现代数学基础丛书

# 近代调和分析方法及其应用

● 韩永生 著

科学出版社

# 内 容 简 介

本书十分精炼地介绍了调和分析的主要内容和方法，侧重七十年代以来的新发展，其中包括八十年代以来取得的重大成果．近代调和分析对偏微分方程发展的影响是巨大的，本书以 Lipschitz 区域的 Dirichlet 问题为例，介绍调和分析在偏微分方程中的应用．

本书可供大学高年级学生、研究生、数学工作者参考，也可作为调和分析的基础教材．


现代数学基础丛书

**近代调和分析方法及其应用**

韩永生 著

责任编辑 石小龙 杜小杨

科学出版社出版

北京东黄城根北街 16 号

邮政编码：100717

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1988 年 6 月第 一 版 开本：850×1168 1/32

1997 年 8 月第二次印刷 印张：5 5/8

印数：8761-10760 字数：140,000

ISBN 7-03-000402-7/O・111

**定 价：12.00 元**

# 前 言

本讲义是根据作者1986年3月在南开大学数学所偏微分方程年"近代调和分析讲座"的讲稿整理而成的。

调和分析从产生到发展都是与微分方程的研究密切相关的，特别是五十年代以来，由 Calderón 和 Zygmund 建立和发展起来的一整套奇异积分理论在微分方程研究中得到广泛的应用。本讲义的目的在于介绍近代调和分析所研究的基本问题、使用的基本工具和方法以及这些方法在微分方程研究中的应用。因此，只要具有 Stein 和 Weiss 合著的"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces"一书第一章的基础知识，就可以毫无困难地阅读前五章中绝大部分内容。至于在调和分析研究领域内的一些重要结果，由于证明复杂，所占篇幅较长，我们只是适当地介绍，对有兴趣的读者，我们给出了参考文献以便查阅。

本讲义的具体安排是：第一章主要讨论 Hardy-Littlewood 极大函数和 Calderón-Zygmund 分解，它们是调和分析研究中十分基本、十分重要的工具，在以后各章中，极大函数在许多不等式估计中起了重要的作用，而许多基本定理都是用 Calderón-Zygmund 分解来统一处理的。第二章讨论 $A_p$-权函数，我们从研究极大函数的加权不等式这个问题出发，引入 $A_p$-权函数类，进而讨论 $A_p$-权函数的基本性质，着重介绍了反向 Hölder 不等式。$A_p$-权函数理论不仅在目前调和分析的研究中是一个十分活跃的领域，而且在微分方程的研究中也得到越来越多的应用。鉴于Giaquinta的"Multiple Integrals in the Calculas of Variations and Nonlinear Elliptic Systems"一书和 Stredulinsky 的"Weighted Inequalities and Degenerate Elliptic Partial Differential Equations"一书对反向 Hölder 不等式和 $A_p$-权函数在微分方程研究中的应用已经做了

详细的讨论，所以对 $A_p$-权函数在微分方程中的应用我们只给出了有关的文献. 第三章讨论 BMO 函数空间. BMO 最初产生于微分方程的研究，在近代调和分析中，BMO 作为 $L^\infty$ 的替代空间以及作为 Hardy 空间 $H^1$ 的对偶空间,引起了人们的极大关注. 特别是八十年代刚刚发现并证明的所谓"$T1$"定理,是近代调和分析发展中所取得的重大成果之一. 而"$T1$"定理的证明是应用 BMO 空间最突出的例子之一. 考虑到内容的安排,有关 BMO 的这些重要结果都放到第四章和第五章中去了. 同样地，BMO 空间在微分方程中也有许多应用,这可以在 Giaquinta 的书里找到,我们没有作详细介绍. 第四章讨论 $H^p$ 空间. 我们在简略地介绍单位圆内经典的 $H^p$ 空间之后，着重介绍了七十年代以来发展起来的 $H^p$ 空间的实变理论，这就是 $H^p$ 空间的极大函数刻划、原子刻划和分子刻划. 通过 $H^p$ 空间的对偶空间，Calderón-Zygmund 算子在 $H^p$ 空间上的作用以及算子在 $H^p$ 空间中的内插，说明了原子 $H^p$ 空间的优越性. 由于篇幅所限，我们没有介绍乘积区域和齐性空间上的 $H^p$ 空间理论，有兴趣的读者可以通过参考文献找到这方面的内容. 第五章讨论 Calderón-Zygmund 奇异积分理论. 我们从简单的卷积算子出发,介绍了 Calderón-Zygmund 理论的基本思想、方法和应用. 最后介绍的 Calderón-Zygmund 算子是在伪微分算子的研究中建立和发展起来的,Coifman和 Meyer 的长篇论文"Au-dela des Operafeurs Pseudo-Differentiels"对此作了详细讨论，因此我们没有提及. 第六章讨论 Lipschitz 区域上 Laplace 方程的边值问题. 在这一章我们用到了前面五章所介绍的几乎所有的方法，它突出地反映了调和分析的方法如何具体地应用于微分方程的研究. 由于这部分的内容较新,结果又较多,特别是方程组问题还没有完全解决，所以我们着重介绍了 Lipschitz 区域上 Dirichlet 问题的 $L^2$ 和 $L^p$ 理论.

