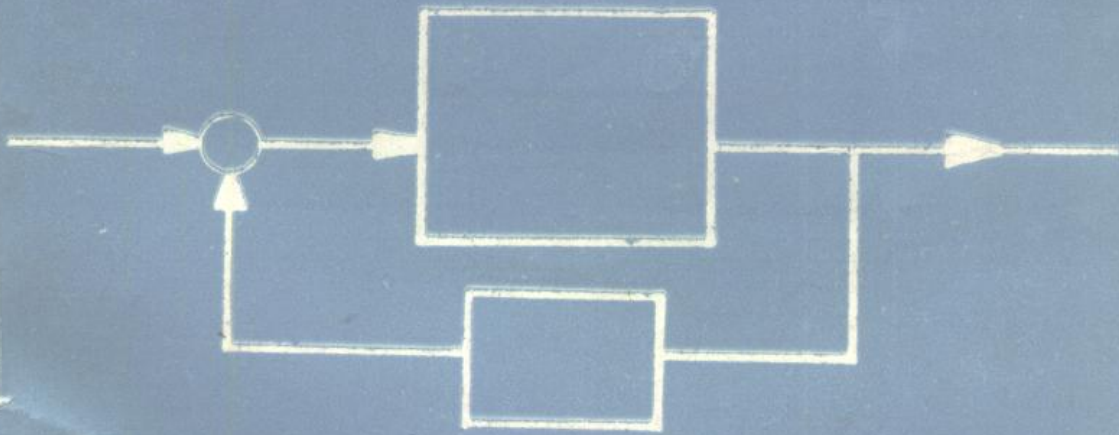


信号与系统

例题及习题

王继森 编著

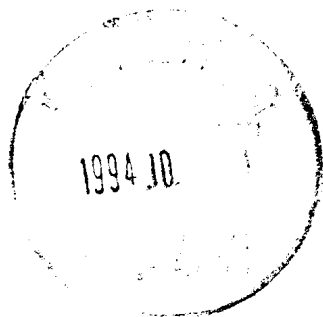


083

科学技术文献出版社

信号与系统例题及习题

王 继 森 编 著



科学技术文献出版社

9410192

(京)新登字130号

信号与系统例题及习题

王继森 编著

科学技术文献出版社出版

(北京复兴路15号 邮政编码100038)

中国科学技术信息研究所重庆分所印刷厂印刷
新华书店重庆发行所发行 各地新华书店经售

*

787×1092毫米 16开本 19.5印张 491千字

1994年4月第1版 1994年4月第1次印刷

印数：1—2500册

科技新书目：310—102

ISBN 7-5023-2171-3/TN·132

定 价：14.60元

335 1

内 容 简 介

本书共分六章：信号与系统的基本概念，连续和离散系统的时域分析，连续信号与系统的频域分析，连续信号与系统的复频域分析，离散信号与系统的Z域分析，连续和离散系统的状态变量分析。全书共选编典型例题112题，习题250题，书末附有习题答案。

本书可供高等工科院校无线电技术、通信、电子工程等专业的师生使用，也可作为广大自学者、特别是报考电类专业的研究生深入学习“信号与系统”课程的辅导材料。

ZF73/22

前 言

“信号与系统”是无线电技术、通信、电子工程等专业的一个重要技术基础课。它的任务是研究确定信号通过线性时不变系统传输或处理的基本理论和基本分析方法。其理论性强，运用现代数学的概念和方法较多，是一门较难学习但又必须学好的专业基础课程。

在多年的数学实践中，深知学生在学习“信号与系统”课时，不仅需要典型例题加深对所学内容的理解，而且需要做一定数量的习题来巩固所学知识。但是，培养学生综合解决问题的能力乃是高校的重要任务之一，具体到“信号与系统”课程中，需有一定数量带综合性的例题和习题对学生训练，而在目前的教科书中尚感不足。为此，在历年教学实践基础上编写了本书。

本书共分六章：信号与系统的基本概念；连续和离散系统的时域分析；连续信号与系统的频域分析；连续信号与系统的复频域分析；离散信号与系统的Z域分析；连续和离散系统的状态变量分析。每章的开始扼要地介绍了基本理论，给出了公式、表格，便于查用；接着列出了例题及习题内容要点；最后是例题、习题。本书共列举例题112道，选编习题250道，书末附有习题答案。

目前，信号、电路与系统研究的重点普遍转向离散、数字方面。本书在例题与习题的编排上，连续与离散并列，并强化了离散系统内容，以逐步适应这种转向。这样做，是把系统（连续的和离散的）看作一个整体，既强调了连续和离散系统的共性，也突出了它们各自的特点，无疑有助于对基本概念和分析方法的理解和掌握。

