内 容 简 介

本书包括三部分内容：正交多项式，正交函数和正交变换。介绍了它们在数学理论上的主要性质，以及在诸如滤波、线性系统、量子场论、信号处理等方面的某些应用。适合于工科（特别是电类专业）研究生和应用数学专业高年级学生阅读，也适合有关工程技术人员参考。

应用数学丛书

正交函数及其应用

柳 重 堪 编著

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

$850\times1168^{1}/_{32}$ 印张 $8^{1}/_{2}$ 214 千字

1982年 9月第一版 1982年 9月第一次印刷 印数：0,001— 8,000册

统一书号：15034·2387 定价：1.10元

出版说明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展，众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相关，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念、分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学，应用数学有关领域的基础介绍，应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成体系，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

本书包括三部分内容：正交多项式，正交函数和离散正交变换。正交多项式的理论与傅立叶分析一样，在诸如数学物理方程、特殊函数、数值分析等一些经典的数学分支中有着重要的地位；近年来，离散正交变换在数字信号处理中获得了愈来愈广泛的应用。这些内容虽然所论及的对象有所不同，但都有“正交”的共性，它已成为数学和工程技术领域中不可缺少的工具。

本书是供工科专业（特别是电类专业）研究生或应用数学专业高年级学生阅读的。绝大部分章节只要求读者学完微积分课程并具备线性代数、复变函数和概率论的初步知识。书中各章内容有一定的相对独立性，可供挑选阅读。

全书共十二章，第二至六章介绍各种经典正交多项式的定义、性质和有关应用；第一、七章以统一的方式论述正交多项式的一般性质；第八章主要阐述正交函数的一些基本理论，论证了几种正交函数系的封闭性与完备性；第九章介绍了目前在通信中应用较多的沃尔什函数；第十、十一章论述离散的正交变换，包括一般理论和各种常用的正交变换；最后，第十二章介绍正交变换对于处理随机数字信号的应用。

王惠燕同志阅过本书部分章节，任允珠同志为本书绘制了全部插图，特此致谢。

书中难免有错误或不妥之处，谨请读者批评指正。

1980年12月

目 录

第一章　正交多项式的一般性质

§1　引　　言

正交就是垂直的意思。它是数学中的一个重要概念。我们知道，两个矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交的充分与必要条件是它们的内积等于零，即

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}=0 \tag{1.1.1}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是三维空间中的两个矢量，它们在某一直角坐标系中的坐标分别是 (a_1, a_2, a_3) 和 (b_1, b_2, b_3)，则式(1.1.1)即为

$$a_1b_1+a_2b_2+a_3b_3=0 \tag{1.1.2}$$

如果 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 是 n 维矢量，则式（1.1.2）应改写成

$$\sum_{i=1}^{n} a_ib_i=0 \tag{1.1.3}$$

式（1.1.3）是 n 维矢量 $\boldsymbol{a}$ 和 $\boldsymbol{b}$ 正交的充分必要条件。

将式（1.1.3）推广到函数的情形，则很自然地，可将两个定义在区间$[a, b]$上的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 的正交性定义为

$$\int_a^b f(x)g(x)dx=0 \tag{1.1.4}$$

区间$[a, b]$叫做正交区间。有时，由于实际问题的需要，可将正交性定义（1.1.4）拓展为加权正交：

$$\int_a^b h(x)f(x)g(x)dx=0 \tag{1.1.5}$$

其中函数 $h(x)$ 为给定的函数，称为权函数。

正交性有什么用处呢？最基本的一条，是利用一组相互正交的基矢量或基函数，可以表示任意的矢量或函数。例如，设 $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}$,

$\boldsymbol{k}$ 是三维空间某坐标系的三个基本矢量，即它们两两互相正交：

$$\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{j}=\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{k}=\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=0 \tag{1.1.6}$$

当然还假定它们都是单位矢量，那么任一三维矢量 $\boldsymbol{a}$ 均可表示为 $\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$ 的线性组合：

$$\boldsymbol{a}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k} \tag{1.1.7}$$

