Problèmes Aux Limites Dans
Les Équations Aux Dérivées Partielles
J. L. Lions
1967 2^e édition
Les Presses de l'Université de Montréal

偏微分方程的边值问题

[法] J. L. 里翁斯 著
李 大 潜 译
上海科学技术出版社出版
(上海瑞金二路 450 号)
新华书店上海发行所发行 上海日历印刷厂印刷
开本 787×1092 1/32 印张 4.75 字数 102,000
1980 年 3 月第 1 版 1980 年 3 月第 1 次印刷
印数 1— 10,000
书号: 13119·814 定价: 0.46 元

目　　录

引　　言

本讲义可作：A)研究 Sobolev 空间的引论；B)研究椭圆型边值问题的引论.

要对方向 A)进一步研究，可参看

Aronszajn-Smith, Theory of Bessel Potentials, (I), (II), Annales Institut Fourier, 1961 和即将出版的；

A. P. Caldéron, Conférence de Berkeley 1960;

E. Gaglioardo, 在正文中所引用的工作及 Riarche di Matematica, t. 8(1959), p. 24～51;

J. L. Lions, Théorèmes de Trace et d'interpolation, (I)…(V), Annali della Scuola Norm. Sup. di Pisa (1959), (1960); Journal de Liouville, Math. Annalen (1963), Summa Brasiliensis (1963);

J. L. Lions-E. Magenes, Problèmes aux limites non homogènes (IV), Annali di Pisa, (1961);

S. M. Nikolskii, Usperki Mat. Nauk, t. XVI (1961), p. 63～111(其中可找到有关这方面的许多苏联工作的文献)；

L. Nirenberg, Cours de Pisa 1958 (Annali di Pisa, 1959).

在方向 B)，由于时间不够，我们没有阐明当 L^p, $p\neq 2$ 时的理论——请参见：

S. Agmon, Annali di Pisa (1959), p. 405～448;

S. Agmon-A. Douglis-L. Nirenberg, Comm. Pure Applied Maths., (1959), p. 623～727;

F. Browder, Proc. Nat. Acad. Sc. USA, 45 (1959), p. 365～372, Indagationes Math. XXII (1960), p. 145～169 以及作者自 1960 年起在 Math. Annalen 上的一些文章;

M. Schechter, 自 1958 年起在 Comm. Pure Applied Maths. 上发表的工作以及 E. Magenes 同作者关于非齐次问题的理论的工作 (Annali Scuola Norm. Pisa, 16 (1962), p. 1～44 及其中的文献).

补充说明: 还参见 C. B. Morrey Jr. 的报告, Bull. Amer. Math. Soc., No. 4, July 1962.

第 1 章

某些函数空间

1. 记号——在 R^n 的一开集上的广义函数

1.1　恒以 Ω 表示 R^n 的一开集，Ω(或 R^n)的一般点是

$$x=(x_1,\ \cdots,\ x_n);\ dx=dx_1\cdots dx_n.$$

用 $\mathscr{D}(\Omega)$ 表示在 Ω 中无穷可微且在 Ω 中紧致支集的(复值的)函数的空间；自然地，若 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，$\varphi$ 的支集一般依赖于 φ！对 φ 的导数的记号规定如下：若 j 是一组 n 个 $\geqslant 0$ 的整数，

$$j=(j_1,\ \cdots,\ j_n),$$

置

$$D^j\varphi=\frac{\partial^{j_1+j_2+\cdots+j_n}}{\partial x_1^{j_1}\cdots\partial x_n^{j_n}}\varphi.$$

$\mathscr{D}(\Omega)$上的伪拓扑　对下文来说，下面的概念将是充分的：若 φ_m 是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中的一个序列，说在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中 $\varphi_m\to 0$，如果成立

1°）φ_m 的支集落在 Ω 的一个固定的紧致集中.

2°）对任何 j，$D^j\varphi_m\to 0$ 在 Ω 中均匀地成立.