本书在例题中，力求做到一题多解，每解给出详细的解题步骤，并对结果作必要的物理分析，澄清某些易于出现的错误概念，引出一些带规律性的结论。在习题中，除选编一些典型题外，侧重选编了难度较大、灵活性较强的综合题。例题和习题的类型，包括了概念题、证明题、计算题和应用题。其主要来源是历年教学中积累的思考题、习题、试题及近年来部分高校招考研究生试题，其中大多数例题和习题与国内“信号与系统”教材不重复。因此，本书可作为高校“信号与系统”课程的配套教材或教学参考书，也可作为广大自学者、报考电类专业的研究生深入学习“信号与系统”课程的辅导材料。

本书由王继森编著，参加编写辅助工作的有：郑建宏、郑建新、邓培碧、王梅、张卫等同志。

本书经重庆大学全寿春副教授审阅，重庆邮电学院饶舜卿副教授主审了本书，他们提出了许多宝贵意见和建议，重庆邮电学院领导和教材建设委员会的各位专家对本书的编写和出版给予了极大关怀和支持，教研室老师对本书编写给予了积极支持和帮助，编者在此一并表示衷心地感谢。

由于编者水平有限，难免有错误和不妥之处，敬请读者批评指正。

编 者

1993年1月于重庆邮电学院

目 录

第一章	信号与系统的基本概念.....	(1)
	基本概念及公式摘要.....	(1)
	例题与习题内容要点.....	(3)
	例题.....	(3)
	习题.....	(22)
第二章	连续和离散系统的时域分析.....	(28)
	基本概念及公式摘要.....	(28)
	例题与习题内容要点.....	(36)
	例题.....	(37)
	习题.....	(66)
第三章	连续信号与系统的频域分析.....	(74)
	基本概念及公式摘要.....	(74)
	例题与习题内容要点.....	(83)
	例题.....	(83)
	习题.....	(111)
第四章	连续信号与系统的复频域分析.....	(123)
	基本概念及公式摘要.....	(123)
	例题与习题内容要点.....	(133)
	例题.....	(134)
	习题.....	(172)
第五章	离散信号与系统的Z域分析.....	(183)
	基本概念及公式摘要.....	(183)
	例题与习题内容要点.....	(192)
	例题.....	(192)
	习题.....	(231)
第六章	连续和离散系统的状态变量分析.....	(239)
	基本概念及公式摘要.....	(239)
	例题与习题内容要点.....	(244)
	例题.....	(245)
	习题.....	(267)
	习题答案.....	(273)
	参考文献.....	(307)

第一章 信号与系统的基本概念

基本概念及公式摘要

1. 周期信号

(1) 连续周期信号

$$f(t) = f(t + kT) \quad (1-1)$$

其中, k 为任意整数, T 为周期, $t: (-\infty, \infty)$ 。

若 $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$, 且 $f_1(t) = f_1(t + n_1 T_1)$, $f_2(t) = f_2(t + n_2 T_2)$, 则当 $\frac{T_1}{T_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1} = \frac{n_2}{n_1}$ (n_1, n_2 为不可约的整数)时, $f(t)$ 为周期信号, 其周期 $T = n_1 T_1 = n_2 T_2$ 。

(2) 离散周期信号

$$f(k) = f(k + mN) \quad (1-2)$$

其中, m 为任意整数, N (正整数)为周期, $k: (-\infty, \infty)$ 。

2. 信号功率、能量

信号 $f(t)$ 的能量

$$W = \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \quad (1-3)$$

信号 $f(t)$ 的平均功率

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} |f(t)|^2 dt \quad (1-4)$$

3. 非奇非偶信号 $f(t)$ 分解为奇分量 $f_o(t)$ 与偶分量 $f_e(t)$ 之和

$$f(t) = f_o(t) + f_e(t) \quad (1-5a)$$

$$f_o(t) = \frac{1}{2} [f(t) - f(-t)] \quad (1-5b)$$

$$f_e(t) = \frac{1}{2} [f(t) + f(-t)] \quad (1-5c)$$

4. 冲激信号 $\delta(t)$ 的基本性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta(t - t_0) dt = f(t_0) \quad (1-6)$$

$$\delta[-(t - t_0)] = \delta(t - t_0) \quad (1-7)$$

$$\delta(at) = \frac{1}{|a|} \delta(t) \quad (1-8)$$

$$f(t) \delta(t - t_0) = f(t_0) \delta(t - t_0) \quad (1-9)$$

$$\frac{du(t)}{dt} = \delta(t) \quad (1-10)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta(\tau) d\tau = u(t) \quad (1-11)$$

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases} \quad (1-12)$$

5. 冲激偶信号的基本性质

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta^{(n)}(t-t_0) dt = (-1)^n f^{(n)}(t_0) \quad (1-13a)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \delta'(t-t_0) dt = -f'(t_0) \quad (1-13b)$$

$$\delta'[-(t-t_0)] = -\delta'(t-t_0) \quad (1-14)$$

$$\delta'(at) = \frac{1}{|a|} \delta'(t) \quad (1-15)$$

$$f(t) \delta'(t) = f(0) \delta'(t) - f'(0) \delta(t) \quad (1-16)$$

$$\frac{d\delta(t)}{dt} = \delta'(t) \quad (1-17)$$

$$\int_{-\infty}^t \delta'(\tau) d\tau = \delta(t) \quad (1-18)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta'(t) dt = 0 \quad (1-19)$$

