3354

弹性动力学

第二卷　线性理论

〔美〕A. C. 艾龙根　〔土耳其〕E. S. 舒胡毕著

石油工业出版社

弹 性 动 力 学

第二卷 线性理论

〔美〕A. C. 艾龙根 〔土耳其〕E. S. 舒胡毕 著

戈 革 译

石 油 工 业 出 版 社

内 容 提 要

《弹性动力学》英文版全书分二卷，第一卷为有限运动，第二卷为线性理论。一般涉及弹性力学的著作以论述静力学为主，而此书是一部论述弹性动力学的专著，对波传播理论的数学基础和物理基础作了系统的阐述，取材精炼，论证严谨。此书根据英文版的第二卷译出，本卷在论述了线性弹性动力学的基础上，由易而难地逐步讨论了一维、二维、三维空间中的弹性动力学问题，作为补充讨论三维解，最后分析了弹性波的衍射问题。

本书可供地球物理学、地质学、应用数学、应用物理学、工程学、力学的师生、研究人员、工程技术人员阅读参考。

A. C. Eringen E. S. Suhubi
ELASTODYNAMICS
VOLUME 2 Linear Theory
ACADEMIC PRESS New York San Francisco London 1975

弹 性 动 力 学

第二卷 线性理论

〔美〕A. C. 艾龙根 〔土耳其〕E. S. 舒胡毕 著
戈 革 译

石油工业出版社出版
（北京安定门外外馆东后街甲36号）
地质出版社印刷厂排版
北京顺义燕华营印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行

850×1168 毫米 32开本 $24^{3}/_{8}$ 印张 669千字 印1—5,240
1984年9月北京第1版 1984年9月北京第1次印刷
书号：15037·2444 定价：3.00 元

序　言

《弹性动力学》的这一卷（第二卷）致力于线性各向同性弹性学的动力学理论的阐述。本论著的计划和范围包括了彻底讨论和弹性动力学有关的基本定理以及各种数学解法及其在一维、二维和三维空间中对这一类问题的应用。书中提出并应用了唯一性定理和倒易定理。关于利用势函数、奇解、复函数技巧、积分方程方法和积分变换的求解，亦都进行探索。对于物体的自由振动和受迫振动进行了适当详尽的讨论；这些物体有着有限的或无穷的广延，其边界面具有平面、柱面（圆柱面、椭圆柱面）、椭球面和球面等形状。初值问题和边值问题，包括位移的、曳力的和混合的边值条件，也都求了解。本书以有关衍射理论的一章作为结束。表示着频率、位移和胁强场的各种图表对于实际工作者应该是有用的。我们的意图本来是要包括关于各向异性的、不均匀的弹性固体和热弹性固体以及点阵动力学的论述。可惜由于受篇幅的限制，这种计划只好放弃了。

弹性动力学理论现在已有一百五十多年的历史了。课题的内容是如此地广泛，以致进行全面阐述既非人力之所能及也非一两卷书籍之所能容。因此，我们的意图只能是探索各种的数学方法，以得到各种不同的（我们认为是重要的）问题的精确解。例如，考虑到大型计算机的存在，我们对于近似技术和数学技术没有进行任何讨论，尽管这些是很重要的。既然弹性动力学理论在大波长范围内已经得到实验的充分证实，我们觉得也就不必举出实验结果了。

关于弹性动力学理论在工程科学和实用科学的不同领域中的重要性，那几乎是用不着多说的。在机械振动、撞击负荷、地球物理学、地震学以及许多看来很不相同的物理学分支中，几乎所

有问题的理解和解决都要求弹性动力学的知识和应用弹性动力学的方法。

目前，在许多大学的各系中都开有一些关于本课题的研究生课程。本领域中的研究计划也是很广阔的。但是，适用于教学的书几乎没有。我们希望本书能够通过在讲授和发展这一领域方面提供一个基本教程，而满足这一要求。按照教学范围的不同，可以设置一学期、两学期或三学期的课程。例如，可以根据第五章中所讲到的基本定理来设计一学期的理论课程。如果需要一门应用课程，也可以用一学期的时间讲授第六章和第七章的内容。对于高深的工作来说，三维解和衍射理论（第八章和第九章）同样可以构成一门一学期的课程。尽管按步就班地学习可能较好，但是这些部分却也或多或少是可以独立讲授的。