本讲义主要取材于 Stein 的"Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions"; Stein 和 Weiss 的"Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces";Jean-Lin Journé 的

"Calderón-Zygmund Operators, Pseudo-Differential Operators and the Cauchy Integral of Calderón"; Dahlberg 和 Kenig 的 "Harmonic Analysis and Partial Differentia Equations" 以及 Kenig 的"Recent Progress on Boundary Value Problems on Lipschitz Domains."

作者十分感激偏微分方程年组织委员会，特别是王柔怀先生和张恭庆先生的邀请. 孙和生先生、陈恕行和仇庆久教授给作者许多鼓励和支持;王文生同志在整理讲稿中付出了大量劳动;南开大学数学所给予作者大量的照顾和关心，作者愿意借此机会表示衷心的感谢. 此外，作者还十分感激程民德先生，邓东皋教授和 G. Weiss 教授多年来的教导和培养。

由于作者水平有限,加之时间仓促,在讲义中一定存在不少缺点和错误,欢迎批评指正。

韩永生

1986 年 7 月

## 《现代数学基础丛书》编委会

# 目　　录

# 第一章　Hardy-Littlewood 极大函数

## §1. 引　　言

根据 Lebesgue 基本定理，对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$，我们有

$$(1.1)\qquad \lim_{r\to 0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}f(y)dy=f(x),$$

其中 $f$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的局部可积函数，$B(x,r)$ 是以 $x$ 为中心，$r$ 为半径的球，$m(B(x,r))$ 是球 $B(x,r)$ 的 Lebesgue 测度。

为了研究极限(1.1)，我们考虑另一个量，即在(1.1)左边用"sup"代替"$\lim\limits_{r\to 0}$"：这就是极大函数，记作 $M(f)$。因为我们仅注意该函数的大小而不去考虑函数正、负相消部分，我们将以 $|f|$ 代替 $f$。这样，我们就定义 $f$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数为

$$(1.2)\qquad M(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy.$$

显然，并不排除 $M(f)(x)$ 在某些点处取无穷的情形。

Hardy-Littlewood 极大函数在调和分析的研究中占有极其重要的地位，并且有许多重要的应用。我们知道，实变理论的基本思想是与集合、函数、积分和微分等概念紧密相关的，其中积分的微分理论就是 Lebesgue 积分理论的重要课题，Hardy-Littlewood 极大函数便是研究这一课题的主要工具。关于极大函数的一个基本结论是它满足所谓的弱型不等式，而证明这一结论的关键是某一类型的覆盖引理。在这一章里，我们不但要研究上述内容，而且要给出 $\mathbf{R}^n$ 中一般开集的 Whitney 分解。把函数分解成主要部分和次要部分，是 Calderón-Zygmund 推广 Riesz 的"太阳升引理"后所创立和发展起来的基本实变方法，它在近代调和分析的研究中具有广泛的应用。本章我们将给出著名的 Calderón-Zygmund 分解

的证明，进一步，为得到 Hardy-Littlewood 极大函数在 $L^p(\mathbf{R}^n)$ $(1<p<\infty)$上的结果，我们要介绍 Marcinkiewitz 内插定理的一个特殊形式. 最后,我们要讨论 Hardy-Littlewood 极大函数和调和函数非切向收敛的关系.