6. 序列f(k)的差分

(1) 序列f(k)的n阶前向差分运算

$$\Delta^n f(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} f(k+n-i) \quad (1-20)$$

(2) 序列f(k)的n阶后向差分运算

$$\nabla^n f(k) = \sum_{i=0}^n (-1)^i \frac{n!}{i!(n-i)!} f(k-i) \quad (1-21)$$

离散序列差分与连续信号微分概念相对应，特别是后向差分与微分相对应。

7. 序列取和 $\sum_{n=-\infty}^k f(n)$ (1-22)

也是一离散序列，它与连续信号积分概念相对应。

8. 单位(数字)序列δ(k)的基本性质

$$\delta[-(k-k_0)] = \delta(k-k_0) \quad (1-23)$$

$$f(k) \delta(k-k_0) = f(k_0) \delta(k-k_0) \quad (1-24)$$

$$\delta(k) = \nabla u(k) \quad (1-25)$$

$$u(k) = \sum_{n=-\infty}^k \delta(n) = \sum_{n=0}^{\infty} \delta(k-n) \quad (1-26)$$

9. 线性时不变因果系统的特性

线性:

设初始状态 $\{x_j(0_-)\}$ $\xrightarrow{\text{引起}}$ 零输入响应 $\{y_{zi}(t)\}$ $j=1, 2, \dots, n$; 又激励 $f(t) = a_1 f_1(t) + a_2 f_2(t)$ $t \geq 0$

且 $f_1(t) \xrightarrow{\text{引起}} y_{f_1}(t)$ $t \geq 0$

$f_2(t) \xrightarrow{\text{引起}} y_{f_2}(t)$ $t \geq 0$

则全响应

$$y(t) = \sum_{j=1}^n y_{zj}(t) + \sum_{j=1}^2 a_j y_{fj}(t) \quad t \geq 0 \quad (1-27)$$

$$= y_z(t) + y_f(t)$$

上式表明：线性系统具有全响应 $y(t)$ 的分解性（分解为零输入响应 $y_z(t)$ 和零状态响应 $y_f(t)$ ）、零输入线性和零状态线性（ $y_z(t)$ 、 $y_f(t)$ 皆满足叠加性和齐次性）。线性系统表明 $y(t)$ 与 $f(t)$ 、 $x(0_-)$ 间满足线性方程。只满足叠加性的系统称叠加系统；只满足齐次性的系统称均匀系统。时不变性：

$$\text{若 } f(t) \xrightarrow{\{x_j(0_-)\}} y(t)$$

$$\text{则 } f(t-t_0) \xrightarrow{\{x_j(t_{0-})\} = \{x_j(0_-)\}} y(t-t_0) \quad (1-28)$$

时不变系统还表明，系统内部的一切参数与时间无关，因此，时不变系统又称恒参系统。在这种系统的数学模型中，不应具有时间 t 及其函数与 $y(t)$ 、 $f(t)$ 、 $x(0_-)$ 等的乘积项。
微、积分特性：

$$\text{若 } f(t) \longrightarrow y_f(t)$$

$$\text{则 } \frac{df(t)}{dt} \longrightarrow \frac{dy_f(t)}{dt} \quad (1-29)$$

$$\int_0^t f(\tau) d\tau \longrightarrow \int_0^t y_f(\tau) d\tau \quad (1-30)$$

因果性：若 $t < t_0$ 时 $f(t) = 0$ ，则 $t < t_0$ 时 $y_f(t) = 0$ 。因果系统表明，响应不能出现在激励之前。

离散系统具有对应的特性。

例题与习题内容要点

1. 信号与波形图；
2. 冲激信号 $\delta(t)$ 及单位序列 $\delta(k)$ 的定义及其性质应用；
3. 信号类别判断；
4. 信号运算及相应波形变换；
5. 信号分解为奇、偶分量之和；
6. 系统类别判断——线性时不变因果系统特性的应用；
7. 系统的时域框图模拟。

例 题

例1-1 判断下列信号是否为周期信号？若是，周期为多少？

$$(1) f(t) = \sin\left(7\pi t + \frac{\pi}{3}\right) \quad (2) f(t) = 10 \sin 3t + 2 \cos 2t$$

$$(3) f(t) = t^2 + 1 \quad (4) f(t) = 2 \sin 2t + \cos \pi t$$

$$N = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

$$(1) \omega_0 = \frac{\pi}{5} \quad N = \frac{2\pi}{\omega_0} = 10, \text{ 故 } f_1(k) \text{ 为周期信号。}$$

$$(2) \omega_0 = \frac{3}{4} \quad N = \frac{2\pi}{\omega_0} = \frac{8\pi}{3}, \text{ } N \text{ 不可能为整数, 故 } f_2(k) \text{ 为非周期信号。}$$

$$(3) \omega_1 = \frac{\pi}{4} \quad N_1 = \frac{2\pi}{\omega_1} = 8, \text{ 为周期信号。}$$

$$\omega_2 = \frac{\pi}{3} \quad N_2 = \frac{2\pi}{\omega_2} = 6, \text{ 为周期信号。}$$