1.2　Ω 上的广义函数

用$\mathscr{D}'(\Omega)$(称为 **Ω 上的广义函数空间**)表示 $\mathscr{D}(\Omega)$ 的**对偶空间**，即 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的线性连续泛函的空间.于是，若 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$，又若 $\langle T,\ \varphi\rangle$ 表示它与 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$ 的数量积，

$$\varphi\to\langle T,\ \varphi\rangle$$

就是 $\mathscr{D}(\Omega)$ 上的一个连续的线性的泛函. 换言之, 若 $\varphi_m\to 0$ 在 $\mathscr{D}(\Omega)$ 中成立, 那末 $\langle T,\ \varphi_m\rangle\to 0$.

例 1.1 若 f 是 Ω 上的一**局部可和**的函数, 可验证 $\varphi\to\langle f,\ \varphi\rangle=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx$ 定义 Ω 上的一个广义函数.

1.3 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$ 的导数

定义 1.1 若 $T\in\mathscr{D}'(\Omega)$, 又若 $j=(j_1,\ \cdots,\ j_n)$, $j_k\geqslant 0$ 整数, 则 D^jT 是由下式定义的广义函数:

(1.1) $$\langle D^jT,\ \varphi\rangle=(-1)^{|j|}\langle T,\ D^j\varphi\rangle,$$

于此

$$|j|=j_1+\cdots+j_n.$$

练习 验证它的确定义一广义函数.

练习 验证若 $f=T$ 是在 Ω 上的一个 $|j|$ 次连续可微的函数, 那末用 (1.1) 式定义的 D^jf 与普通的导数 D^jf 全同. [注意, 两个在 Ω 上局部可和的函数 $f,\ g$ 在广义函数意义下全同, 当且仅当它们几乎处处相等.]

我们将赋予 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 以**弱拓扑** 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $T_m\to T$, 若对于所有的 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$, $\langle T_m,\ \varphi\rangle\to\langle T,\ \varphi\rangle$.

可以验证下述重要的性质:

若在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $T_m\to T$, 那末在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中 $D^jT_m\to D^jT$.

2. 空 间 $W^{m,p}(\Omega)$

2.1 用 $L^p(\Omega)$ 表示在 Ω 上 p 次方可和的函数 f (的类)的空

间；f 在 $L^p(\Omega)$ 中的模是

$$(2.1)\qquad \|f\|_{L^p(\Omega)}=\left(\int_\Omega |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

我们恒假设 $\qquad 1<p<\infty.$

练习 证明 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $L^p(\Omega)$ 中稠密.

2.2 空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是空间 $L^p(\Omega)$ 的拓广. 首先注意任何 $f\in L^p(\Omega)$ 确定 Ω 上的一个广义函数(N°1)，仍记为 f，于是能考虑一切阶数的导数 D^jf；一般说，它们是 Ω 上的广义函数，现提出

定义 2.1 用 $W^{m,p}(\Omega)$ 表示 $u\in L^p(\Omega)$ 且使

$$(2.2)\qquad D^ju\in L^p(\Omega) \text{ 对一切 } |j|\leqslant m \text{ 成立}$$

的函数(类)的空间.

若 $m=0$，$W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ $(D^0u=u)$.

这无疑是一个向量空间，给它以模：

$$(2.3)\qquad \|u\|_{W^{m,p}(\Omega)}=\left(\sum_{|j|\leqslant m}\int_\Omega |D^ju|^p dx\right)^{1/p}.$$

于是有

定理 2.1 装备以模(2.3)的空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是完备的；于是它是一 Banach 空间.

证 设 u_α 是 $W^{m,p}(\Omega)$ 中对模 (2.3) 的一 Cauchy 序列. 于是对每个 $j(|j|\leqslant m)$，D^ju_α 是 $L^p(\Omega)$ 中的一个 Cauchy 序列；因为 $L^p(\Omega)$ 是完备的，得到

$$(2.4)\qquad D^ju_\alpha\to v_j \text{ 在 } L^p(\Omega) \text{ 中成立，} v_j\in L^p(\Omega).$$

但很易于验证，若 $u_\alpha\to v$ 在 $L^p(\Omega)$ 中成立，那末 $u_\alpha\to v$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中成立，于是(参看. 1.3)，$D^ju_\alpha\to D^jv$ 在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 中

成立.

与(2.4)相比较，得到 $v_j = D^j v$，以致对一切 j ($|j| \leqslant m$)，$D^j v \in L^p(\Omega)$，于是 $v \in W^{m,p}(\Omega)$，而 $u_\alpha \to v$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中成立，证毕.