## §2. Hardy-Littlewood 极大函数

**定义**(2.1) 设 $f$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上局部可积函数,我们定义

$$(2.2)\qquad M(f)(x)=\sup_{r>0}\frac{1}{m(B(x,r))}\int_{B(x,r)}|f(y)|dy$$

是 $f$ 的 Hardy-Littlewood 极大函数，其中 $B(x,r)$, $r>0$, 表示是以 $x$ 为中心，$r$ 为半径的球，$m(B(x,r))$ 是球 $B(x,r)$ 的 Lebesgue 测度.

我们给出几个简单的例子.

例 1: 设 $n=1$, $f=\chi_{[0,1]}$, 即 $[0,1]$ 区间上的特征函数,则

$$M(f)(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{|x|+1}, & \text{如果}\quad x<0,\\ 1, & \text{如果}\quad 0\leqslant x\leqslant 1,\\ \dfrac{1}{x}, & \text{如果}\quad x>1.\end{cases}$$

例 2: 设 $n=1$, $f(x)=|x|^{-\frac{1}{p}}$, $p>1$, 则存在常数 $c_p$, 仅与 $p$ 有关,使得

$$M(f)(x)=c_pf(x).$$

为了研究极大函数进一步的性质,我们需要一些定义和记号:

**定义**(2.3) 设 $g(x)$ 是 $\mathbf{R}^n$ 上的实函数，对每一个 $\alpha>0$, 考虑集合 $\{x\in\mathbf{R}^n:|g(x)|>\alpha\}$, 我们定义这个集合的 Lebesgue 测度为 $g(x)$ 的分布函数,记作 $\lambda_g(\alpha)$, 或 $\lambda(\alpha)$.

容易验证,对任意 $g\in L^p(\mathbf{R}^n)$, 有

$$\int_{\mathbf{R}^n}|g(x)|^pdx=p\int_0^\infty\alpha^{p-1}\lambda(\alpha)d\alpha.$$

特别地，当 $p=\infty$ 时，$\|g\|_\infty=\inf\{\alpha:\lambda(\alpha)=0\}$。

下面我们将证明本章的主要定理，即所谓"极大函数定理"。

**定理**(2.4) 设 $f$ 是定义在 $\mathbf{R}^n$ 上的函数，

(a) 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，则 $M(f)(x)$ 几乎处处有限，

(b) 如果 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则对 $\alpha>0$，

$$(2.5)\qquad |\{x\in\mathbf{R}^n:\ M(f)(x)>\alpha\}|\leqslant\frac{A}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|dx,$$

其中 $A$ 是仅与维数 $n$ 有关的常数，而(2.5)称作 $M(f)$ 满足弱(1,1)型；

(c) 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$1<p\leqslant\infty$，则 $M(f)\in L^p(\mathbf{R}^n)$，且存在 $A_p$ 使得

$$(2.6)\qquad \|M(f)\|_p\leqslant A_p\|f\|_p,$$

其中 $A_p$ 是仅依赖于 $p$ 和维数 $n$ 的常数，而(2.6)称作 $M(f)$ 满足强 $(p,p)$ 型或简称作 $M(f)$ 满足 $(p,p)$ 型。

Lebesgue 基本定理可以作为定理(2.4)的直接推论。

**推论**(2.7) 如果 $f\in L^p(\mathbf{R}^n)$，$1\leqslant p\leqslant\infty$，或更一般地，$f$ 局部可积，则

$$\lim_{r\to 0}\frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)}f(y)dy=f(x)$$

对几乎处处的 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立，这里 $|B(x,r)|=m(B(x,r))$。以下我们都用此记号表示某集合的 Lebesgue 测度。

在证明定理(2.4)之前，我们作如下说明：

(1) 定理(2.4)关于(c)的结论对于 $p=1$ 是不成立的，即 $f\to M(f)$ 不是 $L^1(\mathbf{R}^n)$ 上的有界算子，这可以由例1得到证明。

