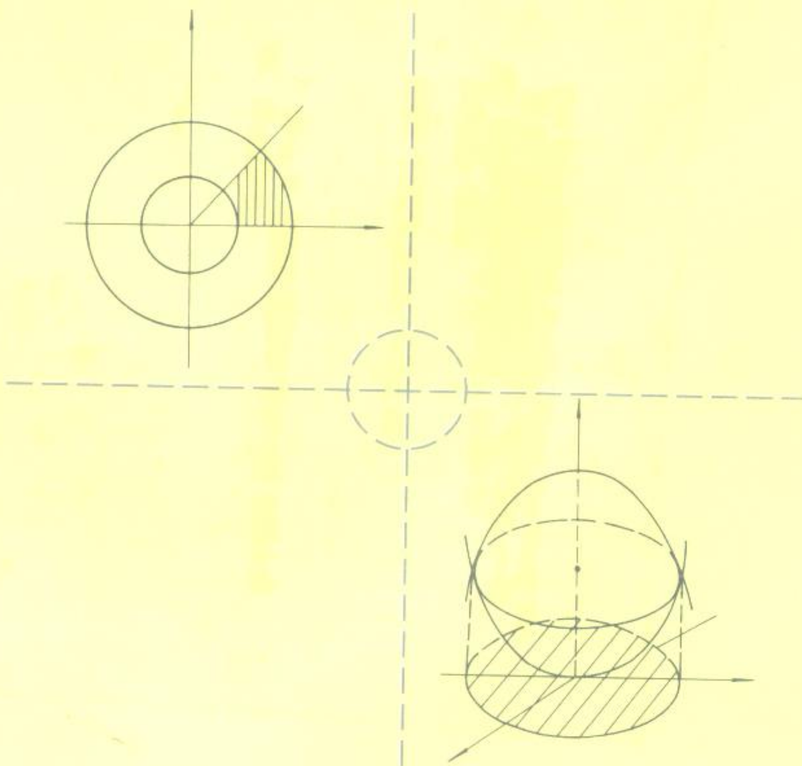
自考、成教、大专类

高等数学范例

详解详释

魏 平 张 慧 李大可 阮小娥



西安交通大学出版社

高等数学范例详解详释

高等数学范例详解详释

（自考、成教、大专类）

魏 平　张 慧　李大可　阮小娥

西安交通大学出版社
·西安·

内容提要

作者根据多年教学经验，密切联系夜大、函大、电大、职大等各种成人自学高等数学的实际，按课本教学顺序，结合高等数学的基本要求，收集了近千道高等数学典型题，分10章编排，本书所选的每道题，力求突出“三基”和有较新颖独特的解法，从分析题意入手，引导出解题技巧，指导读者学会求解高等数学的各类问题的方法和技巧，提高分析问题和解决问题的能力．为了引导读者积极思维，几乎每题都作了注释．

全书内容，形式各异，不拘泥于统一，这样更有利于初学者掌握．

本书可作为夜大、函大、电大、职大、各种成人自学高等数学的参考书，也可作为普通高校一年级学生的参考书．

图书在版编目(CIP)数据

高等数学范例详解详释：自考·成教·大专类/魏平等编．－西安：西安交通大学出版社，1999.11
ISBN 7-5605-1120-1

Ⅰ.高…　Ⅱ.魏…　Ⅲ.高等数学-成人教育：高等教育-解题　Ⅳ.013-44

中国版本图书馆CIP数据核字(1999)第66677号

*

西安交通大学出版社出版发行
（西安市咸宁西路28号　邮政编码：710049　电话：(029)2668316）
西安工业学院印刷厂印装
各地新华书店经销

*

开本：787 mm×1092 mm　1/16　印张：18.5　字数：453千字
2000年1月第1版　2000年1月第1次印刷
印数：0 001～5 000　定价：22.80元

前　言

在多年的自学考试辅导、函授教育、夜大的教学中，结识了不少辛辛苦苦一边工作，又拖家带口，而又要通过自学成才的成人学生，他(她)们那种刻苦精神很是感人的．但是不少学生由于基础差、底子薄、时间少，对高等数学的学习望而生畏，感到太神秘、太难学，特别是自学考试太难过关，而增加了他们很大的思想负担和心理负担．高等数学作为一门重要基础课，不仅是后继课程的基础和工具，更重要的是通过对它的学习，可培养学生空间想象、抽象思维、逻辑推理等分析问题和解决问题的能力．