$f_3(k)$ 为二周期信号之和, $\frac{\omega_1}{\omega_2} = \frac{3}{4} = \frac{m_1}{m_2} = \frac{N_2}{N_1}$, $N = m_1 N_1 = m_2 N_2 = 24$ (最小公倍周期), 故 $f_3(k)$ 为周期信号。

(4) $f_4(k)$ 为两项序列之和, 第一项为非周期信号, 第二项为周期信号, 故 $f_4(k)$ 为非周期信号。

由本例可见, 对于离散三角函数序列, 是否为周期信号要看其周期是否为整数。不能认为三角函数序列一定是周期离散序列, 但是, 连续三角函数一定是周期函数。

例1-3 下列信号从功率和能量的观点看属于何类?

$$(1) f(t) = \sin t \quad (2) f(t) = \cos t u(t)$$

$$(3) f(t) = u(t) - u(t-1) \quad (4) f(t) = tu(t)$$

解: 只要计算信号的功率和能量, 再按定义, 即可确定信号类别。

$$(1) W = \int_{-\infty}^{\infty} \sin^2 t \, dt = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1 - \cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} \Big|_{-\infty}^{\infty} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{-\infty}^{\infty} \rightarrow \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} f^2(t) \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \sin^2 t \, dt = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \frac{1}{2} t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} - \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}}$$

$$= \frac{1}{2}$$

故 $f(t)$ 为功率信号。

$$(2) W = \int_0^{\infty} \cos^2 t \, dt = \int_0^{\infty} \frac{1 + \cos 2t}{2} \, dt = \frac{t}{2} \Big|_{t=0}^{\infty} + \frac{1}{4} \sin 2t \Big|_{t=0}^{\infty} \rightarrow \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{t}{2} \Big|_{t=0}^T = \frac{1}{4}$$

故 $f(t)$ 为功率信号。

$$(3) W = \int_0^1 1 \, dt = 1 \quad P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W}{2T} = 0$$

故 $f(t)$ 为能量信号。

$$(4) W = \int_0^{\infty} t^2 \, dt = \frac{1}{3} t^3 \Big|_{t=0}^{\infty} \rightarrow \infty$$

$$P = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{W}{2T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{6T} t^3 \Big|_{t=0}^T \rightarrow \infty$$

故 $f(t) = tu(t)$ 为非功非能信号。

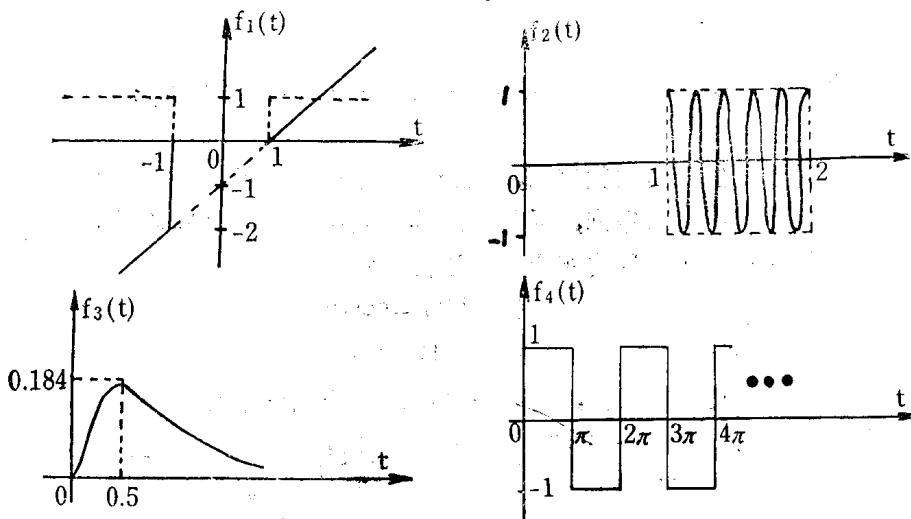
通过本例可得出一般规律：周期信号一般属功率信号；非周期信号可能属能量信号或功率信号或非功非能信号。对于后者，若为单个脉冲信号则属能量信号；若为有始周期信号或自身不满足绝对可积，但其导数满足绝对可积的信号属功率信号；若自身及其导数皆不满足绝对可积的信号属非功非能信号。

值得注意的是，不存在既是功率信号又是能量信号的信号。

例1-4 粗略绘出下列各信号的波形图：

- (1) $f_1(t) = (t-1)u(t^2-1)$ (2) $f_2(t) = \cos 10\pi t [u(t-1) - u(t-2)]$
 (3) $f_3(t) = te^{-2t}u(t)$ (4) $f_4(t) = \text{sgn}(\sin t)u(t)$

解：给定信号表示式描绘其波形是本课程的基本训练之一。在绘图时应注意信号的基本特征，对所绘出的波形应标出一些特殊点的值，如初值、终值、极大值、极小值等。例1-4图示出了各信号的波形。