注 2.1 若 $p=2$，$W^{m,2}(\Omega)$ 是一 Hilbert 空间. 通常，将置

$$W^{m,2}(\Omega) = H^m(\Omega). \tag{2.5}$$

若 $u, v \in H^m(\Omega)$，其数量积由下式给出:

$$(u, v)_{H^m(\Omega)} = \sum_{|j| \leqslant m} \int_\Omega D^j u \overline{D^j v}\, dx. \tag{2.6}$$

3. $W^{m,p}(\Omega)$ 的自反性

3.1 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的线性连续泛函

对每个 j，$|j| \leqslant m$，映射

$$u \to D^j u \tag{3.1}$$

是 $W^{m,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$ 的一个线性连续映射，而 $W^{m,p}(\Omega)$ 被给以最不精细的拓扑，它用 $|j| \leqslant m$ 的一切映射(3.1)为连续来描绘.

(利用 Hahn-Banach 定理)可得到: 对 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一切线性连续泛函 $u \to L(u)$，存在一族函数 f_j，

$$f_j \in L^{p'}(\Omega), \tag{3.2}$$

于此

$$1/p + 1/p' = 1, \tag{3.3}$$

使成立

$$L(u) = \sum_{|j| \leqslant m} \langle f_j, D^j u \rangle = \sum_{|j| \leqslant m} \int_\Omega f_j(x) D^j u(x)\, dx. \tag{3.4}$$

自然地，f_j 不是唯一确定的.

重要注记 $W^{m,p}(\Omega)$ 的对偶的元素 L 一般不是 Ω 上的广义函数，我们将重新详细地回到这一点.

3.2 从(3.4)我们将推出

定理 3.1 对于 $1<p<\infty$，空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 是自反的.

证 设 u_α 是属于 $W^{m,p}(\Omega)$ 的一有界集合中的一个序列；必须证明（对自反性的必要充分条件）能从序列 u_α 中抽出一序列 u_β，使 u_β 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中弱收敛. 换言之，使存在 $u\in W^{m,p}(\Omega)$，且

$$L(u_\beta)\to L(u) \tag{3.5}$$

对于 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一切连续线性泛函 L 成立.

但由于 $D^j u_\alpha$ 属于 $L^p(\Omega)$ 的一有界集合 $(|j|\leqslant m)$，而 $L^p(\Omega)$ 是自反的，所以能抽出一个序列 u_β，使得对 $|j|\leqslant m$，$D^j u_\beta$ 在 $L^p(\Omega)$ 中弱收敛. 这必然在 $L^p(\Omega)$ 中弱成立 $D^j u_\beta\to D^j u$，于是由(3.4)立刻得到(3.5).

上面的证明显然具有一般的特性；它可用于一切空间 E，它装备以最不精细的拓扑，此拓扑用 E 到自反 Banach 空间 $F_i(i=1,\cdots,\nu)$ 中的线性映射 $\Pi_i:E\to F_i$ 的连续性来描绘.

3.3 $W^{m,p}(\Omega)$ 的均匀凸性(补)

首先回忆下述定义：一 Banach 空间 E 被称为**均匀凸**，若对所有 $\varepsilon>0$，$0<\varepsilon\leqslant 2$，存在一个数 $\delta(\varepsilon)$，使对一切 f，$g\in E$，$\|f\|_E=\|g\|_E=1$，$\|f-g\|_E\geqslant\varepsilon$，有 $\left\|\dfrac{f+g}{2}\right\|_E\leqslant 1-\delta(\varepsilon)$.

与一个均匀凸的模相等价的模不必定是均匀凸的，于是有兴趣的空间是那些能提供一个均匀凸模的空间.

设 $E_1, E_2, \cdots, E_\nu$ 是一族均匀凸的空间；若对乘积空间 $E=\prod_{i=1}^{\nu} E_i$ 装配一个模

$$\|f\|=\left(\sum_{i=1}^{\nu}\|f_i\|_{E_i}^p\right)^{1/p},$$

可以证明(用反证法证明) E 是均匀凸的.