为什么能这样表示呢？这是因为式（1.1.7）中的 a_1，a_2，a_3可以利用式（1.1.6）来求出。用 $\boldsymbol{i}$ 乘以式（1.1.7）的两端（相乘指求内积）：

$$\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}=a_1\boldsymbol{i}\cdot\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}\cdot\boldsymbol{i}+a_3\boldsymbol{k}\cdot\boldsymbol{i}=a_1$$

同理，有 $a_2=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{j}$ 和 $a_3=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{k}$。

类似地，对于任意的 n 维矢量 $\boldsymbol{a}$，只要预先找到 n 维矢量空间中的一组相互正交的基矢量 $\{\boldsymbol{i}_1, \boldsymbol{i}_2, \cdots, \boldsymbol{i}_n\}$，当然还假定它们都是单位矢量：$\boldsymbol{i}_k\cdot\boldsymbol{i}_k=1$（也称 $\boldsymbol{i}_k$ 是归一化的矢量）。那么 $\boldsymbol{a}$ 可表为

$$\boldsymbol{a}=\sum_{k=1}^{n}a_k\boldsymbol{i}_k \tag{1.1.8}$$

其中 $a_k=\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{i}_k$，这是利用诸 $\boldsymbol{i}_k$ 的正交性而求得的。

推广到函数的情形，以熟知的傅立叶级数为例。我们知道，在区间$[-\pi, \pi]$上，函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos 2x, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin 2x, \cdots, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\cos nx, \frac{1}{\sqrt{\pi}}\sin nx, \cdots\right\} \tag{1.1.9}$$

是满足式（1.1.4）的。因此这无穷多个函数构成一个正交函数系。而且其中每一个在$[-\pi, \pi]$上自乘的积分等于1，所以式（1.1.9）还是归一化的正交系。利用此正交系，可将任一定义在$[-\pi, \pi]$上的函数 $f(x)$ 展为傅立叶级数（当然，为了保证级数的收敛性，还要求 $f(x)$ 满足一定的条件）：

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx) \qquad (1.1.10)$$

其中

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\cos nx dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \qquad (1.1.11)$$

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\sin nx dx \quad (n=1,\ 2,\cdots)$$

我们回忆一下在微积分课程中，式（1.1.11）的推导，正是利用了函数系（1.1.9）的正交性。

还可注意到，式（1.1.10）实际上与式（1.1.8）类似。即正交系（1.1.9）可以看成是“函数空间”的基函数，它相当于 n 维矢量空间的基矢量 $\{\boldsymbol{i}_1,\boldsymbol{i}_2,\cdots,\boldsymbol{i}_n\}$；而 $a_0,a_1,\ a_2,\cdots,b_1,\ b_2,\cdots$ 则可理解为函数 $f(x)$ 在正交系（1.1.9）下的“坐标”。这样，利用函数系（1.1.9）的正交性，就将一个函数表示成式（1.1.9）的线性组合。不过，这里的基函数是无穷多个，而不是有限个，于是“函数空间”也就理解为一种“无穷维”空间。

将一个函数表示为傅立叶级数，能使我们在研究函数和解决实际问题时得到极大的好处。关于这一点，在信号的傅立叶分析中人们已充分体会到，在求解一些数学物理方程的定解问题中已也有充分体现。而事实上，在函数空间中并非只有三角函数系（1.1.9）才是唯一的正交函数系，而是还存在着许多其它的正交函数系。利用这些其它的正交系，也可将函数表示成它们的线性组合，从而进行广义的傅立叶分析或求解一些定解问题。这在各种实际问题中已得到广泛的应用。当然，究竟使用哪一种正交系，应视具体问题而定，而且还应解决级数是否收敛的问题。本章后面介绍的各种正交多项式和正交函数，都是目前工程技术中常用的。各有各的特性，各有各的用途。