(2) Stein 最近证明了(c)中的常数 $A_p$ 实际上仅仅依赖于 $p$ 而与维数 $n$ 无关。他的证明用到了 Littlewood-Paley-Stein 理论，具体可看[1]。

定理的证明依赖于§3中 Vitali 型覆盖引理。为了进一步理解极大函数弱型不等式的实质，我们引进所谓的"二进极大函数"

$M_d(f)$：

$$M_d(f)(x)=\sup_{\substack{x\in Q\\ Q\text{是二进方体}}}\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy, \tag{2.8}$$

这里所谓二进方体是指形如 $[j_1 2^k,(j_1+1)2^k]\times\cdots\times[j_n 2^k,(j_n+1)2^k]$ 的方体，其中 $j_i\in\mathbf{Z}$，$k\in\mathbf{Z}$，$i=1,2,\cdots n$。

值得注意的是二进方体有以下基本性质：若 $Q_1$ 和 $Q_2$ 是两个二进方体，则要么 $Q_1\subseteq Q_2$ 或 $Q_2\subseteq Q_1$，要么 $Q_1\cap Q_2=\phi$. 换言之，任意两个二进方体要么有包含关系，要么不相交——此时以及以后我们称两个方体不相交均指方体的内部不相交.

对于二进极大函数 $M_d(f)$，我们直接证明它满足弱(1,1)型，即对任意 $\alpha>0$，存在常数 $A$ 使得

$$|\{x\in\mathbf{R}^n:\ M_d(f)(x)>\alpha\}|\leqslant\frac{A}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|dx. \tag{2.9}$$

我们记 $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ 是满足下述不等式中的极大二进方体

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|dx>\alpha, \tag{2.10}$$

也就是说如果 $Q$ 是一个二进方体且对某个 $Q_j\subsetneqq Q$，则

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(x)|dx\leqslant\alpha.$$

我们要证明 $\{x\in\mathbf{R}^n:\ M_d(f)(x)>\alpha\}=\bigcup Q_j$. 显然，$\bigcup\limits_j Q_j\subseteq\{x\in\mathbf{R}^n:\ M_d(f)(x)>\alpha\}$，这是因为若 $x\in\bigcup\limits_j Q_j$，则存在某个 $j_0$，使得 $x\in Q_{j_0}$. 根据 $\{Q_j\}$ 的定义，我们有

$$M_d(f)(x)\geqslant\frac{1}{|Q_{j_0}|}\int_{Q_{j_0}}|f(y)|dy>\alpha.$$

这说明 $x\in\{x\in\mathbf{R}^n:\ M_d(f)(x)>\alpha\}$. 反之，若 $x\in\{x\in\mathbf{R}^n:\ M_d(f)(x)>\alpha\}$，则根据 $M_d(f)$ 的定义，存在一个二进方体 $Q$ 使得 $x\in Q$，同时还有

$$\frac{1}{|Q|}\int_Q|f(y)|dy>\alpha.$$

对于这个二进方体 $Q$，一定存在一个极大的二进方体 $Q_i$ 使得 $Q\subseteq Q_i$. 这就证明了 $x\in Q$ 从而 $x\in\bigcup_i Q_i$.

为了证明 $M_d(f)$满足弱(1,1)型,我们仅需要说明 $\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是相互不交的二进方体集合,因为这样我们就有

$$|\{x\in\mathbf{R}^n: M_d(f)(x)>\alpha\}| = \left|\bigcup_i Q_i\right| = \sum |Q_i|$$

$$\leqslant \sum \frac{1}{\alpha}\int_{Q_i}|f(x)|dx = \frac{1}{\alpha}\int_{\bigcup_i Q_i}|f(x)|dx \leqslant \frac{1}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|dx.$$

$\{Q_i\}_{i=1}^{\infty}$ 是相互不交的二进方体集合这一事实可以由上面指出的二进方体所具有的基本性质立即得到，因为如果有两个 $Q_{i_1}$ 和 $Q_{i_2}$ 相交,则一定有 $Q_{i_1}\subseteq Q_{i_2}$ 或者 $Q_{i_2}\subseteq Q_{i_1}$，再由$\{Q_i\}$的极大性推出 $Q_{i_1}=Q_{i_2}$.