因为由别处已知(Clarkson)空间 L^p 是均匀凸的，由此得到空间 $W^{m,p}(\Omega)$ 装配以模(2.3)是均匀凸的.

(显然，一切均匀凸的空间是自反的，这重新给出定理3.1).

4. $W^{m,p}(\Omega)$ 的子空间

在 $W^{m,p}(\Omega)$, $m\geqslant 1$ 与 $W^{0,p}(\Omega)=L^p(\Omega)$ 之间的一个很重要的不同是：一般说空间 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中不是稠密的，为使信服这一点，这里有一个基本但有效的方法，首先我们置下述定义：

定义 4.1 用 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中的完备化.

我们来证明

命题 4.1 若 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，那末在 Ω 上几乎处处(p. p.)等于 u 而在 Ω 外几乎处处等于 0 的函数 $\tilde{u}$ 属于 $W^{m,p}(R^n)$.

证 对于 $\varphi\in\mathscr{D}(\Omega)$，函数 $\tilde{\varphi}$(用类似于 $\tilde{u}$ 的方式定义)属于 $\mathscr{D}(R^n)$，且

$$\|\tilde{\varphi}\|_{W^{m,p}(R^n)}=\|\varphi\|_{W^{m,p}(\Omega)}.$$

因此映射 $\varphi\to\tilde{\varphi}$ 由连续性延拓为 $W_0^{m,p}(\Omega)\to W^{m,p}(R^n)$ 的一个线性连续映射，且若 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$，则 u 在此映射中的象

不是别的就是结果中的那个 $\tilde{u}$.

应用 取 Ω 为一球（仅仅为确定概念起见!），于是在 Ω 中等于 1 的函数是在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中，m 任意. 可是 $\tilde{u}$（如命题 4.1 那样定义）不在 $W^{1,p}(R^n)$ 中；事实上，$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}$ 是由球面 $\partial\Omega$（Ω 的界面）所支撑的测度，于是 $\notin L^p(R^n)$. 于是 $u\notin W_0^{m,p}(\Omega)$，这很好地证明了在此情形 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中不是稠密的.

这种推理的方式容易适应于无界开集的情况，假设 Ω 的余集不是“太小”. 我们将在更后面明确这一点. 现在先来证明

命题 4.2 若 $\Omega=R^n$，那末 $\mathscr{D}(R^n)$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中是稠密的.

证 通过截断及正规化. 设 $M\in\mathscr{D}(R^n)$，

$$M=\begin{cases}1 & |x|\leqslant 1\\ 0 & |x|\geqslant 2\end{cases}\qquad |x|=(x_1^2+\cdots+x_n^2)^{\frac{1}{2}};$$

置
$$M_R(x)=M(x/R),\ R>0.$$

若 $u\in W^{m,p}(R^n)$，可证明当 $R\to\infty$ 时 $M_Ru\to u$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中成立，于是可见由紧致支集函数所形成的 $W^{m,p}(R^n)$ 的子空间是稠密的.

现设 $u\in W^{m,p}(R^n)$，紧致支集. 设 ρ_k 是 $\mathscr{D}(R^n)$ 的一正规序列，即

$$\begin{cases}\rho_k\in\mathscr{D}(R^n),\ \ \rho_k\geqslant 0,\ \displaystyle\int_{R^n}\rho_k(x)dx=1,\\ \rho_k\text{ 的支集}\subset\text{以原点为心，半径 }\varepsilon_k\to 0\text{ 的球中.}\end{cases}$$

于是 $u*\rho_k\in\mathscr{D}(R^n)$，且 $u*\rho_k\to u$ 在 $W^{m,p}(R^n)$ 中成立，这就完成了证明.

在 N°6 我们将给出在 Ω 上使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 成立的充要条件.

在后面几章中我们将研究 $W^{m,p}(\Omega)$ 的另外的子空间.

5. 空 间 $W^{-m,p'}(\Omega)$

定义 5.1 用 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 表示 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 的对偶空间 $\left(\frac{1}{p}+\frac{1}{p'}=1\right)$.