§2 线性独立与正交化

在微积分课程中，我们熟知一个函数的泰勒级数展开（以在 $x_0=0$ 处展开为例）：

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \tag{1.2.1}$$

其中 $a_n=f^{(n)}(0)/n!$。那么函数系

$$\{1,\ x,\ x^2,\cdots\cdots\} \tag{1.2.2}$$

是不是正交系呢？回答是否定的。它不能在某一区间上构成正交系，这很容易验证。因此展开式（1.2.1）在正交级数展开的理论中没有地位。当然，由于函数系（1.2.2）都是些最简单的函数——幂函数，所以泰勒展开式（1.2.1）在数学及其它有关领域中仍有着重要的作用。虽然（1.2.2）不是正交系，但可以指出，它是线性独立的，因而可以通过适当的手段使之正交化，便得到形状稍为复杂但却都是多项式的正交系，即所谓勒让德多项式。

定义在某个区间$[a,\ b]$上的有限个函数$\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$ 称为是线性相关的，是指：存在不全为零的 n 个常数 c_1，c_2，…，c_n，使得对所有的 x（$a\leqslant x\leqslant b$）有

$$c_1\varphi_1(x)+c_2\varphi_2(x)+\cdots+c_n\varphi_n(x)\equiv 0 \tag{1.2.3}$$

假若不存在这种常数，也就是从式（1.2.3）的成立必然导致

$$c_1=c_2=\cdots=c_n=0$$

那么就称 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x)$，…，$\varphi_n(x)$ 是线性独立的。

显然，如果$\{\varphi_k(x)\}$（$k=1,\ 2,\cdots,\ n$）中有一个函数恒为零，则$\{\varphi_k(x)\}$是线性相关的；线性独立函数系的部分系仍然是线性独立系。

设 $\psi_1(x)$，$\psi_2(x)$，…，$\psi_n(x)$ 是归一化正交函数系，那么它也是线性独立的。事实上，设若有常数 c_1，c_2，…，c_n 使得

$\sum_{k=1}^{n} c_k\psi_k(x)\equiv 0$，将 $\psi_i(x)$ 乘以此式两端然后积分，便得

$$c_i=0\quad(i=1,\ 2,\cdots,\ n)$$

设 n_1，$n_2,\cdots$，n_j 是两两相异的 j 个非负整数，则 j 个函数 x^{n_1}，$x^{n_2},\cdots$，x^{n_j} 在任何区间上是线性独立的。这是因为，如果不是线性独立，则存在不全为零的常数 c_1，$c_2,\cdots$，c_j 使得 $c_1x^{n_1}+c_2x^{n_2}+\cdots+c_jx^{n_j}\equiv 0$ 对所有 x 都成立。但这是不可能的，因为多项式只能有有限个根。

关于无限个函数 $\varphi_1(x)$，$\varphi_2(x),\cdots$，$\varphi_n(x),\cdots$的线性独立的概念可由其中任意有限个函数的线性独立引出。即：如果函数列

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\cdots,\ \varphi_n(x),\cdots \tag{1.2.4}$$

中任何有限个函数总是线性独立的，便称函数系（1.2.4)是线性独立的。

例如，由上可知，1，x，$x^2,\cdots$，$x^n,\cdots$在任一区间上是线性独立系；正交归一化的三角函数系（1.1.9）是区间$[-\pi,\ \pi]$上的线性独立系。

下面我们证明任一线性独立系都可以通过所谓施密特正交化步骤，使之正交化。为了说明问题，我们以函数系$\{\varphi_0(x),\varphi_1(x),\varphi_2(x),\cdots,\ \varphi_n(x),\cdots\}=\{1,\ x,\ x^2,\cdots,\ x^n,\cdots\}$为例，并将自变量所在的区间取为$[-1,1]$。设经过正交化后的函数系为$\{\psi_0(x)$，$\psi_1(x),\cdots$，$\psi_n(x),\cdots\}$，它满足正交性条件：

$$\int_{-1}^{1}\psi_i(x)\psi_j(x)dx=0\qquad(i\neq j) \tag{1.2.5}$$

还可进一步使之满足归一化条件：

$$\int_{-1}^{1}\psi_i^2(x)dx=1\qquad(i=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{1.2.6}$$