从上面的证明可以看到，集合 $\{x\in\mathbf{R}^n: M_d(f)(x)>\alpha\}$ 可以分解成 $\bigcup_i Q_i$,其中 $Q_i$ 是具有一定性质的二进方体。但是，对于一般的集合 $\{x\in\mathbf{R}^n: M(f)(x)>\alpha\}$ 是不能得到如此的“正规分解”。这时我们要依赖于下面的 Vitali 型覆盖引理.

**引理** (2.11) (Vitali 型覆盖引理) 设 $E$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中一个可测子集，球族 $\{B_\alpha\}$ 覆盖 $E$ 且球 $B_\alpha$ 的直径是有界的，则存在互不相交的可列球族 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\sum_k |B_k| \geqslant c|E|,$$

其中 $c$ 是仅与维数有关的常数。

我们将在 § 3 中给出上述覆盖引理的证明.

现令 $E_\alpha=\{x\in\mathbf{R}^n: M(f)(x)>\alpha\}$，显然 $E_\alpha$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个开集,所以对于任意的 $x\in E_\alpha$，存在一个以 $x$ 为中心的球 $B_x$ 使得

$$\frac{1}{|B_x|}\int_{B_x}|f(y)|dy>\alpha.$$

由此我们得到

$$|B_x| < \frac{1}{\alpha}\int_{B_x}|f(y)|dy \leqslant \frac{1}{\alpha}\|f\|_1 < \infty$$

对一切 $x \in E_\alpha$ 成立．同时，当 $x$ 取遍 $E_\alpha$ 时，$B_x$ 将覆盖 $E_\alpha$．由引理(2.11)，我们可以选取互不相交的可列球 $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$，使得

$$\sum_k |B_k| \geqslant c|E_\alpha|.$$

于是我们有

$$\int_{\bigcup_k B_k} |f(y)|dy > \alpha\sum_k |B_k| \geqslant c\alpha|E_\alpha|.$$

这就证明了定理(2.4)中(b)的结论．同时，这也证明了定理(2.4)中(a)关于 $p=1$ 的结论．

现在我们证明定理(2.4)中关于(c)的结论．显然，当 $p=\infty$ 时，(c)中结论是成立的且 $A_\infty=1$．为了证明$1<p<\infty$ 的结论，我们可以利用一般算子的内插结果，在 §6 中我们将给出这方面的结果和证明．这里，我们利用对函数进行适当分解的方法，证明(c)中关于 $1<p<\infty$ 的结论．这种分解函数的思想是调和分析研究中的主要思想之一，以后我们还将不断地给出这种思想的应用．

设 $f \in L^p\,(1<p<\infty)$，$f_1(x)=f(x)$，其中 $|f(x)| \geqslant \frac{\alpha}{2}$，$\alpha$ 是任意固定的正数，$f_1(x)=0$ 当 $|f(x)|<\frac{\alpha}{2}$ 时，则 $|f(x)| \leqslant |f_1(x)| + \frac{\alpha}{2}$．于是

$$M(f)(x) \leqslant M(f_1)(x) + \frac{\alpha}{2}.$$

所以

$$\left\{x \in \mathbf{R}^n:\ M(f)(x) > \alpha\right\} \subsetneq \left\{x \in \mathbf{R}^n: M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}.$$

这样我们就得到

$$|\{x \in \mathbf{R}^n: M(f)(x) > \alpha\}| \leqslant \left|\left\{x \in \mathbf{R}^n:\ M(f_1)(x) > \frac{\alpha}{2}\right\}\right|$$

$$\leqslant \frac{2A}{\alpha}\int_{\mathbf{R}^n}|f_1(x)|dx = \frac{2A}{\alpha}\int_{\{x\in\mathbf{R}^n:|f(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}|f(x)|dx.$$