为学好高等数学，要做一定数量的习题．常听一些同学说，课我听懂了，但一遇到做题，就有困难．所以，本书从分析题目的条件和结论间的逻辑关系入手，根据成人识记规律，理清解题思路，揭开数学神秘的面纱，培养学生逻辑思维能力．

本书主要特点：

(1) 通过基本的典型题的分析，揭示数学的基本结构和内在联系、使学生更好地理解其基本概念、基本内涵、基本原理．让学生通过阅读例题，学习数学的基本理论方法、技巧，提高数学运算的能力，使学生既知其然，又知其所以然．

(2) 以一阶微分形式不变性的运算为主线，贯穿于全书，让学生了解：不定积分、定积分、多元函数微分学、多元函数积分学、常微分方程等内容，在很大程度上都是微分形式不变性的不同体现．对高等数学而言，微分是个纲，抓住这个纲，便能右左逢源．

(3) 以极限为基础．导数、定积分、重积分、级数都是极限的不同形式，所以对极限概念要很清楚．本书对这些概念题，特别加了旁注，以强调概念．

(4) 几乎每题的右边，都有注解，以强调解题思想、主要依据、基本公式，以引导学生积极思维，同时也揭示了一种构题方法，使学生学习如何自己编题，从编题中学习如何解题，变被动学习为主动学习．

本书使用说明：

(1)建议读者将本书看作一个习题集，先不要看解题过程，自己动手做题，而后，再比较解题过程和解题思路．有比较才有鉴别，有比较才有深刻的印象，有比较才有深刻的理解．因为数学的解法往往不是惟一的，有多种灵活的解题方法，通过比较可以引起更深入的思考．

(2)通过自己做题实践，再看解题过程，最后再看注释部分．注释部分，一般分两种内容，第一是对所用的初等数学的公式、定理的回顾，这是强化初等数学基本内容的．第二是对高等数学所用定理、公式、概念的强化．这一部分很重要，它提示我们通过例题去学习高等数学的概念和定理的基本内涵和基本应用，不必搞题海战术，数学题是永远做不完的．但是我们可以通过有限的题目去弄懂弄通高等数学的基本概念、基本内容，学习掌握基本计算技巧．

(3)如果你是一位初学高等数学者，初等数学基础也不太好，没关系，只要你是一位有志青年，想通过自己的努力自学成才，那么这本书可以成为你真正的朋友，一步一个脚印地扶你走

向成功.

本书由西安交通大学理学院魏平策划,统稿,西北轻工业学院基础部张慧、西安联合大学李大可、西安交通大学理学院阮小娥编写．西安建筑科技大学理学院潘鼎坤教授审阅了全书,并提出很多建设性意见,使本书更加趋于成熟,所以本书是大家合作的成果．但由于本书成稿匆忙,错误和不尽人意之处在所难免．鉴别此书实用价值的最好裁判是广大读者,愿此书能为你在学习高等数学中得益于一二,也愿热心的读者,在学习之后能提出宝贵的意见,使我们在以后的再版工作中使它更趋于完善．

编者

1999.9

本书使用符号说明

1. $\Rightarrow$:表示充分条件,例 $A\Rightarrow B$ 表示如果 A 成立则 B 成立．
2. $\Leftrightarrow$:表示充要条件,例 $A\Leftrightarrow B$ 表示 A 成立的充分必要条件是 B 成立．
3. $\forall$:表示对于任意的．
4. $\exists$:表示存在着,或说可以找得到．
5. $f(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f(x)$,表示 x 从 x_0 的右侧趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限,称为右极限.
6. $f(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f(x)$,表示 x 从 x_0 的左侧趋于 x_0 时 $f(x)$ 的极限,称为左极限.
7. $f'(x_0+0)=\lim\limits_{x\to x_0^+}f'(x)$,表示 $f(x)$ 的导函数在 x_0 的右极限.
8. $f'(x_0-0)=\lim\limits_{x\to x_0^-}f'(x)$,表示 $f(x)$ 的导函数在 x_0 的左极限．
9. 若 $y=f(x)$, 则 $f'_+(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^+}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,表示 $f(x)$ 在 x_0 的右导数.
10. $f'_-(x_0)=\lim\limits_{\Delta x\to 0^-}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}$,表示 $f(x)$ 在 x_0 的左导数. q