令 $\psi_0(x)=a_{00}\varphi_0(x)=a_{00}$，为了满足条件（1.2.6)，应有

$$\int_{-1}^{1}\psi_0^2(x)dx=\int_{-1}^{1}a_{00}^2dx=2a_{00}^2=1$$

于是求得$a_{00}=\sqrt{\frac{1}{2}}$，即 $\psi_0(x)=\sqrt{\frac{1}{2}}$

令 $\psi_1(x)=a_{10}\varphi_0(x)+a_{11}\varphi_1(x)=a_{10}+a_{11}x$，为了满足条件（1.2.5）和（1.2.6），应有

$$\int_{-1}^{1}\psi_0(x)\psi_1(x)dx=\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{1}{2}}(a_{10}+a_{11}x)dx=0$$

及

$$\int_{-1}^{1}\psi_1^2(x)dx=\int_{-1}^{1}(a_{10}+a_{11}x)^2dx=1$$

即

$$\begin{cases} a_{10}=0 \\ \frac{2}{3}a_{11}^2=1 \end{cases}$$

于是 $\psi_2(x)=\sqrt{\frac{3}{2}}x$。

令 $\psi_2(x)=a_{20}\varphi_0(x)+a_{21}\varphi_1(x)+a_{22}\varphi_2(x)$，它应满足

$$\begin{cases} \int_{-1}^{1}\psi_2(x)\psi_0(x)dx=0 \\ \int_{-1}^{1}\psi_2(x)\psi_1(x)dx=0 \\ \int_{-1}^{1}\psi_2^2(x)dx=1 \end{cases}$$

即

$$\begin{cases} a_{20}+\frac{1}{3}a_{22}=0 \\ a_{21}=0 \\ 2a_{20}^2+\frac{2}{5}a_{22}^2+\frac{4}{3}a_{20}a_{22}=1 \end{cases}$$

由此可解得 $a_{20}=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$，$a_{21}=0$，$a_{22}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$，所

$$\psi_2(x)=\sqrt{\frac{5}{2}}\left(\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}\right)$$

类似地，可得

$$\psi_3(x)=\sqrt{\frac{7}{2}}\left(\frac{5}{2}x^3-\frac{3}{2}x\right)$$

$$\psi_4(x)=\sqrt{\frac{9}{2}}\left(\frac{35}{8}x^4-\frac{30}{8}x^2+\frac{3}{8}\right)$$

$$\vdots$$

所得之函数系$\{\psi_0(x),\ \psi_1(x),\cdots\}$称为归一化的勒让德多项式，它在区间$[-1,\ 1]$上是正交的，这是一种重要的正交多项式。

注意，上述求解过程中我们还假定了多项式的最高次系数是正的。因为例如在求a_{11}和a_{22}时都有两个数值：$a_{11}=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$，$a_{22}=\pm\frac{3}{2}\sqrt{\frac{5}{2}}$。

§3 正交多项式的存在性与唯一性

上一节我们引出了勒让德多项式，它满足正交性条件(1.2.5)。本节研究加权正交的情形，即满足式(1.1.5)。对于权函数，假定它在正交区间$[a,\ b]$上为非负，可积且积分值为正：

$$0<\int_a^b h(x)dx<+\infty \tag{1.3.1}$$

如果$(a,\ b)$为无穷区间，则还要求下列积分绝对收敛：

$$h_n=\int_a^b x^n h(x)dx \quad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \tag{1.3.2}$$

h_n称为函数$h(x)$的n次矩。

设给定区间$[a,\ b]$及满足上述条件之权函数$h(x)$，如果多项式系$\{P_0(x),\ P_1(x),\cdots,\ P_n(x)\}$满足

$$\int_a^b h(x)P_m(x)P_n(x)dx=0 \quad (m\neq n) \tag{1.3.3}$$

则称之为以$h(x)$为权函数加权正交。当$m=n$时，上式左端之

积分值的平方根（取正值）称为多项式 $P_n(x)$ 的加权范数，记为 $\|P_n\|$：

$$\|P_n\|=\sqrt{\int_a^b h(x)P_n^2(x)dx} \qquad (1.3.4)$$

如果对于每一个 $P_n(x)$，均有

$$\|P_n\|=1 \qquad (1.3.5)$$

便称多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 为归一化序列。任一多项式序列 $\{P_n(x)\}$ 均可成为归一化序列，因为如果 $\|P_n\|\neq 1$，则

$$\hat{P}_n(x)=\frac{P_n(x)}{\|P_n\|} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\cdots) \qquad (1.3.6)$$

