析》这本书。我们期望这有助于工科学生提高对知识的深入理解与综合分析的能力，系统而又全面地掌握解题技巧和方法，把握每一部分每一章节所述内容的重点、关键的知识点及与之相关的知识。书中所选例题大多数是历届考试的全真题，而且选取时是有针对性的，每道例题都有深入细致的分析和解答过程。为了便于学生对所学知识的消化、巩固和检查，每章都配有大量的习题，全书最后还配有模拟试题，这些习题和试题都有提示和答案。

由于时间仓促书中难免出现错误，恳请大家批评指正。

最后作者要感谢中国人民大学信息学院严守权先生和北京理工大学出版社编辑熊坤莉同志，是他们的帮助才促成了本书的出版。

朱来义

1998年5月于中国人民大学

目　　录

第一部分　微　积　分

第一章　函数、极限与连续

第二章　一元函数微分学

第三章　一元函数积分学

第四章　向量代数和空间解析几何

第五章　多元函数微积分学

第六章　无穷级数

第七章　微分方程

第二部分　线性代数

第一章　矩阵与向量

第一部分 微 积 分

第一章 函数、极限与连续

一、知识点解析

1. 由函数所满足的条件确定函数具体表达式

如果给出函数$f(x)$的具体表达式，那么求$f(x)$的极限、导数、积分就很容易了．可是题目中的函数往往是以复合函数形式、导数关系式、积分关系式、极限形式给出，因此要学会从函数所满足的条件中求出函数的具体表达式．这里尤其要注意的就是求一个函数的反函数、两个函数的复合函数．

例 1(97203)* 设函数

$$g(x)=\begin{cases}2-x, x\leqslant 0\\ x+2, x>0\end{cases}; f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$$

求$g[f(x)]$.

分析： 求$g[f(x)]$的方法就是在$g(x)$的表达式中用$f(x)$代替x.

解：

$$g[f(x)]=\begin{cases}2-f(x), f(x)\leqslant 0\\ f(x)+2, f(x)>0\end{cases}$$

注意到

$$f(x)=\begin{cases}x^2, x<0\\ -x, x\geqslant 0\end{cases}$$

因此，$f(x)\leqslant 0$的范围是$x\geqslant 0$，且$f(x)=-x$；$f(x)>0$的范围是$x<0$，且$f(x)=x^2$.

$$g[f(x)]=\begin{cases}2+x, x\geqslant 0\\ x^2+2, x<0\end{cases}$$

例 2(96308) 设函数$f(x)=\begin{cases}1-2x^2, x<-1\\ x^3, -1\leqslant x\leqslant 2\\ 12x-16, x>2\end{cases}$，求$f(x)$的反函数$g(x)$的表达式．

分析： 求$y=f(x)$的反函数的方法是从方程$y=f(x)$中解出$x=f^{-1}(y)$，再互换x与y而成$y=f^{-1}(x)$. 本题所给的$f(x)$是分段函数，因此它的反函数只能一段一段地求，还要注意$f(x)$在每一段上的值域，因为$f(x)$的值域是其反函数的定义域．

解 $x<-1$时，$f(x)=1-2x^2$，则$f(x)\in(-\infty,-1)$且由$y=1-2x^2$可解出

---

* 表示此题是 1997 年试卷二中的 3 分题，下同．

$x=\pm\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$,由于 $x<-1$,则 $x=-\sqrt{\dfrac{1-y}{2}}$,从而 $g(x)=-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}},x\in(-\infty,-1)$.

$-1\leqslant x\leqslant 2$ 时,$f(x)=x^3$,则 $f(x)\in[-1,8]$,且由 $y=x^3$ 可解出 $x=\sqrt[3]{y}$,从而 $g(x)=\sqrt[3]{x},x\in[-1,8]$.

$x>2$ 时,$f(x)=12x-16$,则 $f(x)\in(8,+\infty)$,且由 $y=12x-16$ 可解出 $x=\dfrac{y+16}{12}$,从而 $g(x)=\dfrac{x}{12}+\dfrac{4}{3},x\in(8,+\infty)$.