一般来说 $f'(x_0+0)\neq f'_+(x_0)$

$f'(x_0-0)\neq f'_-(x_0)$

目　录

第1章　函数　极限　连续

1-1　内容提要 …… (1)
1-2　集合与函数 …… (2)
1-3　数列极限与函数极限 …… (13)

第2章　导数与微分

2-1　内容提要 …… (29)
2-2　导数概念 …… (30)
2-3　导数或微分的运算 …… (33)
2-4　导数和微分的简单应用 …… (52)

第3章　中值定理及导数应用

3-1　内容提要 …… (55)
3-2　中值定理 …… (56)
3-3　洛必达法则 …… (59)
3-4　导数应用 …… (64)

第4章　不定积分

4-1　内容提要 …… (73)
4-2　分项积分法 …… (74)
4-3　换元积分法 …… (79)
4-4　分部积分法 …… (94)
4-5　有理函数积分 …… (104)
4-6　三角有理函数积分 …… (108)
4-7　无理函数积分 …… (114)

第5章　定积分及其应用

5-1　内容提要 …… (121)
5-2　定积分的基本概念和基本性质 …… (122)
5-3　定积分计算 …… (133)
5-4　定积分的应用 …… (155)

第6章　空间解析几何

6-1　内容提要 …… (165)
6-2　向量代数 …… (166)
6-3　平面与直线 …… (171)
6-4　曲面与空间曲线 …… (177)

第 7 章　多元函数微分法及其应用

7-1　内容提要 …… (183)
7-2　多元函数的极限与连续 …… (184)
7-3　多元函数偏导数与微分 …… (185)
7-4　多元函数偏导数的应用 …… (193)

第 8 章　重积分和曲线积分

8-1　内容提要 …… (199)
8-2　重积分的概念与性质 …… (200)
8-3　直角坐标系下二重积分的计算 …… (205)
8-4　极坐标系下二重积分的计算 …… (209)
8-5　三重积分的计算 …… (216)
8-6　格林公式、曲线积分与路径无关的问题 …… (222)

第 9 章　无穷极数

9-1　内容提要 …… (230)
9-2　常数项级数 …… (231)
9-3　幂级数 …… (247)

第 10 章　常微分方程

10-1　内容提要 …… (263)
10-2　基本概念 …… (264)
10-3　变量可分离的方程 …… (266)
10-4　可化为变量可分离方程的类型 …… (270)
10-5　可降阶的高阶微分方程 …… (275)
10-6　一阶线性微分方程 …… (278)
10-7　二阶线性微分方程解的结构 …… (283)
10-8　二阶常系数齐次线性微分方程 …… (284)
10-9　二阶常系数非齐次线性微分方程 …… (286)

第 1 章　函数　极限　连续

1-1　内容提要

函数

1. 常量、变量、区间、邻域
2. 函数的定义,反函数,复合函数;函数的表示,解析式,分段函数
3. 函数的性质(①单调性、②奇偶性、③有界性、④周期性)
4. 基本初等函数(①幂函数、②指数函数、③对数函数、④三角函数、⑤反三角函数)
5. 初等函数

极限

1. 极限定义
   - (1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n$　(2) $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$　(3) $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$　(4) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$
   - (5) $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x)$　(6) $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x)$　(7) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$
2. 无穷小量与无穷大量,以及无穷小量阶的比较
3. 极限的四则运算与复合函数的极限
4. 极限的性质
   - (1) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = A$
   - (2) $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$ 且 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = A$
   - (3) $\lim f(x) = A \Leftrightarrow f(x) = A + \alpha(x)$ 且 $\lim \alpha(x) = 0$
   - (4) $\lim a_n = A \Rightarrow \forall n, \exists M > 0$,使 $|a_n| < M$
   - (5) $\lim f(x) = A \Rightarrow f(x)$ 在某邻域有界
5. 极限的存在准则
   - (1) a_n 单调有界 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$
   - (2) 如果在某领域 $l(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$
     且 $\lim l(x) = A, \lim h(x) = A$,则 $\lim f(x) = A$
6. 重要极限
   - (1) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n = \mathrm{e}$　　$\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$
   - (2) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x} = 1$　　$\lim\limits_{x\to\infty} x\sin\dfrac{1}{x} = 1$