因为 $\mathscr{D}(\Omega)$ 在 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 中稠密，可以将 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 视为 Ω 上广义函数空间 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 的一个子空间:

$$\mathscr{D}(\Omega)\subset W^{-m,p'}(\Omega)\subset\mathscr{D}'(\Omega).$$

$W^{-m,p'}(\Omega)$ 的广义函数的结构由下述定理给出:

定理 5.1 Ω 上的一个广义函数 T 在 $W^{-m,p'}(\Omega)$ 中的充要条件是能将其写为

$$T=\sum_{|j|\leqslant m}D^j g_j,\ g_j\in L^{p'}(\Omega). \tag{5.1}$$

注 分解(5.1)不是唯一的.

证 设 $u\to L(u)$ 是 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 上的一个线性连续泛函. 由 Hahn-Banach 定理，它可延拓为 $W^{m,p}(\Omega)$ 上的一线性连续泛函，对于它，我们已知道其形式[见 (3.4)]. 于是，存在 $f_j\in L^{p'}(\Omega)$，使

$$L(u)=\sum_{|j|\leqslant m}\langle f_j,\ D^j u\rangle,\ u\in W_0^{m,p}(\Omega).$$

若取 $u\in\mathscr{D}(\Omega)$，那末

$$L(u)=\langle\sum_{|j|\leqslant m}(-1)^{|j|}D^j f_j,\ u\rangle,$$

其中尖括号表示在 $\mathscr{D}'(\Omega)$ 与 $\mathscr{D}(\Omega)$ 间的对偶.

于是能将 L 视为广义函数 $\sum_{|j|\leq m}(-1)^{|j|}D^j f_j$，由此置 $g_j=(-1)^{|j|}f_j$ 就得到(5.1)。

6. 使 $W^{m,p}(\Omega)=W_0^{m,p}(\Omega)$ 的充要条件

6.1 m-p' 极的集合

定义 6.1 设 X 是 R^n 的一闭集，用 $W_X^{-m,p'}$ 表示支集包含在 X 中的 $W^{-m,p'}(R^n)$ 的广义函数的空间. 显然，$0\in W_X^{-m,p'}$；称 X 是 $[m;p']$ 极，若

$$W_X^{-m,p'}=\{0\}. \tag{6.1}$$

$[m;p']$ 极的集合是"小"的. 例如：若 X 有正的测度，那末它不是 $[m;p']$ 极；事实上，包含在 X 中的测度 >0 的紧致的特征函数是在 $W_X^{-m,p'}$ 中.

因为 $W^{m+1,p}(R^n)\subset W^{m,p}(R^n)$，故有

$$W^{-m-1,p'}(R^n)\supset W^{-m,p'}(R^n),$$

且因此：

若 X 是 $[m+1;p']$ 极，则它必是 $[m;p']$ 极，其逆不真.

更后面将可看到，对于足够大的 m，$W^{m,p}(R^n)$ 被包含在 R^n 上的连续函数空间中，于是 $W^{-m,p}(R^n)$ 包含 Dirac 测度；于是，对于足够大的 m，一个集合仅当是空集时才是 $[m;p']$ 极.

再拿起命题 4.1 中的映射 $u\to\tilde{u}$，这里 $\tilde{W}_0^{m,p}(\Omega)$ 表示 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 在此等距映射下的象；于是它是 $W^{m,p}(R^n)$ 的一个闭的子空间，有

命题 6.1 $\tilde{W}_0^{m,p}(\Omega)\equiv W^{m,p}(R^n)$ 当且仅当 $C\Omega$($=\Omega$ 的补集或余集)是 $[m;p']$ 极时成立.

证 事实上，$\widetilde{W}_0^{m,p}(\Omega)$的极空间由使

$$\langle T, \tilde{u}\rangle = 0 \text{ 对一切 } u \in W_0^{m,p}(\Omega) \text{ 成立}$$

的 $T \in W^{-m,p'}(R^n)$所组成；这等价于

$\langle T, \tilde{u}\rangle = 0$ 对一切 $u \in \mathscr{D}(\Omega)$成立，即：在 Ω 上 $T=0$. 设 $T \in W_X^{-m,p'}$, $X = C\Omega$, 由此就得到命题.

6.2 现在可以研究 $W^{m,p}(\Omega)$ 与 $W_0^{m,p}(\Omega)$ 是否可能恒等的问题.

命题 6.2 若 $W^{m,p}(\Omega) = W_0^{m,p}(\Omega)$, 那末 $C\Omega$ 是 $[m; p']$ 极.