因此 $f(x)$ 的反函数 $g(x)$ 的表达式为

$$g(x)=\begin{cases}-\sqrt{\dfrac{1-x}{2}},x\in(-\infty,-1)\\ \sqrt[3]{x},x\in[-1,8]\\ \dfrac{x}{12}+\dfrac{4}{3},x\in(8,+\infty)\end{cases}$$

例 3(88103) 若 $f(t)=\lim\limits_{x\to\infty}t\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{2tx}$,求 $f'(t)$.

分析: 本题要求 $f'(t)$,实际上只要写出 $f(t)$ 的表达式就可求出 $f'(t)$,且 $f(t)$ 的表达式是隐含在一个极限中的,这里主要注意 t 在极限过程中是常数,在 $f(t)$ 中是变量.

解: 由于 $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$,因此

$$\begin{aligned}f(t)&=\lim_{x\to\infty}t\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2tx}\\&=t\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}\right]^{2t}\\&=t\mathrm{e}^{2t}\end{aligned}$$

$$f'(t)=(1+2t)\mathrm{e}^{2t}$$

例 4(883′05) 已知函数 $f(x)=f(x+4)$,$f(0)=0$,且在 $(-2,2]$ 上有 $f'(x)=|x|$,求 $f(9)$

分析: 对于周期函数的表达式,一般是先确定出 $(0,T]$ 或 $\left(-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]$(这里 T 是最小正周期)中的表达式,而对于其它区间中的 x,利用变量平移,使得 $x\pm nT\in(0,T]$ $\left(\text{或}\left(-\dfrac{T}{2},\dfrac{T}{2}\right]\right)$,从而可得出 $f(x\pm nT)$ 的表达式,再由 $f(x)$ 的周期性即得 $f(x)=f(x\pm nT)$ 的表达式(这里 n 是自然数).

解: 由于 $x\in(-2,2]$ 时,$f'(x)=|x|$.

因此

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t+f(0)\\&=\int_0^x f'(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

$x\in(-2,0)$ 时,$f(x)=\displaystyle\int_0^x|t|\mathrm{d}t=\int_0^x(-t)\mathrm{d}t=-\frac{x^2}{2}$;

$x\in(0,2]$ 时,$f(x)=\displaystyle\int_0^x|t|\mathrm{d}t=\int_0^x t\mathrm{d}t=\frac{x^2}{2}$,即

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2}{2}, x\in(0,2]\\ -\dfrac{x^2}{2}, x\in(-2,0]\end{cases}$$

注意到　　$9=1+2\times4$，

因此　　$f(9)=f(1+2\times4)=f(1)=\dfrac{1}{2}$.

例 5(91309)　设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内满足

$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x$$

且 $f(x)=x, x\in[0,\pi)$，求 $f(x)$ 在 $[\pi,3\pi)$ 上的表达式．

分析：本题与例 4 很类似都是利用变量平移的方法来确定函数的表达式．

解：由于

$$f(x)=x, x\in[0,\pi)$$

$x\in[\pi,2\pi)$ 时，$x-\pi\in[0,\pi)$，$f(x-\pi)=x-\pi$，从而

$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-\pi+\sin x$$

$x\in[2\pi,3\pi)$ 时，$x-\pi\in[\pi,2\pi)$，从而由上式可得

$$f(x-\pi)=(x-\pi)-\pi+\sin(x-\pi)=x-2\pi-\sin x$$
$$f(x)=f(x-\pi)+\sin x=x-2\pi-\sin x+\sin x=x-2\pi,$$

综上所述

$$f(x)=\begin{cases}x-\pi+\sin x, & x\in[\pi,2\pi)\\ x-2\pi, & x\in[2\pi,3\pi)\end{cases}.$$

例 6(95403)　设 $f'(\ln x)=1+x$，求 $f(x)$

分析：由于复合函数的导数公式为

$$(f[g(x)])'=f'[g(x)]\cdot g'(x)$$

因此，给出 $f'[g(x)]$ 的表达式，必须在表达式两边同乘以 $g'(x)$ 才能得到 $(f[g(x)])'$ 的表达式，然后利用牛顿-莱布尼兹公式

$$\int_{x_0}^{x}(f[g(t)])'\mathrm{d}t=f[g(x)]-f[g(x_0)]$$

可以得到 $f[g(x)]$ 的表达式，这样一来令 $t=g(x)$ 就可得到 $f(t)$ 的表达式，这里要注意的是：不要误认为 $f'[g(x)]=[f[g(x)]]'$.