连续性

1. 定义
   - (1) $\lim\limits_{\Delta x\to 0}\Delta y = 0$;　(2) $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
   - (3) $\forall\varepsilon > 0, \exists\delta > 0$,当 $|x - x_0| < \delta$ 时,$|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ 成立
2. 间断点(① 可去间断点,② 跳跃间断点,③ 振荡间断点,④ 无穷间断点)
3. 连续函数的性质
   - (1) $f(x)$ 在 x_0 点连续 $\Leftrightarrow f(x)$ 在 x_0 左连续且右连续
   - (2) 连续函数的和、差、积、商(分母的极限不为 0)及复合是连续函数
   - (3)在闭区向上的连续函数,存在最大、最小值及介值

1-2 集合与函数

1.1 设 $A=\{1,2,3\}$,$B=\{1,3,5\}$, $C=\{2,4,6\}$

求 $A\cup B, A\cap B, A\cup B\cup C, A\cap B\cap C$

解 $A\cup B=\{1,2,3\}\cup\{1,3,5\}$

$=\{1,2,3,5\}$

$A\cup B\cup C=\{1,2,3,5\}\cup\{2,4,6\}$

$=\{1,2,3,4,5,6\}$

$A\cap B=\{1,2,3\}\cap\{1,3,5\}$

$=\{1,3\}$

$A\cap B\cap C=\{1,3\}\cap\{2,4,6\}=\varnothing$

$A\cup B=\{x \mid x\in A$ 或 $x\in B\}$

$A\cap B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\in B\}$

$A\cup B\cup C=(A\cup B)\cup C$

$A\cap B\cap C=(A\cap B)\cap C$

1.2 设 $A=\{x \mid -2<x<1\}, B=\{x \mid 0\leqslant x\leqslant 2\}$

求 $A\cup B, A\cap B, A-B$

解 $A\cup B=\{x \mid (-2<x<1)$ 或 $(0\leqslant x\leqslant 2)\}$

$=\{x \mid -2<x\leqslant 2\}$

$A\cap B=\{x \mid (-2<x<1)$ 且 $(0\leqslant x\leqslant 2)\}$

$=\{x \mid 0\leqslant x<1\}$

$A-B=\{x \mid -2<x<0\}$

$A-B=\{x \mid x\in A$ 且 $x\overline{\in} B\}$

1.3 设 $A=\{a,b,c,d\}$, $B=\{c,d,e\}$, $C=\{d,e,f\}$

验证(1) $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

(2) $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$

证 (1) 左边 $B\cup C=\{c,d,e,f\}$

$\therefore A\cap(B\cup C)=\{c,d\}$

右边 $A\cap B=\{c,d\}$,$A\cap C=\{d\}$

$\therefore (A\cap B)\cup(A\cap C)=\{c,d\}$

即 左边 = 右边,结论成立.

(2) 左边 $B\cap C=\{d,e\}$

$\therefore A\cup(B\cap C)=\{a,b,c,d,e\}$

右边 $A\cup B=\{a,b,c,d,e\}$

$A\cup C=\{a,b,c,d,e,f\}$

$\therefore (A\cup B)\cap(A\cup C)=\{a,b,c,d,e\}$

即 左边 = 右边,结论成立.

这里验证的是集合的分配律.

1.4 下列各组函数是否相同?为什么?

(1) $f(x)=\lg x^2$ $\qquad g(x)=2\lg x$

函数的定义域和对应法则是决定一个

(2) $f(x) = x \qquad g(x) = \sqrt{x^2}$

(3) $f(x) = \frac{x}{x} \qquad g(x) = 1$

(4) $f(x) = \sin^2 x + \cos^2 x \qquad g(x) = 1$

解 (1) 不同,定义域不同.