便是归一化序列。如果 $\{P_n(x)\}$ 是正交序列，则其归一化序列 $\{\hat{P}_n(x)\}$ 仍是正交序列。

上述这些名词及简单性质，不仅对多项式而言，对于一般的函数也是适用的。

上节所述之勒让德多项式 $\{\psi_n(x)\}$ 就是在区间 $[-1,1]$ 上，以 $h(x)\equiv 1$ 为权函数的归一化正交多项式序列。

现在我们要指出，在给定正交区间、给定权函数时，对应的正交多项式是存在的而且是唯一的。即有下述定理：

定理1.3.1 对于在区间 $(a,\ b)$ 上给定的任一权函数 $h(x)$，存在唯一的多项式序列 $\{P_n(x)\}$，其最高次系数均为正，且满足加权归一化正交性条件：

$$\int_a^b h(x)P_m(x)P_n(x)dx=\delta_{mn}=\begin{cases}1, & m=n\\ 0, & m\neq n\end{cases} \qquad (1.3.7)$$

为了证明这个定理，先证明一个引理。

引理 1.3.1 设有 $n+1$ 个多项式 $A_0(x)$，$A_1(x)$，$\cdots$，$A_n(x)$，其次数分别为 $0,1,\cdots n$。则任一 n 次多项式 $Q_n(x)$ 均可唯一地表为诸 $A_k(x)$ 的线性组合：

$$Q_n(x)=q_0A_0(x)+q_1A_1(x)+\cdots+q_nA_n(x) \qquad (1.3.8)$$

证：设

$$A_k(x)=a_{k0}+a_{k1}x+\cdots+a_{kk}x^k \tag{1.3.9}$$
$$(k=0,\ 1,\cdots,\ n,\ a_{kk}\neq 0)$$

及

$$Q_n(x)=c_0+c_1x+\cdots+c_nx^n \tag{1.3.10}$$

为了确定式（1.3.8）中的诸 q_k，只需将式（1.3.9）和(1.3.10)代入式（1.3.8）的两端，比较同次幂系数，便得到关于诸 q_k 的线性方程组：

$$\begin{cases} c_n=q_na_{nn} \\ c_{n-1}=q_na_{n,n-1}+q_{n-1}a_{n-1,n-1} \\ c_{n-2}=q_na_{n,n-2}+q_{n-1}a_{n-1,n-2}+q_{n-2}a_{n-2,n-2} \\ \cdots\cdots \\ c_1=q_na_{n1}+q_{n-1}a_{n-1,1}+\cdots+q_1a_{11} \\ c_0=q_na_{n0}+q_{n-1}a_{n-1,0}+\cdots+q_1a_{10}+q_0a_{00} \end{cases}$$

这个方程组的系数行列式之值等于 $a_{nn}a_{n-1,n-1}\cdots a_{00}\neq 0$，因为这是一个三角形行列式，且 $a_{kk}\neq 0$。从而式（1.3.8）中的诸系数 q_k 可唯一地确定出来。引理得证。

定理 1.3.1 的证明：以 μ_n 表示 $P_n(x)$ 的最高次系数。用归纳法来证明。因 $P_0(x)=\mu_0>0$，则条件式（1.3.7）成为

$$\int_a^b h(x)P_0^2(x)dx=\mu_0^2\int_a^b h(x)dx=1$$

根据条件式（1.3.1），μ_0 可确定出来，即 $P_0(x)$ 确定了。

设已确定了多项式

$$P_0(x),\ P_1(x),\cdots,\ P_{n-1}(x) \tag{1.3.11}$$

它们满足式（1.3.7）。因为式（1.3.11）中的每一个 $P_k(x)$ 的次数是 k（$0\leqslant k\leqslant n-1$），则再添加一个多项式$x^n$，按照引理 1.3.1，便可将 n 次多项式 $P_n(x)$ 唯一地表示为

$$P_n(x)=\mu_nx^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_{nk}P_k(x) \tag{1.3.12}$$