其中用到了定理 (2.4) 中 (b) 的结论以及 $f_1\in L^1(\mathbf{R}^n)$ 的事实。所以，

$$\begin{aligned}\int_{\mathbf{R}^n}(M(f))^p(x)dx &= p\int_0^\infty \alpha^{p-1}|E_\alpha|d\alpha\\ &\leqslant p\int_0^\infty \alpha^{p-1}\left(\frac{2A}{\alpha}\int_{\{x:|f(x)|>\frac{\alpha}{2}\}}|f(x)|dx\right)d\alpha\\ &\leqslant 2Ap\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|\left(\int_0^{2|f(x)|}\alpha^{p-2}d\alpha\right)dx\\ &= \frac{2^pAp}{p-1}\int_{\mathbf{R}^n}|f(x)|^p dx.\end{aligned}$$

这就证明了定理 (2.4) 中关于 (c) 的结论。

定理 (2.4) 关于 (a) 中的结论可直接由 (c) 的结论得到。定理 (2.4) 证完。

我们现在证明推论 (2.7)：令

$$f_r(x) = \frac{1}{|B(x,r)|}\int_{B(x,r)} f(y)dy,\quad r>0 \tag{2.12}$$

我们知道若 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则当 $r\to 0$ 时，$\|f_r-f\|_1\to 0$ 这样，存在子序列 $\{r_k\}\to 0$，使得 $f_{r_k}\to f$ 对几乎处处 $x\in\mathbf{R}^n$ 成立。剩下我们只需要证明极限 $\lim\limits_{r\to 0} f_r(x)$ 对几乎处处 $x\in\mathbf{R}^n$ 存在。为此设

$$\Omega g(x) = \overline{\lim_{r\to 0}}\, g_r(x) - \underline{\lim_{r\to 0}}\, g_r(x), \tag{2.13}$$

其中 $g\in L^1(\mathbf{R}^n), x\in\mathbf{R}^n, g_r$ 如(2.12)所定义。如果 $g$ 是具有紧支集的连续函数，则 $g_r\to g$ 一致地成立，因此 $\Omega g(x)=0$。如果 $g\in L^1(\mathbf{R}^n)$，则由定理 (2.4) 中 (b) 的结论

$$|\{x\in\mathbf{R}^n: 2Mg(x)>\varepsilon\}|\leqslant\frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

显然，
$$\Omega g(x)\leqslant 2Mg(x).$$

因此，

$$|\{x\in \mathbf{R}^n:\ \Omega g(x)>\varepsilon\}|\leqslant \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

现对 $f\in L^1(\mathbf{R}^n)$，$f$ 可以分解为 $f=h+g$，其中 $h$ 是具有紧支集的连续函数，而 $g$ 具有充分小的 $L^1$ 范数。由于 $\Omega(f)\leqslant \Omega(h)+\Omega(g)$，$\Omega(h)\equiv 0$，所以

$$|\{x\in \mathbf{R}^n:\Omega(f)(x)>\varepsilon\}|\leqslant |\{x\in \mathbf{R}^n:\Omega(g)(x)>\varepsilon\}|$$
$$\leqslant \frac{2A}{\varepsilon}\|g\|_1.$$

通过选取 $g$ 的 $L^1$ 范数任意小可以知道，对任给 $\varepsilon>0$，$|\{x\in \mathbf{R}^n:\Omega(f)(x)>\varepsilon\}|=0$。这证明了 $\lim\limits_{r\to 0} f_r(x)$ 几乎处处存在，推论(2.7)获证。