$f(x)$ 的定义域是 $x \neq 0$,而 $g(x)$ 的定义域是 $x > 0$.

(2) 不同,对应法则不同 .

$f(x)$ 当 $x > 0$ 时,$f(x) > 0$;当 $x < 0$ 时,$f(x) < 0$;

而 $g(x)$ 当 $x > 0$ 时,$g(x) > 0$;而当 $x < 0$ 时,$g(x) > 0$.

所以,这两个函数是定义域相同而对应法则与值域不同的两个函数.

(3) 不同. $f(x)$ 在 $x = 0$ 处无意义,而 $g(x) = 1$,在 R 上恒成立.

(4) 相同. 因为对于任意 $x \in R$,都有恒等式 $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$\therefore f(x) = g(x)$

函数的两个"要素".

所谓两个函数相同,是指定义域相同且同一个自变量对应的函数值也相同,即 $f(x) = g(x)$.

因此可以说,两个函数的表达式是否相同并不重要,重要的是其效果是否相同.

1.5 求下列函数的定义域

(1) $y = \sqrt{9 - x^2}$ (2) $y = \frac{1}{1 - x^2} + \sqrt{1 + x}$

(3) $y = \frac{\lg(3 - x)}{\sqrt{x - 1}}$ (4) $y = \arcsin \frac{2 - x}{3}$

解 (1) $9 - x^2 \geqslant 0$, $x^2 \leqslant 9$,即 $|x| \leqslant 3$. 定义域为 $-3 \leqslant x \leqslant 3$.

(2) $1 - x^2 \neq 0$ 且 $1 + x \geqslant 0$

即 $x \neq \pm 1$ 且 $x \geqslant -1$

$\therefore$ 定义域为 $x > -1$ 且 $x \neq 1$

用区间可表示为 $(-1,1) \cup (1, +\infty)$

(3) $3 - x > 0$ 且 $x - 1 > 0$, 即 $1 < x < 3$

$\therefore$ 定义域为$(1,3)$.

(4) $\left|\frac{2 - x}{3}\right| \leqslant 1$ 即 $|2 - x| \leqslant 3$

$-3 \leqslant x - 2 \leqslant 3 \qquad -1 \leqslant x \leqslant 5$

$\therefore$ 定义域为$[-1,5]$.

$y = \sqrt{u}$ 要求 $u \geqslant 0$,负数不能开平方,分母不能为 0.

$\frac{1}{\sqrt{u}}$ 要求 $u > 0$

$\lg v$ 要求 $v > 0$

$\arcsin u$ 的定义域为 $|u| \leqslant 1$.

绝对值不等式 $|u| \leqslant a$ 等价于 $-a \leqslant u \leqslant a$.

1.6 已知 $f(x) = \frac{1}{x + 2}$, 求 $f(0), f(2), f(-x), f(x + 1), f(2x) + 1, f(\frac{1}{x}), \frac{1}{f(x)}$

解 $f(0) = \frac{1}{0 + 2} = \frac{1}{2}$

$f(2) = \frac{1}{2 + 2} = \frac{1}{4}$

$f(-x) = \frac{1}{(-x) + 2} = \frac{1}{2 - x}, \qquad x \neq 2$

$f(x) = \frac{1}{x + 2}$ 相当于 $f(\cdot) = \frac{1}{(\cdot) + 2}$

$(\cdot)$ 中可填写 $0, 2, -x, x + 1$ 等.

$$f(x+1)=\frac{1}{(x+1)+2}=\frac{1}{x+3},\qquad x\neq-3$$

$$f(2x)+1=\frac{1}{(2x)+2}+1=\frac{3+2x}{2x+2},\qquad x\neq-1$$

$$f\left(\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{x}\right)+2}=\frac{x}{1+2x},\qquad x\neq-\frac{1}{2},x\neq0$$

$$\frac{1}{f(x)}=\frac{1}{\frac{1}{x+2}}=x+2,\qquad x\neq-2$$

1.7 设 $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{2}x, & 0\leqslant x\leqslant1\\ x, & 1<x<3\\ x^2-x+1, & 3\leqslant x\leqslant4\end{cases}$

求 $f(\frac{1}{2}),f(2),f(3),f(a)$

分段函数求值要注意定义域,当自变量取不同值时,应代入相对应的表达式.