证 (1) 首先证明 $C\Omega$ 是零测度.

若不然，必存在 R^n 中的一个有界连通开集 Q, 使

(6.2) $$Q \cap C\Omega \text{ 有测度} > 0,$$

且 $$Q \cap \Omega \neq \emptyset.$$

设 f 是在 Ω 中取值为 1 的函数，而 θ 是 $\mathscr{D}(R^n)$的一函数使在 $Q \cap \Omega$ 上，$\theta = 1$. 函数 $u = \theta f$ 在 $W^{m,p}(\Omega)$ 中，于是在 $W_0^{m,p}(\Omega)$中，而因此 $\tilde{u} \in W^{m,p}(R^n)$（见命题 4.1)，且

$$\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = \left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}.$$

可是在 Q 上 $\left(\frac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim} = 0$, 于是在 Q 上 $\frac{\partial \tilde{u}}{\partial x_i} = 0$, 于是 $\tilde{u}$ 在 Q 上几乎处处等于常数. 可是 $\tilde{u}$ 在 $Q \cap \Omega$ 上取值 1, 在 $Q \cap C\Omega$ 上取值 0, 于是 $Q \cap C\Omega$ 是零测度——这与 (6.2) 矛盾，于是 $C\Omega$ 是零测度.

(2) 设 $U \in W^{m,p}(R^n)$, u 是 U 在 Ω 上的限制；$u \in W^{m,p}(\Omega)$, 于是 $\in W_0^{m,p}(\Omega)$, 于是 $\tilde{u} \in W^{m,p}(R^n)$ 且因此 $(U - \tilde{u}) \in W^{m,p}(R^n)$. 但显然 $U - \tilde{u} = 0$ 在 Ω 上几乎处处成立，且根据

(1)，于是有 $U-\tilde{u}=0$. 于是 $U\in W_0^{m,p}(\Omega)$，这就证明了 $\widetilde{W}_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(R^n)$. 这样由命题 6.1 就得到结论.

命题 6.3 若 $C\Omega$ 是$[1;\ p]$及$[m;\ p']$极，那末

$$W_0^{m,p}(\Omega)=W^{m,p}(\Omega).$$

证 设 $u\in W^{m,p}(\Omega)$. 问题在于证明 $u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 仍考虑 $\tilde{u}$，它是由 u 在 Ω 之外用零来延拓而得到的. 于是 $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}\in W^{-1,p}(R^n)$，且在 Ω 上 $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}=0$，因此，$\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}\in W_X^{-1,p}$，$X=C\Omega$. 但 X 是$[1;\ p]$极，因此 $\dfrac{\partial\tilde{u}}{\partial x_i}-\left(\dfrac{\partial u}{\partial x_i}\right)^{\sim}=0$. 更一般地，$D^j(\tilde{u})-(D^ju)^{\sim}=0$，$|j|\leqslant m$. 因此 $\tilde{u}\in W^{m,p}(R^n)$. 但因为 $C\Omega$ 是$[m;\ -p']$极，u 在 Ω 上的限制是在 $W_0^{m,p}(\Omega)$中(命题 6.1)；但这就是 u，因此，$u\in W_0^{m,p}(\Omega)$. 证毕.

现在观察是否由“$X[m;\ p']$极”导至“$X[1;\ p]$极”(对于此情况，命题 6.2 及 6.3 提供一必要充分条件).

首先证明下面的结果，它指明了$[m;\ p']$极的性质的局部特征.

命题 6.4 使 X 是 $[m;\ p']$ 极的充要条件是对任何紧致的 K，$X\cap K$ 是$[m;\ p']$极.

证 必要性是显然的，证明其充分性.

设 $T\in W_X^{-m,p'}$. 必须证明 $T=0$. 设 M_R 是已在命题 4.2 的证明中所引入的序列，于是当 $R\to\infty$ 时，$M_RT\to T$ 在 $W^{-m,p'}(R^n)$中成立(容易验证)，且 $M_RT\in W_{X\cap K_R}^{-m,p'}$，其中 K_R 是球 $|x|\leqslant 2R$，因此 $M_RT=0$，由此得到结论.

现在来推出