解：由于 $[f(\ln x)]'=f'(\ln x)\cdot\dfrac{1}{x}$，

因此　　$[f(\ln x)]'=\dfrac{1}{x}\cdot(1+x)=\dfrac{1}{x}+1$

由牛顿-莱布尼兹公式可得

$$\begin{aligned}\int_1^x[f(\ln t)]'\mathrm{d}t&=f(\ln x)-f(0)\\&=\int_1^x\frac{1}{t}\mathrm{d}t+\int_1^x\mathrm{d}t\\&=\ln x+x-1\end{aligned}$$

$$f(\ln x)=\ln x+x-1+f(0)$$

令 $t=\ln x$，可得 $x=e^t$

因此　　$f(t)=t+e^t-1+f(0)$

由此可知只要预先给定 $f(0)$ 一个值，就能得到 $f(x)$ 的一个具体表达式，从而可认为 $f(0)$ 是任意常数，所求的 $f(x)$ 的表达式为

$$f(x)=e^x+x+C \quad (C\text{ 是任意常数}).$$

例 7(89303)　设 $f(x)$ 是连续函数，且

$$f(x) = x + 2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$$

求 $f(x)$

分析： 首先注意到定积分 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$ 是一个常数，因此由 $f(x)$ 的关系式知道

$$f(x)=x+2b$$

至于如何确定出常数 b，就是本题的关键．

解： 由等式两边求定积分可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \int_0^1 x\mathrm{d}x + \int_0^1 [2\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t]\mathrm{d}x$$

由此可得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{2} + 2\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x$$

解得

$$\int_0^1 f(x)\mathrm{d}x = -\frac{1}{2}$$

$$f(x)=x-1$$

2. 实际问题中函数关系式的建立

在处理这类问题时，要注意以下一些常识：

1)切线斜率是函数的导数；

2)速度是位移关于时间的导数；

3)位移是速度的积分；

4)加速度是速度关于时间的导数，是位移关于时间的二阶导数；

5)函数关于自变量的导数是函数关于自变量的变化率．

例 1(95305)　设单位质点在水平面内作直线运动，初速度 $v\Big|_{t=0}=v_0$，已知阻力与速度成正比(比例常数为 1)，问 t 为多少时此质点的速度为 $\frac{v_0}{3}$？并求到此时刻该质点所经过的路程．

分析： 由牛顿定律：物体所受外力等于质量乘以加速度，而加速度等于速度关于时间的导数，从而得到速度所满足的关系式．

解： 由牛顿定律可得

$$F=ma=mv'(t)$$

由题设知 $m=1, F=-v(t)$，从而该质点速度满足

$$-v(t)=v'(t)$$

解此微分方程得

$$v(t)=ce^{-t}$$

由初始条件 $v|_{t=0}=v_0$ 得该质点的速度函数为

$$v(t)=v_0e^{-t}$$

由题设

$$\frac{v_0}{3}=v_0e^{-t}$$

求得 $t=\ln 3$，即 $t=\ln 3$ 时，此质点的速度为$\frac{v_0}{3}$. 到此刻质点所经过的路程就是位移

$$S=\int_0^{\ln 3}v(t)\mathrm{d}t=\int_0^{\ln 3}v_0e^{-t}\mathrm{d}t=-v_0e^{-t}\Big|_0^{\ln 3}=\frac{2}{3}v_0$$

例 2(97105) 在某一人群中推广新技术是通过其中已掌握新技术的人进行．设该人群的总数为 N，在 $t=0$ 时刻已掌握新技术的人数为 x_0，在任意时刻 t 已掌握新技术的人数为 $x(t)$（将 $x(t)$ 视为连续可微变量），其变化率与已掌握新技术人数和未掌握新技术人数之积成正比，比例常数为 $k>0$，求 $x(t)$.