解 $\because \frac{1}{2}\in[0,1]\quad \therefore f(\frac{1}{2})=\frac{1}{2}x\Big|_{x=\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$

$\because 2\in(1,3)\quad \therefore f(2)=x|_{x=2}=2$

$\because 3\in[3,4]\quad \therefore f(3)=(x^2-x+1)|_{x=3}=3^2-3+1=7$

$\because a$ 是一个不确定的常数,因而需要分别讨论其函数值 $f(a)$

当 $a\in[0,1]$ 时,$f(a)=\frac{1}{2}a$

当 $a\in(1,3)$ 时,$f(a)=a$

当 $a\in[3,4]$ 时,$f(a)=a^2-a+1$

1.8 判断下列函数的奇偶性

(1) $f(x)=x^3+3x$　　(2) $f(x)=\frac{1}{x^2},\quad x\neq0$

(3) $f(x)=x+\sin x$　　(4) $f(x)=\sin x-\cos x$

(5) $f(x)=xe^x$　　(6) $f(x)=\lg\frac{1-x}{1+x},\quad -1<x<1$

(7) $f(x)=\frac{1-x^2}{\cos x},\qquad x\in(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$

(8) $f(x)=x\sin\frac{1}{x},\quad x\neq0$

解 (1) $f(-x)=(-x)^3+3(-x)$

$=-x^3-3x$

$=-(x^3+3x)$

$=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 是奇函数,见图 1.1.

(2) $f(-x)=\frac{1}{(-x)^2}=\frac{1}{x^2}=f(x)$

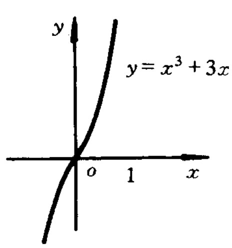


图 1.1

定义于对称区间的函数 $f(x)$ 如满足 $f(-x)=f(x)$,称 $f(x)$ 为**偶函数**;如满足 $f(-x)=-f(x)$,称 $f(x)$ 为**奇函数**.

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$是偶函数，见图 1.2.

(3) $f(-x)=(-x)+\sin(-x)$

$=-x-\sin x$

$=-(x+\sin x)$

$=-f(x)$

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$是奇函数.

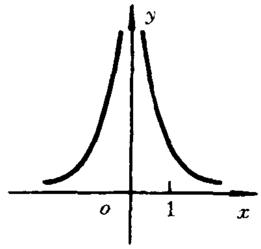


图 1.2

(4) $f(x)=\sin(-x)-\cos(-x)$

$=-\sin x-\cos x$

$=-(\sin x+\cos x)$

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$既不是奇函数又不是偶函数.

(5) $f(-x)=(-x)e^{-x}=-xe^{-x}$

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$既不是奇函数又不是偶函数.

(6) $f(-x)=\lg\dfrac{1-(-x)}{1+(-x)}=\lg\dfrac{1+x}{1-x}$

$=\lg\dfrac{1}{\dfrac{1-x}{1+x}}=\lg\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)^{-1}$

$=-\lg\dfrac{1-x}{1+x}=-f(x),\quad -1<x<1$

$\therefore f(x)$ 在$(-1,1)$是奇函数.

(7) $f(-x)=\dfrac{1-(-x)^2}{\cos(-x)}$

$=\dfrac{1-x^2}{\cos x}=f(x),\quad -\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{\pi}{2}$

$\therefore f(x)$ 在$(-\dfrac{\pi}{2},\dfrac{\pi}{2})$是偶函数.

(8) $f(-x)=(-x)\sin\dfrac{1}{(-x)}$

$=-x(-\sin\dfrac{1}{x})$

$=x\sin\dfrac{1}{x}=f(x),\qquad x\neq 0$

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,0)\cup(0,+\infty)$是偶函数.

以上等式均不满足，则称为非奇非偶函数.

偶函数的图形对称于 y 轴，奇函数的图形对称于坐标原点.