例1-4图

在(1)中，将 $f_1(t)$ 看作 $(t-1)$ 与 $u(t^2-1)$ 相乘，分别绘出它们的波形再相乘。由于 $u(t^2-1) = u[(t+1)(t-1)]$ ，当 $(t+1)(t-1) > 0$ 时， $u(t^2-1) = 1$ ，当 $(t+1)(t-1) < 0$ 时， $u(t^2-1) = 0$ ，故

$$u(t^2-1) = \begin{cases} 1 & |t| > 1 \\ 0 & |t| < 1 \end{cases}$$

$$= u(-t-1) + u(t-1)$$

$(t-1)$ 及 $u(t^2-1)$ 波形如图中虚线所示， $f_1(t)$ 波形如实线所示。

在(2)中，因为 $\cos 10\pi t$ 的周期 $T = \frac{1}{5}$ ，故 $f_2(t)$ 在区间 $[1, 2]$ 内应有5个周期的余弦波。

$$f_2(t) = G_1(t - \frac{3}{2}) \cos 10\pi t$$

其中 $G_1(t - \frac{3}{2})$ 是宽度为1、高度为1、延时 $\frac{3}{2}$ 的门函数。

在(3)中， $f_3(t)$ 为连续信号，且 $f_3(0) = 0$ ， $\lim_{t \rightarrow \infty} f_3(t) = 0$ ，故 $f_3(t)$ 一定有极值。由 $\frac{d}{dt} [f_3(t)]$

$=0$ 求得极值点的 $t=\frac{1}{2}$, $f_3\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{2e}\approx 0.184$ 。

在(4)中, 因 $\sin t$ 是周期为 2π 的周期信号, 且有

$$u=\sin t \text{ 有 } \begin{cases} >0 & 0 < t < \pi \\ <0 & \pi < t < 2\pi \end{cases} \quad (\text{在一周内})$$

而 $\operatorname{sgn}(u) = \begin{cases} 1 & u > 0 \\ -1 & u < 0 \end{cases}$

故 $\operatorname{sgn}(\sin t)$ 是一周期为 2π 的周期信号, $\operatorname{sgn}(\sin t)u(t)$ 是一有始周期信号, 在区间 $[0, 2\pi]$ 内, 其值为

$$\operatorname{sgn}(\sin t)u(t) = \begin{cases} 1 & 0 < t < \pi \\ -1 & \pi < t < 2\pi \end{cases}$$

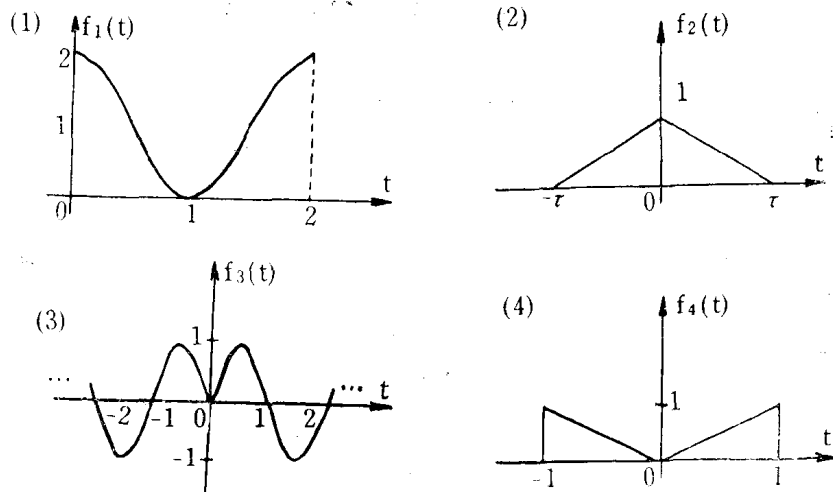
如果函数 $f(t)$ 在 $t=t_0$ 处出现跳变, 则

$$f(t_0) = \frac{1}{2}[f(t_{0-}) + f(t_{0+})]$$

因此 $u(t)$ 、 $\operatorname{sgn}(t)$ 可表为

$$u(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ \frac{1}{2} & t = 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \quad \operatorname{sgn}(t) = \begin{cases} 1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases}$$

例1-5 写出例1-5图所示各波形的信号表示式。



例1-5图

解: 由波形写出信号表示式是本课程的又一基本训练之一。由波形写出信号表示式常有两种方法: 分段表示法和闭合式表示法。在付氏变换和拉氏变换中, 后者更为重要。在信号的闭式表示中, 常将一个复杂的信号波形看成一些常见典型信号波形通过四则运算的结果。对本课程而言, 常见的一些典型信号是:

①正弦信号: $A\sin\omega t$; $A\cos\omega t$

②无时限复指数信号: Ae^{st} , $t: (-\infty, \infty)$

其中, $s=\sigma+j\omega$, σ 、 ω 皆为实数, s 称复频率。

当 $s=0(\sigma=0, \omega=0)$ 时, $f(t)=A$, 称为直流信号。当 $\omega=0$ 时, $f(t)=Ae^{\sigma t}$, 称实指数信号。当 $\sigma=0$ 时, $f(t)=Ae^{j\omega t}$, 称虚指数信号, 这时, $f(t)=A\cos\omega t + jA\sin\omega t$, 实部为余弦信号, 虚部为正弦信号。因此, 复指数信号概括了直流信号、实指数信号、正弦、余弦等信号。

③单边指数信号: $f(t)=Ae^{\alpha t}u(t)$, α 为实数。

当 $\alpha>0$ 时, $f(t)$ 称为增长指数信号; 当 $\alpha<0$ 时, $f(t)$ 称衰减指数信号。

④斜坡信号: $R(t)=tu(t)$

⑤门信号: $G_{\tau}(t)=u\left(t+\frac{\tau}{2}\right)-u\left(t-\frac{\tau}{2}\right)$

⑥符号信号: $\text{sgn}(t)=-u(-t)+u(t)$

⑦取样信号: $\text{sa}(t)=\frac{\sin t}{t}$

⑧正三角脉冲信号: $\Delta_{\tau}(t)=\left(1-\frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau)-u(t-\tau)]$

⑨单位冲激信号: $\delta(t)$

⑩单位阶跃信号: $u(t)$

若一个复杂信号能表示成上述典型信号的四则运算, 则无论是对复杂信号的函数表示或是作其付氏变换、拉氏变换等都将带来极大的方便。

应当指出, 由函数式画波形图是唯一的, 但由波形写函数式则不唯一。

下面解答本题。

$$(1) f_1(t) = (1 + \cos\pi t)[u(t) - u(t-2)] = G_2(t-1)(1 + \cos\pi t)$$

$$(2) f_2(t) = \Delta_{\tau}(t) = \left(1 - \frac{|t|}{\tau}\right)[u(t+\tau) - u(t-\tau)]$$

$$= \frac{1}{\tau}R(t+\tau) - \frac{2}{\tau}R(t) + \frac{1}{\tau}R(t-\tau)$$

$$(3) f_3(t) = \sin\pi t u(t) + \sin(-\pi t)u(-t) = \sin\pi t u(t) - \sin\pi t u(-t)$$

$$= \sin\pi t [u(t) - u(-t)] = \sin\pi t \cdot \text{sgn}(t)$$

或 $f_3(t) = \begin{cases} \sin\pi t & t > 0 \\ -\sin\pi t & t < 0 \end{cases}$

$$= \sin[\pi t \cdot \text{sgn}(t)]$$

$$(4) f_4(t) = G_2(t) - \Delta_2(t)$$

$$= -t[u(t+1) - u(t)] + t[u(t) - u(t-1)]$$

$$= t[-u(t+1) + 2u(t) - u(t-1)]$$

例1-6 计算:

$$(1) \sin\pi t \cdot \delta\left(t + \frac{1}{4}\right) = ? \quad (2) t\delta'(t) = ?$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin\delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = ? \quad (4) \int_1^2 e^{-at}\delta(t) dt = ?$$

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t - T_2)u(t - T_1) dt = ? \quad (T_1, T_2 \text{为常数})$$

$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\delta'(2\tau) d\tau = ? \quad (7) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\tau}\delta(2\tau) d\tau = ?$$

解: 冲激函数在本课程中是一种应用广泛的重要函数, 在卷积计算、付氏变换、拉氏变

换及系统分析中，利用它使结论导出简化。

$\delta(t)$ 的定义，常见的有三种：

①狄拉克(Dirac)定义(又称工程定义)：

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1 \\ \delta(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$

此定义实质是把不定式 $\infty \cdot 0$ 定义为1。此种定义最早用在工程上。但此定义不严格，甚至可能引起混淆，如 $\delta(t) + \delta'(t)$ 也满足此定义，即

$$\begin{cases} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(t) + \delta'(t)] dt = 1 \\ \delta(t) + \delta'(t) = 0 \quad t \neq 0 \end{cases}$$

②用规则函数取极限定义：

$$a. \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} G_{\tau}(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} [u(t + \frac{\tau}{2}) - u(t - \frac{\tau}{2})]$$

此定义实质是 $\delta(t) = \frac{du(t)}{dt}$ 。

$$b. \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \left\{ \frac{1}{\tau} \left(1 - \frac{|t|}{\tau} \right) [u(t + \tau) - u(t - \tau)] \right\}$$

$$c. \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{2\tau} e^{-\frac{|t|}{\tau}}$$

$$d. \delta(t) = \lim_{\tau \rightarrow 0} \frac{1}{\tau} e^{-\pi \left(\frac{t}{\tau} \right)^2}$$

$$e. \delta(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{\pi} \text{Sa}(kt)$$

可见， $\delta(t)$ 可由某些规则函数取广义极限得到，但 $\delta(t)$ 不能作规则函数理解。

③用 $\delta(t)$ 筛选性质定义：

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) \delta(t) dt = \varphi(0)$$