分析： $x(t)$ 的变化率就是 $x(t)$ 关于 t 的导数．

解： 由题意知，t 时刻已掌握新技术的人数 $x(t)$ 满足关系式：

$$x'(t)=kx(t)[N-x(t)]$$

由分离变量法得

$$\frac{\mathrm{d}x}{x(N-x)}=k\mathrm{d}t$$

两边求不定积分得

$$x(t)=\frac{N}{1-ce^{-Nkt}}$$

由初始条件 $x(t)|_{t=0}=x_0$ 可得 $c=1-\frac{N}{x_0}$,

从而
$$x(t)=\frac{N}{1-\left(1-\frac{N}{x_0}\right)e^{-Nkt}}$$

例 3(93106，93206) 设物体 A 从点(0，1)出发，以速度大小为常数 v 沿 y 轴正向运动，物体 B 从点(−1，0)与 A 同时出发，其速度大小为 $2v$，方向始终指向 A，试建立物体 B 的运动轨迹满所满足的微分方程，并写出初始条件．

分析： 依题意作图 1－1. 注意到其中的曲线是物体 B 的运动轨迹，$x=x(t)$，$y=y(t)$，曲线在 (x,y) 处的切向量就是物体 B 在 t 时刻的速度，且这一方向指向物体 A 的位置 $(0,vt+1)$，另外在 t 时刻物体 B 所经过的路程 $s(t)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 从点(−1，0)到点 (x,y) 的弧长．因此$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$为物体 B 的速度大小 $2v$.

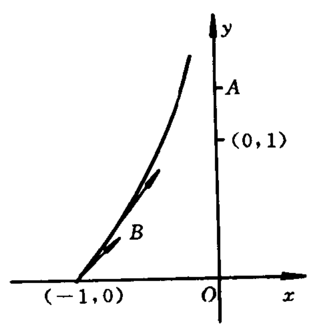

图 1－1

解： 依题意可知曲线 $y=f(x)$，在 (x,y) 处切线方向指向物体 A 的位置 $(0,vt+1)$，

因此 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{y-(vt+1)}{x}$

另外在 t 时刻物体 B 所经过的路程 $s(t)$ 就是曲线 $y=f(x)$ 从点(−1，0)到点 (x,y) 的弧长，

因此　　$$ds=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}dx$$

$$\frac{ds}{dt}=2v$$

由此可得

$$2v=\frac{ds}{dt}=\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\cdot\frac{dx}{dt}$$

由$\frac{dy}{dx}=\frac{y-(vt+1)}{x}$两边关于 x 求导得

$$\begin{aligned}\frac{d^2y}{dx^2}&=\frac{\left(\frac{dy}{dx}-v\cdot\frac{dt}{dx}\right)\cdot x-[y-(vt+1)]}{x^2}\\&=\frac{1}{x}\left(\frac{dy}{dx}-v\cdot\left(\frac{dx}{dt}\right)^{-1}\right)-\frac{1}{x}\frac{y-(vt+1)}{x}\\&=\frac{1}{x}\left[\frac{dy}{dx}-v\frac{\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}}{2v}\right]-\frac{1}{x}\cdot\frac{dy}{dx}\\&=-\frac{1}{2x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}\end{aligned}$$

因此物体 B 的运动轨迹所满足的微分方程为

$$\frac{d^2y}{dx^2}=-\frac{1}{2x}\sqrt{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

且初始条件是 $x(0)=-1,y(0)=0,\left.\frac{dy}{dx}\right|_{t=0}=\frac{1-0}{0-(-1)}=1$,即

$$\left.y\right|_{x=-1}=0,\left.y'\right|_{x=-1}=1.$$

例 4(95107)　设曲线 L 位于 xoy 平面的第一象限内,L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交,交点记为 A,已知$|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,且 L 过点$\left(\frac{3}{2},\frac{3}{2}\right)$,求 L 的方程.

分析:　题中条件“L 上任一点 M 处的切线与 y 轴总相交”就是说切线不与 y 轴平行,因而曲线 L 的函数的导数值都是有限值.本题关键就是先写出切线方程,求出与 y 轴的交点坐标,利用$|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$,建立函数关系式.

解:　设曲线 L 的方程为 $y=f(x)$,L 上任一点 $M(x,f(x))$处的切线方程为 $Y-f(x)=f'(x)(X-x)$,这里 x 是参变量,X、Y 是切线方程中的变量,直线与 Y 轴交点坐标可令 $X=0$ 得

$$Y=f(x)-f'(x)x.$$

即 A 点坐标为　　$(0,f(x)-f'(x)x)$.