$u=\dfrac{1}{u}$

$\lg u^k=k\lg u$

$\sin(-\dfrac{1}{x})=-\sin\dfrac{1}{x}$

1.9 设下面函数都定义在$(-a,a)$区间内

证明(1) 偶函数的和是偶函数，奇函数的和是奇函数.

(2) 偶函数的积是偶函数，偶数个奇函数的积是偶函数.

(3) 一个偶函数与另一个奇函数之积是奇函数.

偶函数的倒数是偶函数；奇函数的倒数是奇函数.

证 设$f_1(x),f_2(x)$为偶函数

$g_1(x),g_2(x)$为奇函数

(1) 令 $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$

$f(-x)=f(x)$

$\because f(-x)=f_1(-x)+f_2(-x)$
$=f_1(x)+f_2(x)=f(x)$
$\therefore f(x)$ 是偶函数.
令 $g(x)=g_1(x)+g_2(x)$
$\because g(-x)=g_1(-x)+g_2(-x)$
$=-g_1(x)-g_2(x)$
$=-[g_1(x)+g_2(x)]=-g(x)$
$\therefore g(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $f(x)=f_1(x)f_2(x)$
则 $f(-x)=f_1(-x)f_2(-x)=f_1(x)f_2(x)=f(x)$
$\therefore f_1(x)f_2(x)$ 是偶函数.
令 $g(x)=g_1(x)g_2(x)$
则 $g(-x)=g_1(-x)g_2(-x)=[-g_1(x)][-g_2(x)]$
$=g_1(x)g_2(x)=g(x)$
$\therefore g_1(x)g_2(x)$ 是偶函数.

(3) 令 $S(x)=f_1(x)g_1(x)$
则 $S(-x)=f_1(-x)g_1(-x)=f_1(x)[-g_1(x)]$
$=-f_1(x)g_1(x)=-S(x)$
$\therefore f_1(x)g_1(x)$ 是奇函数.

故 $f(x)$ 是偶函数.

因
$f(-x)=-f(x)$
故 $f(x)$ 是奇函数.

用1.9的结论,1.8会更方便些.

1.10 设 $f(x)$ 定义在 $(-\infty,+\infty)$ 上
证明(1) $f(x)+f(-x)$ 是偶函数, $f(x)-f(-x)$ 是奇函数.
(2) $f(x)$ 可表示成奇函数与偶函数之和.

本题的证明技巧是构造了函数 $F(x),G(x)$.

证 (1) 设 $F(x)=f(x)+f(-x)$
则 $F(-x)=f(-x)+f[-(-x)]$
$=f(-x)+f(x)$
$=f(x)+f(-x)=F(x)$
$\therefore F(x)$ 是偶函数.
设 $G(x)=f(x)-f(-x)$
则 $G(-x)=f(-x)-f[-(-x)]$
$=f(-x)-f(x)$
$=-f(x)+f(-x)$
$=-[f(x)-f(-x)]$
$=-G(x)$
$\therefore G(x)$ 是奇函数.

(2) 令 $F(x)=\frac{1}{2}[f(x)+f(-x)]$
$G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

由(1)可知 $F(x)$ 是偶函数，$G(x)$ 是奇函数，

且 $F(x)+G(x)=\frac{1}{2}[f(x)-f(x)]+\frac{1}{2}[f(x)-f(-x)]$

$$=\frac{1}{2}f(x)+\frac{1}{2}f(x)=f(x)$$

$\therefore$ $f(x)$ 可表示成偶函数与奇函数之和.

这表明：对于任一定义于对称区间的函数 $f(x)$，都可以表示成偶函数与奇函数之和.

1.11 判断下列函数的单调性

(1)$f(x)=x+1$ (2)$f(x)=-2x$

(3)$f(x)=2x^2+1$ (4)$f(x)=e^{-x}$

解 (1)$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，对定义域内任意的 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=(x_2+1)-(x_1+1)=x_2-x_1>0$

$\therefore$ $f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调增.

(2)$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，对定义域内任意的 $x_1<x_2$，有 $f(x_2)-f(x_1)=(-2x_2)-(-2x_1)=-2(x_2-x_1)<0$

$\therefore f(x)$ 在$(-\infty,+\infty)$上单调减.