目　　录

弹 性 动 力 学

第一卷 简 目

第五章　线性弹性动力学基础

5.1　本章范围

本章致力于考察线性弹性动力学的基本要素和普遍定理。虽然我们涉及的是均匀和各向同性的弹性固体，但也指出了关于各向异性和不均匀的固体的可能推广。

在第5.2节中，我们收集了线性弹性学的基本方程。关于基本理论的推导和讨论，我们参考了第一卷第一章。在第5.3节中，利用位移场对弹性动力学问题进行了表述。在第5.4节中，我们借助于位移势即拉梅函数和索密格连纳函数来寻求场方程的解并证明这些表象的完备性。利用胁强场的场方程的表述，在第5.5节中给出，而它们的褶积形式则在第5.6节中加以讨论。适用于无界域的弹性动力学的唯一性定理在第5.7节中给出。场变量的一个重要性质，即其倒易定理，在第5.8节中予以确立。第5.9节致力于波动方程的某些基本性质的研究，这些性质构成弹性动力学进一步发展的基础。对于三维情况和二维情况都适用的弹性动力学的基本奇解在第5.10节中得出，而且，通过这些解在第5.11节和第5.12节中的系统应用，得出了积分表象定理。无穷域中的辐射条件在第5.13节中进行考察。在第5.14节中，利用积分方程法来考虑边值—初值问题，而在第5.15节中则利用格林函数技术来考虑这种问题。弹性体的定态振动是第5.16节的课题，而利用本征函数展开式来求解边值—初值问题则是第5.17节的课题。第5.18节用来建立线性弹性动力学的变分原理。

5.2　线性弹性学基本方程提要

在第一卷第一章中，我们发展了非线性的和线性的热弹性固体的平衡定律、跃变条件和本构方程。为了便于参考，我们把等温弹性学线性理论的基本方程收集在这里。

A. 平衡定律

(i) 质量守恒

(5.2.1) $\rho_0/\rho = 1 + e_{kk}$ 在 $\mathscr{V} - \sigma$ 中

(ii) 动量的平衡

(5.2.2) $t_{kl,k} + \rho(f_l - \dot{v}_l) = 0$

(5.2.3) $t_{kl} = t_{lk}$ 在 $\mathscr{V} - \sigma$ 中

(iii) 能量守恒

(5.2.4) $\dot{\eta} - (h/\theta) = 0$ 在 $\mathscr{V} - \sigma$ 中

克劳修斯—杜恒不等式是自动得到满足的。

B. 跃变条件

如果有一个运动着的不连续性曲面$\sigma(t)$以速度ν沿σ的单位法线$\mathbf{n}$的方向扫过物体，则下列的跃变条件必须在曲面$\sigma(t)$上得到满足：

(5.2.5) $[\![\rho(\mathbf{v} - \boldsymbol{\nu})]\!] \cdot \mathbf{n} = 0$

(5.2.6) $[\![\rho v_l(v_k - \nu_k) - t_{kl}]\!] n_k = 0$

(5.2.7) $[\![(\varepsilon + \frac{1}{2}\mathbf{v}\cdot\mathbf{v})\rho(v_k - \nu_k) - t_{kl}v_l]\!] n_k = 0$

(5.2.8) $[\![\rho\eta(\mathbf{v} - \boldsymbol{\nu})]\!] \cdot \mathbf{n} \geqslant 0$ 在 $\sigma(t)$ 上

C. 本构方程（可压缩固体）

(i) 各向异性固体

(5.2.9) $t_{kl} = \sigma_{klmn} e_{mn}$

(5.2.10) $\Sigma = \rho_0 \psi = \rho_0(\varepsilon - \theta\eta) = \frac{1}{2}\sigma_{klmn} e_{kl} e_{mn}$

(ii) 各向同性固体

(5.2.11) $t_{kl} = \lambda e_{rr}\delta_{kl} + 2\mu e_{kl}$

(5.2.12) $\Sigma = \frac{1}{2}\lambda(e_{rr})^2 + \mu e_{kl}e_{lk} = \frac{1}{2}(\lambda + 2\mu) I_e^2 - 2\mu II_e$

(5.2.13) $\eta = -(1/\rho_0)\partial\Sigma/\partial\theta$

对于不可压缩的固体，我们令 $e_{rr} = 0$ 并且在 t_{kl} 的右端加上$-p\delta_{kl}$一项，这里 p 是未知的压强。

D. 运动学关系式

(5.2.14) $\dot{v}_l \approx \partial^2 u_l/\partial t^2$

(5.2.15) $$e_{kl}=\frac{1}{2}(u_{k,l}+u_{l,k})\equiv u_{(k,l)}$$

(5.2.16) $$I_e\equiv e_{kk},\qquad II_e\equiv\frac{1}{2}(e_{kk}e_{ll}-e_{kl}e_{lk})$$