再由$|\overline{MA}|=|\overline{OA}|$可得

$$|f(x)-f'(x)x|=\sqrt{x^2+[f'(x)x]^2}$$

化简得

$$f^2(x)-2f(x)f'(x)x=x^2$$

即曲线 $L: y=f(x)$ 所满足的微分方程为

$$y^2-2yy'x=x^2, y\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{2}.$$

求得该方程的解为

$$x^2+y^2=3x$$

由此可得曲线 L 的方程为

$$y=\sqrt{3x-x^2}, 0<x<3$$

例 5(96107) 设对任意 $x>0$，曲线 $y=f(x)$ 上的点 $(x,f(x))$ 处的切线在 y 轴上的截距，等于 $\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$，求 $f(x)$ 的一般表达式．

分析：本题首先由 $(x,f(x))$ 处切线方程求出该直线在 y 轴上的截距，再建立函数关系式．

解：曲线 $y=f(x)$ 在 $(x,f(x))$ 处的切线方程为

$$Y-f(x)=f'(x)(X-x)$$

该直线在 Y 轴上的截距（与 Y 轴交点的纵坐标）为

$$Y=f(x)-f'(x)x$$

由题意可得

$$f(x)-f'(x)x=\frac{1}{x}\int_0^x f(t)\mathrm{d}t$$

两边乘以 x 后再关于 x 求导可得 $f(x)$ 满足微分方程： $y'+xy''=0$.

求得通解为

$$y=c_1\ln x+c_2 \quad (c_1,c_2\text{ 是任意常数})$$

因此 $f(x)$ 的一般表达式为

$$f(x)=c_1\ln x+c_2 \quad (c_1,c_2\text{ 是任意常数}).$$

3. 极限存在性证明的准则与方法

无论是数列极限还是函数极限其存在性的证明主要是利用以下两个准则：

1)单调有界性准则：单调有界数列（或函数）必有极限

2)夹逼准则：若在 x_0 的某一去心邻域内有

$$g(x)\leqslant f(x)\leqslant h(x)$$

恒成立，且 $\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)=A$，则 $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)$ 存在且

$$\lim_{x\to x_0}f(x)=A$$

若自某项 N_0 以后有

$$g(n)\leqslant f(n)\leqslant h(n)$$

恒成立，且 $\lim\limits_{n\to\infty}g(n)=\lim\limits_{n\to\infty}h(n)=A$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ 存在且

$$\lim_{n\to\infty}f(n)=A$$

这里 $\{f(n)\}$、$\{g(n)\}$、$\{h(n)\}$ 是数列，可以把它们看作是自然数 n 的函数．

利用准则 2)时，通常用熟知的不等式将 $f(x)$ 放大成 $h(x)$，将 $f(x)$ 缩小成 $g(x)$，要求

$\lim\limits_{x\to x_0}g(x)=\lim\limits_{x\to x_0}h(x)$.

例 1(96105) 设 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,试证数列$\{x_n\}$极限存在,并求此极限.

分析: 关于数列极限的存在性证明,主要的方法是利用"单调有界数列必有极限"这一准则,这里主要是考察 $x_{n+1}-x_n$ 的符号,要注意要确定的是这种符号不要随 n 的变化而变化.

解: 首先由 $x_1=10, x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,知

$$x_n\geqslant 0, n=1,2,\cdots$$

其次由于

$$x_{n+1}-x_n=\sqrt{6+x_n}-x_n$$
$$=\frac{6+x_n-x_n^2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}=\frac{(3-x_n)(x_n+2)}{\sqrt{6+x_n}+x_n}$$

因此 $x_{n+1}-x_n$ 的符号与 $3-x_n$ 的符号相同(因为 $x_n\geqslant 0, \dfrac{x_n+2}{\sqrt{6+x_n}+x_n}\geqslant 0$). 另一方面,由 $x_1=10\geqslant 3, x_2=\sqrt{6+x_1}=4\geqslant 3$,假设 $x_n\geqslant 3$,则 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}\geqslant\sqrt{6+3}=3$,由归纳法知道对一切 n 有 $x_n\geqslant 3$,从而对一切 n 有

$$x_{n+1}-x_n\leqslant 0$$

即$\{x_n\}$是单调递减有下界的数列必有极限,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ 存在.

至于求$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,可设 $x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$,由关系式 $x_{n+1}=\sqrt{6+x_n}$,两边取极限

$\lim\limits_{n\to\infty}x_{n+1}=\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x, \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{6+x_n}=\sqrt{6+\lim\limits_{n\to\infty}x_n}=\sqrt{6+x}$得到 $x=\sqrt{6+x}$,
由此解出 $x=-2$,或 $x=3$,注意到 $x_n\geqslant 3, n=1,2,\cdots$,那么$\lim\limits_{n\to\infty}x_n\geqslant 3$,从而$\lim\limits_{n\to\infty}x_n=x=3$.