这一定义是一种唯一的、确定的定义，但它亦超出了规则函数概念范畴。

$\delta(t)$ 的严格数学定义将涉及到广义函数。设广义函数为 $f(t)$ ，测试函数为 $\varphi(t)$ ，

$$\text{若 } \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) f(t) dt = \varphi(0)$$

则 $f(t) = \delta(t)$

因此， $\delta(t)$ 属广义函数。上述三种定义只不过是 $\delta(t)$ 的基本性质。

虽然 $\delta(t)$ 不能作为瞬值函数理解，但常可作规则函数使用。

本例在于正确应用 $\delta(t)$ 、 $\delta'(t)$ 的基本性质。解答如下：

(1) 由性质 $f(t)\delta(t-t_0) = f(t_0)\delta(t-t_0)$ 知

$$\sin \pi t \cdot \delta\left(t + \frac{1}{4}\right) = \sin \pi \left(-\frac{1}{4}\right) \cdot \delta\left(t + \frac{1}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} \delta\left(t + \frac{1}{4}\right)$$

(2) 由性质 $f(t)\delta'(t) = f(0)\delta'(t) - f'(0)\delta(t)$ 知

$$t\delta'(t) = 0 \cdot \delta'(t) - 1 \cdot \delta(t) = -\delta(t)$$

$$(3) \int_0^{\pi} \sin t \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = \int_0^{\pi} \sin \frac{\pi}{6} \delta\left(t - \frac{\pi}{6}\right) dt = \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$$

$$(4) \int_1^2 e^{-t} \delta(t) dt = \int_1^2 \delta(t) dt = 0$$

注意：当被积函数不在积分区间内时，则积分为零。

$$(5) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(t-T_2) u(t-T_1) dt = u(T_2-T_1) = \begin{cases} 1 & T_2 > T_1 \\ \frac{1}{2} & T_2 = T_1 \\ 0 & T_2 < T_1 \end{cases}$$

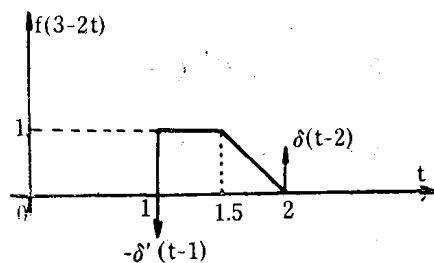
$$(6) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta'(2\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} [\frac{1}{4} \delta'(\tau)] dt \\ = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(\tau) + \delta(\tau)] d\tau = \frac{1}{4} [\delta(t) + u(t)]$$

值得注意的是， $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 是 t 的函数， $\int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt$ 是值 ($f(t)$ 曲线下的面积值)。

$$(7) \int_{-\infty}^{\infty} e^{-t} \delta'(2\tau) d\tau = \frac{1}{4} \int_{-\infty}^{\infty} [\delta'(\tau) + \delta(\tau)] d\tau = \frac{1}{4}$$

例1-7 已知 $f(3-2t)$ 的波形如图例1-7图所示，试作出 $f(t)$ 的波形。

解：本课程中，经常遇到信号的运算，许多物理器件，如加法器、乘法器、积分器、延时器等都是专门用来对信号作不同运算的，因此，掌握信号的运算特别是它对应的波形变换显得十分重要。信号波形变换还具有直观感和物理内涵。下面对常见信号运算及其相应波形变换作一归纳性讨论。信号基本运算有8种：



例1-7图

(1) 信号相加(减) $f(t) = f_1(t) + f_2(t)$

任一时刻的和(差)信号值等于同一时刻各信号瞬时值之和(差)。

(2) 信号相乘 $f(t) = f_1(t) \cdot f_2(t)$

任一时刻乘积信号值等于同一时刻各相乘信号瞬时值之积。

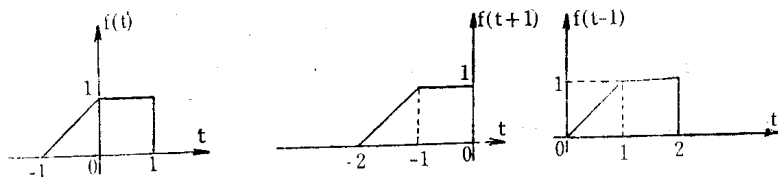
以上两种运算在前面的例子中已遇到。

(3) 信号幅度变化 $af(t)$

新信号 $af(t)$ 幅值是原信号 $f(t)$ 每一时刻都乘以常数 a 。

(4) 信号时移 $f(t) \xrightarrow{t-b} f(t-b)$

以变量 $t-b$ 代替 $f(t)$ 中变量 t 即得 $f(t-b)$ ，时移量 b 为常数， $|b|$ 表示 $f(t)$ 波形在时间 t 轴上移动的距离， $b > 0$ 即右移 $|b|$ (又称延时 b)； $b < 0$ 即左移 $|b|$ (又称提前 b)。时移不改变波形和幅度，如图例1-7-1图所示。