E. 相容性条件

(5.2.17) $$e_{pkl}e_{qmn}e_{km,ln}=0$$

在这些方程中，

ρ_0：未变形物体 V 中的质量密度

ρ：已变形物体 $\mathscr{V}$ 中的质量密度

e_{kl}：$\mathscr{V}$ 中的线性胁变张量

t_{kl}：$\mathscr{V}$ 中的胁强张量

f_l：$\mathscr{V}$ 中的彻体力密度

η：$\mathscr{V}$ 中的熵密度

h：$\mathscr{V}$ 中的热源密度

θ：绝对温度

ϵ：$\mathscr{V}$ 中的内能密度

u_k：$\mathscr{V}$ 中一个物质点的位移矢量

材料模量 σ_{klmn} 和 λ 及 μ 受下列条件的限制：

$$\sigma_{klmn}=\sigma_{lkmn}=\sigma_{klnm}=\sigma_{mnkl}$$

(5.2.18) $$\sigma_{klmn}a_ka_mb_lb_n\geqslant 0$$

$$3\lambda+2\mu\geqslant 0,\qquad \mu>0$$

式中 a_k 和 b_m 是任意矢量。

F. 场方程

将 (5.2.9) 或 (5.2.11) 代入 (5.2.2)，我们得到有名的纳维方程：

（i）各向异性固体

(5.2.19) $$(\sigma_{lkmn}u_{m,n})_{,l}+\rho(f_k-\ddot{u}_k)=0\qquad 在\mathscr{V}-\sigma 中$$

（ii）各向同性固体

(5.2.20) $$(\lambda+\mu)u_{l,lk}+\mu u_{k,ll}+\rho(f_k-\ddot{u}_k)=0$$

在$\mathscr{V}-\sigma$中·

（iii）各向同性不可压缩固体

(5.2.21)

$$-p_{,k}+\mu u_{k,ll}+\rho_0(f_k-\ddot{u}_k)=0,\qquad u_{k,k}=0,\qquad \text{在}\mathscr{V}-\sigma\text{中}$$

G．边值条件

(5.2.22) $\quad t_{lk}n_l=\hat{t}_k \qquad$ 在$\mathscr{S}_t-\sigma$上

(5.2.23) $\quad u_k=\hat{u}_k \qquad$ 在$\mathscr{S}_u=\mathscr{S}-\mathscr{S}_t$上

式中$\hat{t}_k$是在物体表面$\mathscr{S}-\sigma$的一部分$\mathscr{S}_t-\sigma$上被指定的，而$\hat{u}_k$是在$\mathscr{S}-\sigma$的其余部分$\mathscr{S}_u$上给出的。其他的混合组合也是可能的。例如，我们可以在表面的一部分上指定$\hat{t}_1$、$\hat{t}_2$和$\hat{u}_3$来代替(5.2.22)。但是，一种建立得很好的理论要求这样的条件不违反唯一性定理。

H．初值条件

(5.2.24) $\quad u_k(\mathbf{x},0)=u_{0k}(\mathbf{x}) \qquad$ 在$\mathscr{V}-\sigma$中

(5.2.25) $\quad \dot{u}_k(\mathbf{x},0)=v_{0k}(\mathbf{x}) \qquad$ 在$\mathscr{V}-\sigma$中

式中u_{0k}和v_{0k}是指定的函数。

不妨说，线性弹性固体的整个理论，就是要在上面列举的那种类型的边值和初值的条件下求解纳维方程(5.2.19)或(5.2.20)。上面这些方程是在直角座标系中写出的。关于普遍的曲线座标表示法，请参阅第一卷第1.20节。利用在曲线座标系中成立的矢量写法，(5.2.20)变成〔参阅(1.20.27)〕：

(5.2.26) $\quad (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\rho(\mathbf{f}-\ddot{\mathbf{u}})=\mathbf{0}$

关于特殊曲线座标系中的其他表示式，参阅第一卷第1.20节。

5.3 弹性动力学的位移表述

一个各向同性的均匀弹性体的运动是由纳维方程(5.2.20)来支配的：

(5.3.1) $\quad \mu\nabla^2\mathbf{u}+(\lambda+\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}=\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$