例 2(97208) 设 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)(n=1,2,\cdots)$,证明:

(1)$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ 存在, (2)级数 $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\dfrac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$收敛.

分析: 由 $a_1=2, a_{n+1}=\dfrac{1}{2}(a_n+\dfrac{1}{a_n})$可见,若 $a_n>0$,则 $a_n+\dfrac{1}{a_n}\geqslant 2\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=2$,从而 $a_{n+1}\geqslant 1$,而

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_n}-a_n\right)=\frac{1}{2a_n}(1-a_n^2)$$

知道 $a_{n+1}-a_n$ 的符号与 $1-a_n^2$ 的符号相同

证明: (1)由 $a_1=2, a_2=\dfrac{1}{2}\left(a_1+\dfrac{1}{a_1}\right)>0$,假设 $a_n>0$,那么 $a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\left(a_n+\dfrac{1}{a_n}\right)\geqslant\sqrt{a_n\cdot\dfrac{1}{a_n}}=1>0$,知道对一切 n 有

$$a_n\geqslant 1, n=1,2,\cdots$$

$$a_{n+1}-a_n=\frac{1}{2a_n}(1-a_n^2)\leqslant 0, n=1,2,\cdots$$

从而$\{a_n\}$是单调递减有下界的数列,必有极限且可求得$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=1$.

(2)注意到 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 的敛散性与其前 n 项部分和数列

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)$$

的敛散性一致，而

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}-1\right)=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_{k+1}}$$

$a_n\geqslant 1,\frac{1}{a_n}\leqslant 1,a_n\geqslant a_{n+1},a_n-a_{n+1}\geqslant 0,n=1,2,\cdots$

从而

$$\begin{aligned}S_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k-a_{k+1}}{a_{k+1}}\leqslant\sum_{k=1}^{n}(a_k-a_{k+1})\\&=(a_1-a_2)+(a_2-a_3)+\cdots+(a_n-a_{n+1})\\&=a_1-a_{n+1}\leqslant a_1=2\end{aligned}$$

由于级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 是正项级数，其部分和数列 $\{S_n\}$ 是单增数列，只要它有上界则一定收敛，由 $S_n\leqslant 2$，知道 $\{S_n\}$ 是单增有上界数列，从而 $\{S_n\}$ 收敛，$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}}-1\right)$ 收敛.

例 3(95303)　求极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)$$

分析： 由于 $n\to\infty$ 时，$\frac{1}{n^2+n+1},\cdots,\frac{1}{n^2+n+n}$ 中，n 相对于 n^2 来说是无穷小量，可以舍去，加上也不影响极限，以此来对原式进行放大和缩小.

解： 由于

$$\frac{k}{n^2+2n}\leqslant\frac{k}{n^2+n+k}\leqslant\frac{k}{n^2},k=1,2,\cdots,n$$

因此

$$\frac{n+1}{2(n+2)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+2n}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2+n+k}\leqslant\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}=\frac{1}{n^2}\cdot\frac{n(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2n}$$

注意到　$\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2(n+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{2n}=\frac{1}{2}$

由夹逼准则可得

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^2+n+1}+\frac{2}{n^2+n+2}+\cdots+\frac{n}{n^2+n+n}\right)=\frac{1}{2}$$

例 4(96303)　设函数 $f(x)$ 在区间 $(-\delta,\delta)$ 内有定义，若当 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，恒有 $|f(x)|\leqslant x^2$，则 $x=0$ 必是 $f(x)$ 的

(A)间断点　　(B)连续而不可导点

(C)可导的点且 $f'(0)=0$　　(D)可导的点且 $f'(0)\neq 0$

分析： 由 $|f(x)|\leqslant x^2$ 知 $f(0)=0$，且 $\left|\frac{f(x)}{x}\right|\leqslant|x|$，再结合夹逼准则就能得出结论.

解： 由于 $x\in(-\delta,\delta)$ 时，$|f(x)|\leqslant x^2$，首先有

$$|f(0)|\leqslant 0,从而\ f(0)=0$$