其中系数 p_{nk} 和 μ_n 应选择得使条件式（1.3.7）成立。由于式

(1.3.11) 中诸多项式满足式 (1.3.7)，故当$m<n$时应有

$$\int_a^b h(x)P_n(x)P_m(x)dx$$

$$=\int_a^b h(x)\left[\mu_n x^n+\sum_{k=0}^{n-1}p_{nk}P_k(x)\right]P_m(x)dx$$

$$=\mu_n\int_a^b h(x)x^nP_m(x)dx+p_{nm}=\mu_n b_{nm}+p_{nm}=0$$

其中 b_{nm} 表示式中对应的那个积分之值。当 n 和 m 确定时 b_{nm} 便是已知数值。从而若令式 (1.3.12) 中的诸 $p_{nm}=-\mu_n b_{nm}$，则条件式 (1.3.7) 满足 (当$m<n$时)。因此式 (1.3.12) 便成为

$$P_n(x)=\mu_n\left[x^n-\sum_{k=0}^{n-1}b_{nk}P_k(x)\right]$$

它与式 (1.3.11) 中的每一个都加权正交。其中 μ_n 仍有任意性，但利用式 (1.3.7) 中的归一化条件

$$\int_a^b h(x)P_n^2(x)dx=1$$

即可定出μ_n。定理 1.3.1 得证。

根据定理 1.3.1，给定一个定义在某区间上的权函数，它满足条件式 (1.3.1) 或 (1.3.2)绝对收敛，就存在唯一的满足加权归一化正交性条件式 (1.3.7) 的正交多项式序列$\{P_n(x)\}$。在理论上和应用中最重要的正交多项式是下列的几种，它们统称为经典正交多项式。

(1) 第一类切比雪夫多项式$\{T_n(x)\}$，它们在区间$[-1,1]$上加权正交，权函数是

$$h(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}},\quad -1<x<1$$

(2) 第二类切比雪夫多项式$\{U_n(x)\}$，它们在区间$[-1,1]$上加权正交，权函数是

$$h(x)=\sqrt{1-x^2},\quad -1\leqslant x\leqslant 1$$

(3) 勒让德多项式$\{P_n(x)\}$，它们在区间$[-1,1]$上正交，

权函数是

$$h(x)=1$$

（4）雅可比多项式$\{P_n(x;\ \alpha,\ \beta)\}$，它们在区间$[-1,1]$上加权正交，权函数是

$$h(x)=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta},\qquad -1<x<1$$

其中$\alpha>-1$，$\beta>-1$。当$\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$，$\frac{1}{2}$，0时即为上面三种多项式：

$$T_n(x)=P_n\left(x;\ -\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right),$$

$$U_n(x)=P_n\left(x;\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),$$

$$P_n(x)=P_n(x;\ 0,\ 0)。$$

（5）厄密特多项式$\{H_n(x)\}$，它们在区间$(-\infty,\ \infty)$上加权正交，权函数是

$$h(x)=e^{-x^2}$$

（6）拉盖尔多项式$\{L_n(x;\ \alpha)\}$，它们在区间$(0,\ \infty)$上加权正交，权函数是

$$h(x)=x^{\alpha}e^{-x},\qquad 0<x<\infty$$

其中$\alpha>-1$。

这六种正交多项式将在后面各章具体论述。

最后，再介绍一个正交性判别准则。

定理1.3.2 要使多项式序列$\{P_0(x),P_1(x),\cdots,P_n(x),\cdots\}$以$h(x)$为权函数加权正交，其充分必要条件是，对所有$m(m<n)$次多项式$Q_m(x)$，均有

$$\int_a^b h(x)P_n(x)Q_m(x)dx=0\quad(m<n)\qquad(1.3.13)$$

证明：设多项式序列$\{P_n(x)\}$为加权正交，则根据引理1.3.1，对任意m次多项式$Q_m(x)$，有唯一的展式

$$Q_m(x)=q_0P_0(x)+q_1P_1(x)+\cdots+q_mP_m(x)$$