或者等效地有(5.2.26)：

(5.3.1′) $\quad (\lambda+2\mu)\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\mu\nabla\times\nabla\times\mathbf{u}+\rho\mathbf{f}=\rho\partial^2\mathbf{u}/\partial t^2$

二者都适用于该物体所占据的边界面为B的空间域R中的位移场$\mathbf{u}(\mathbf{x},t)$。这些方程服从初值条件

(5.3.2) $\quad \mathbf{u}(\mathbf{x},0)=\mathbf{u}_0(\mathbf{x}),\qquad \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{x},0)=\mathbf{v}_0(\mathbf{x})$

式中$\mathbf{u}_0$和$\mathbf{v}_0$只是位置的已知矢量函数；这些方程也服从在R的

边界面B上给定的边值条件，该边界面可能由几个闭合的曲面组成，每一曲面具有分片连续的外向单位法线$\mathbf{n}$。在一个混合边值问题中，边值条件具有下列形式：

$$
(5.3.3)\qquad \begin{aligned}
&\mathbf{u}(\mathbf{x},t)=\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{x},t) &&\text{在 } B_1 \text{ 上}\\
&t_{(n)k}=t_{kl}n_l=\hat{t}_k(\mathbf{x},t) &&\text{在 } B_2 \text{ 上}
\end{aligned}
$$

此处$B_1\cup B_2=B$而且B_1、B_2是不相交的集合，即$B_1\cap B_2=\phi=$空集合。边值$\hat{\mathbf{u}}$和$\hat{\mathbf{t}}$是分别在B的部分B_1和B_2上指定的曲面座标和时间的矢量函数。我们可以把（5.3.3）中的第二个关系式表示成更加适当的形式：

$$t_{kl}n_l=\lambda u_{m,m}n_k+2\mu(u_{k,l}-w_{kl})n_l$$

此式又可以写成〔注意，$w_{kl}=\frac{1}{2}e_{lkm}w_m=\frac{1}{2}e_{lkm}(\nabla\times\mathbf{u})_m$，参阅（1.20.20）〕

$$(5.3.4)\qquad \mathbf{t}_{(n)}=\mathbf{tn}=\lambda\mathbf{n}\nabla\cdot\mathbf{u}+2\mu(\partial\mathbf{u}/\partial n)+\mu\mathbf{n}\times(\nabla\times\mathbf{u})$$

式中$\partial/\partial n$表示沿单位法线方向的偏导数，即

$$\frac{\partial}{\partial n}(\quad)=(\quad)_{,k}n_k$$

取（5.3.1′）的散度和旋度，我们得到①

$$
(5.3.5)\qquad \begin{aligned}
&c_1^2\nabla^2 I_e+\nabla\cdot\mathbf{f}=\partial^2 I_e/\partial t^2\\
&c_2^2\nabla^2\mathbf{w}+\nabla\times\mathbf{f}=\partial^2\mathbf{w}/\partial t^2
\end{aligned}
$$

式中I_e是体胀胁变而$\mathbf{w}$是转动，分别由下式来定义：

$$(5.3.6)\qquad I_e=\nabla\cdot\mathbf{u},\qquad \mathbf{w}=\nabla\times\mathbf{u}$$

而且c_1和c_2是两个具有速度量纲的恒量：

$$(5.3.7)\qquad c_1=[(\lambda+2\mu)/\rho]^{1/2},\quad c_2=(\mu/\rho)^{1/2}$$

这两个恒量之比和泊松比ν的关系是

$$(5.3.8)\qquad c_2^2/c_1^2=(1-2\nu)/2(1-\nu)$$

在推导（5.3.5）的过程中，也象在（5.3.1′）中一样，我们应

① 这些方程是由斯托克斯〔1849〕首次得出的。

用了关于矢量场的拉普拉斯导数的下列恒等式：

$$\nabla^2\mathbf{u}=\nabla\nabla\cdot\mathbf{u}-\nabla\times\nabla\times\mathbf{u} \tag{5.3.9}$$

方程（5.3.5）分别是传播速度为c_1和c_2的非齐次的标量波动方程和矢量波动方程。因此不难推知，在一种各向同性的均匀弹性媒质中，胀缩扰动是以速度c_1传播的而转动扰动是以速度c_2传播的。于是，c_1和c_2就分别叫做无旋波速度和等体积波速度。在下一节中，我们将考察方程（5.3.1′）的某些通解。