例1-7-1图

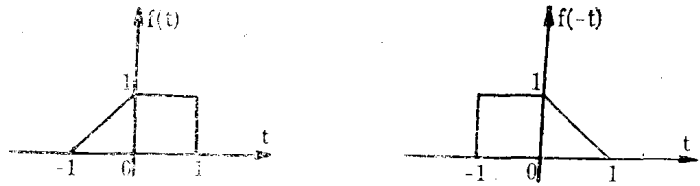
(5) 信号反褶(翻转) $f(t) \xrightarrow{-t} f(-t)$

以变量 $-t$ 代替 $f(t)$ 中的 t 即得 $f(-t)$ 。反褶后的 $f(-t)$ 波形与原 $f(t)$ 波形是以过坐标原点的

纵轴呈镜象对称，相当 $f(t)$ 波形沿纵轴翻转 180° 而得到 $f(-t)$ 波形，如例1-7-2图所示。显然，反褶后波形的幅度不变。

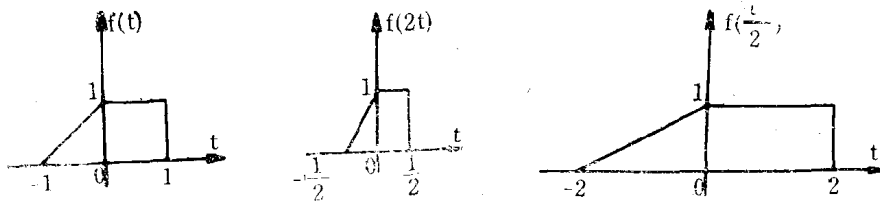
(6) 信号时间尺度变化 $f(t) \xrightarrow{at} f(at)$

以变量 at 代替 $f(t)$ 中的变量 t 即得 $f(at)$ 。式中 a 为常数， $a > 1$ ，表示时间尺度不变， $f(at)$ 波形是 $f(t)$ 波形在时间轴上压缩 a 倍，或表示波形不变， $f(at)$ 是 $f(t)$ 的时间尺度扩展 a 倍； $0 < a < 1$ ，



例1-7-2图

表示时间尺度不变， $f(at)$ 波形是 $f(t)$ 波形在时间轴上扩展 $\frac{1}{a}$ 倍，或表示波形不变， $f(at)$ 是 $f(t)$ 的时间尺度压缩 $\frac{1}{a}$ 倍。例1-7-3图示出了这种变化。



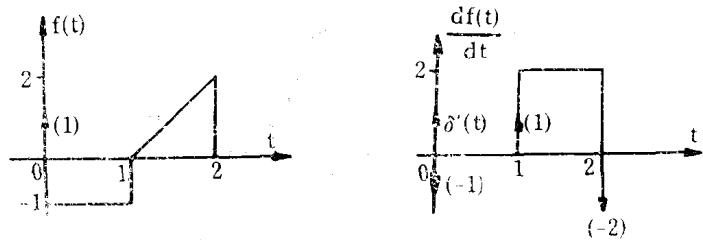
例1-7-3图

显然，对规则信号，当时间尺度变化时幅度是不变化的。

如果 $a < 0$ ，则 $f(at)$ 是 $f(t)$ 既反褶又尺度变化的结果，这时可先将 $f(t)$ 进行反褶得到 $f(-t)$ ，再进行 $|a|$ 的尺度变换；也可先作尺度变换得到 $f(|a|t)$ ，再进行反褶得到 $f(at)$ 。

(7) 信号微分 $\frac{d}{dt}[f(t)]$

即将信号 $f(t)$ 对时间变量 t 求导。信号波形作微分时，应注意在 $f(t)$ 的跳变点处出现冲激信号和 $f(t)$ 本身含冲激处出现冲激信号的导数。例1-7-4图示出了信号波形的微分变换。

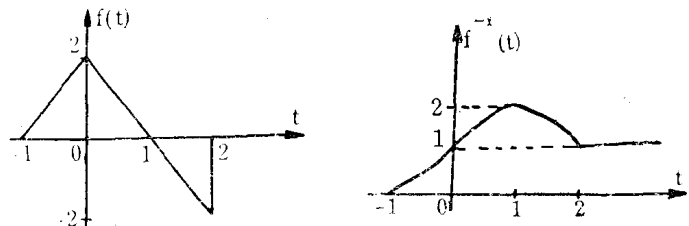


例1-7-4图

(8) 信号积分 $f^{-1}(t) = \int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$

积分信号 $\int_{-\infty}^t f(\tau) d\tau$ 的函数值等于曲线 $f(t)$ 与时间区间 $[-\infty, t]$ 所围成的面积，如例1-7-5图所示。

由图可见， $f(t)$ 在跳变点处， $f^{-1}(t)$ 的值是连续的，而当 $f(t)$ 原已存在，但当在某一区间（如图中 $t > 2$ ） $f(t) = 0$ ，则 $f^{-1}(t)$ 不一定为零。当 $f^{-1}(t) \neq 0$ 时，表明 $f^{-1}(t)$ 具有记忆性， $f^{-1}(t)$ 记录了



例1-7-5图