## §3. Vitali 型覆盖引理

我们证明引理(2.11)。首先阐明挑选 $\{B_k\}$ 的准则：我们尽可能大地选取 $B_1$，使得 $B_1$ 的直径不小于 $\frac{1}{2}\sup\{B_\alpha$ 的直径$\}$。显然，这样的 $B_1$ 是存在的，尽管它不一定是唯一的。不妨设 $B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_k$ 已经挑选完毕，我们如下挑选 $B_{k+1}$：在 $\{B_\alpha\}$ 中与 $\{B_1,B_2,\cdots,B_k\}$ 不相交的球族里尽可能大地挑选 $B_{k+1}$ 使得 $B_{k+1}$ 的直径不小于 $\frac{1}{2}\sup\{B_\alpha$ 中与 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 不相交球的直径$\}$。这样我们选出了可列球：$B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_k$，$\cdots$。有两种情况应该考虑：首先，如果所选出的球列是有限的，且在 $B_k$ 停止，这说明在 $\{B_\alpha\}$ 中没有球与 $B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_k$ 不相交，因此，对任意 $x\in E$，一定存在一个 $B_{\alpha_0}\in\{B_\alpha\}$ 使得 $x\in B_{\alpha_0}$ 且 $B_{\alpha_0}$ 与 $B_1$，$B_2$，$\cdots$，$B_k$ 中的某一个相交。我们设 $B_i$ 是第一个与 $B_{\alpha_0}$ 相交的在 $\{B_k\}$ 中的球。显然，$B_i$ 的直径不小于 $B_{\alpha_0}$ 直径的一半。于是 $B_{\alpha_0}\subseteq 5B_i$，这里 $5B_i$ 表示与 $B_i$ 同心半径扩大 5 倍的球。这就证明了 $E\subseteq \bigcup\limits_{j=1}^{k} 5B_j$，从而得到 $|E|\leqslant \left|\bigcup\limits_{j=1}^{k} 5B_j\right|\leqslant \sum\limits_{j=1}^{k} |5B_j|\leqslant$

$5^n\sum_{i=1}^{k}|B_i|$. 其次我们考虑所选出的球列 $\{B_k\}$ 是无限的情形. 如果此时 $\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|=\infty$,则结论自然成立.不妨设 $\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|<\infty$,记 $B_k^*=5B_k$,我们断言 $E\subseteq\bigcup_{k=1}^{\infty}B_k^*$.由此可立即得到引理(2.11)的结论. 为证明断言,我们只需要证明 $B_\alpha\subseteq\bigcup_k B_k^*$ 对球族 $\{B_\alpha\}$ 中的每一个球 $B_\alpha$ 成立. 当然,我们可以认为 $B_\alpha$ 不是所选出球列 $\{B_k\}$ 中的球. 由 $\sum_{k=1}^{\infty}|B_k|<\infty$ 可知 $B_k$ 的直径趋于 0,当 $k\to\infty$ 时. 于是存在 $k$ 使得 $B_{k+1}$ 的直径小于 $\frac{1}{2}B_\alpha$ 的直径. 同时我们不妨假设 $k$ 是满足此性质中最小的. 我们有 $B_\alpha$ 必须与 $\{B_1, B_2, \cdots, B_k\}$ 中的某一个相交,否则,应该有 $B_{k+1}$ 的直径不小于 $B_\alpha$ 直径的一半. 设 $B_\alpha$ 与 $B_j$ 相交,$1\leqslant j\leqslant k$. 同理还可推出 $B_\alpha$ 的直径不大于 $B_j$ 直径的两倍,再由简单的几何事实得出 $B_\alpha\subseteq 5B_j$. 引理 (2.11) 至此证完.

## §4. $\mathbf{R}^n$ 中的开集分解

我们知道,直线上的任何一个开集都可以唯一地分解成可列个开区间的并集. 但当维数 $\geqslant 2$ 时,情况就并非如此简单.本节我们将给出的开集分解有许多应用,其分解思想是由 Whitney 首先引入的,故有时亦称为开集的 Whitney 分解. 我们说 $Q$ 是 $\mathbf{R}^n$ 中的一个方体,是指 $Q$ 是闭的,其边平行于坐标轴. $\mathrm{diam}(Q)$ 记作 $Q$ 的直径,$\mathrm{dist}(Q,F)$ 记作 $Q$ 与集合 $F$ 的距离.

**定理** (4.1) (Whitney 分解定理) 设 $F$ 是给定的闭集,则存在方体集合 $\mathscr{F}=\{Q_1, Q_2, \cdots, Q_k, \cdots\}$,使得

(1) $\bigcup_k Q_k=\Omega=F^c$;

(2) $\{Q_k\}$ 互不相交;

(3) $c_1\mathrm{diam}(Q_k)\leqslant\mathrm{dist}(Q_k, F)\leqslant c_2\mathrm{diam}(Q_k)$.