5.4 位移势

运动方程（5.3.1）通常是很难积分的，因为微分算符的结构过于复杂：

$$(\lambda+2\mu)\ \mathrm{grad\ div}-\mu\mathrm{curlcurl}-\rho\partial^2/\partial t^2$$

但是，积分过程可以通过对因变量$\mathbf{u}$进行适当变换而得到某种程度的简化，这种变换导致比较简单的具有更为习见形式的一些微分方程。

A. 拉梅势

在这种最有用和最简单的变换中，有一种就是引用拉梅势。虽然这些势函数的渊源可以追溯到泊松〔1829〕，但是使人们注意了它们的有效性的却是拉梅〔1852〕。导致拉梅势的想法可以最合理地建立在斯托克斯—亥姆霍兹分解定理的基础上（参阅 Morse 和 Feshbach〔1953，第 1.5 节〕）；该定理断言，每一个足够平滑的矢量场$\mathbf{f}(\mathbf{x},t)$都可以分解成无旋的和管状的部分，就是说可以把它表示为

$$\mathbf{f}=\nabla f+\nabla\times\mathbf{F} \tag{5.4.1}$$

显然，（5.4.1）中的第一项是没有旋度的，而第二项则是没有散度的。为了使这种表示成为确定，我们引入一个矢量场$\mathbf{U}$，使它满足

$$f=\nabla\cdot\mathbf{U},\qquad \mathbf{F}=-\nabla\times\mathbf{U}$$

当把（5.3.9）应用到（5.4.1）中时，我们就得到泊松方程：

$$\nabla^2\mathbf{U}=\mathbf{f}$$

这一方程具有众所周知的解

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_R \frac{1}{r}\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\,dv(\boldsymbol{\xi}), \qquad r \equiv |\mathbf{x} - \boldsymbol{\xi}|$$

式中 R 是一个空间域。由此可见，关于 f，我们有

$$f(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_R \mathbf{f}\cdot\nabla\left(\frac{1}{r}\right)dv(\boldsymbol{\xi})$$

$$= \frac{1}{4\pi}\int_R \mathbf{f}\cdot\overline{\nabla}\left(\frac{1}{r}\right)dv(\boldsymbol{\xi})$$

$$= -\frac{1}{4\pi}\int_R \frac{1}{r}\overline{\nabla}\cdot\mathbf{f}\,dv(\boldsymbol{\xi}) + \frac{1}{4\pi}\int_B \frac{1}{r}\mathbf{n}\cdot\mathbf{f}\,da(\boldsymbol{\xi})$$

式中 $\overline{\nabla}$ 定义为点 ξ 处的梯度算符。如果 $\mathbf{f}$ 具有有界的支承①，我们就总可以把曲面 B 选在 $\mathbf{f}$ 为零的域中，这样就可以把上式中最后那一个曲面积分去掉；于是就有

(5.4.2) $$f(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi}\int_R \frac{1}{r}\overline{\nabla}\cdot\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\,dv(\boldsymbol{\xi})$$

同理可以证明

(5.4.3) $$\mathbf{F}(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi}\int_R \frac{1}{r}\overline{\nabla}\times\mathbf{f}(\boldsymbol{\xi}, t)\,dv(\boldsymbol{\xi})$$

现在让我们把斯托克斯—亥姆霍兹定理应用到位移场上，并写出

(5.4.4) $$\mathbf{u} = \nabla\phi + \nabla\times\boldsymbol{\psi}$$

式中 $\phi(\mathbf{x}, t)$ 和 $\boldsymbol{\psi}(\mathbf{x}, t)$ 分别是位置和时间的标量函数和矢量函数。将(5.4.4)代入(5.3.1′)中并应用彻体力的表示式(5.4.1)，我们就得到

(5.4.5) $$\nabla(c_1^2\nabla^2\phi + f - \partial^2\phi/\partial t^2) + \nabla\times(c_2^2\nabla^2\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F} - \partial^2\boldsymbol{\psi}/\partial t^2) = \mathbf{0}$$

如果我们把 ϕ 和 $\boldsymbol{\psi}$ 选成非齐次波动方程

(5.4.6) $$c_1^2\nabla^2\phi + f = \partial^2\phi/\partial t^2, \qquad c_2^2\nabla^2\boldsymbol{\psi} + \mathbf{F} = \partial^2\boldsymbol{\psi}/\partial t^2$$

① 一个函数 $f(\mathbf{x})$ 的支承（Support）是一个点集，f 在该点集上不为零，即 $S = \{\mathbf{x};\ f(\mathbf{x}) \neq 0\}$。