设 $f(x)$ 定义在 D 内，若对 D 内任意两点 $x_1<x_2$，恒有 $f(x_2)>f(x_1)$，则称 $f(x)$ 为**单调增**；若恒有 $f(x_2)<f(x_1)$，则称 $f(x)$ 为**单调减**.

具体方法：

对于任意的 $x_1<x_2$，$f(x_2)-f(x_1)>0$是增函数；$f(x_2)-f(x_1)<0$，是减函数.

(3)$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，对定义域内任意的 $x_1<x_2$，

有 $f(x_2)-f(x_1)=(2x_2^2+1)-(2x_1^2+1)$

$$=2(x_2^2-x_1^2)=2(x_2+x_1)(x_2-x_1)$$

当 x_1 与 x_2 在$(-\infty,0)$中取值时，$x_1+x_2<0$，$x_2-x_1>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)<0$，函数单调减.

当 x_1 与 x_2 在$(0,+\infty)$中取值时，$x_1+x_2>0$，$x_2-x_1>0$

$\therefore f(x_2)-f(x_1)>0$，函数单调增.

若从定义域$(-\infty,+\infty)$内来看，$f(x)$ 不是单调函数.

(4)$f(x)$ 的定义域是$(-\infty,+\infty)$，对定义域内任意 $x_1<x_2$，

有 $f(x_2)-f(x_1)=e^{-x_2}-e^{-x_1}=e^{-x_1}[e^{-(x_2-x_1)}-1]<0$

$\therefore$ $f(x)$ 是单调减函数.

函数的单调性随讨论区间的不同而不同.

1.12 设 $f(x)$ 为定义在$(-1,1)$上的奇函数，若 $f(x)$ 在$(0,1)$内单调增，证明 $f(x)$ 在$(-1,0)$内也单调增.

证 $\because f(x)$ 是奇函数，$\therefore$ 在$(-1,1)$内 $f(-x)=-f(x)$

对$(-1,0)$中任意两个数 x_1 与 x_2，若 $x_1<x_2$，

则 $f(x_2)-f(x_1)=f[-(-x_2)]-f[-(-x_1)]$

$$=-f(-x_2)-[-f(-x_1)]$$

$$=f(-x_1)-f(-x_2)$$

根据奇函数定义.

由于 $-1 < x_1 < x_2 < 0$ 即 $0 < -x_2 < -x_1 < 1$

$\therefore f(-x_1) - f(-x_2) > 0$ 从而 $f(x_2) - f(x_1) > 0$

即 $f(x)$ 在 $(-1,0)$ 内也是单调增函数.

$f(x)$ 在 $(0,1)$ 区间内单调增.

1.13 求下列函数的周期

(1) $y = \sin(\omega x), (\omega > 0)$ (2) $y = \sin\frac{x}{\omega}, (\omega > 0)$

(3) $y = \sin x\cos x$ (4) $y = \sin^2 x$

对于 $y = f(x)$,若存在最小正数 T,使 $f(x \pm T) = f(x)$ 对定义域内任意 x 都成立,称 $f(x)$ 是周期函数,T 称为周期.

解 (1) $\because \sin x$ 的周期是 2π,

$\therefore \sin\omega x = \sin(2\pi + \omega x) = \sin\omega(x \pm \frac{2\pi}{\omega})$

$\therefore \sin\omega x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{\omega}$.

(2) 同理, $\sin\frac{x}{\omega} = \sin(\frac{x}{\omega} \pm 2\pi)$

$= \sin\frac{1}{\omega}(x \pm 2\pi\omega)$

$\therefore \sin\frac{x}{\omega}$ 的周期是 $2\pi\omega$.

关键是找到一个 T 使 $\sin\omega x = \sin\omega(x \pm T)$

(3) $\because \sin x\cos x = \frac{1}{2}\sin 2x$

由(1)的结果可知, $\sin 2x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore \sin x\cos x$ 的周期是 π.

利用倍角公式 $\sin 2x = 2\sin x\cos x$

(4) $\because \sin^2 x = \frac{1}{2}(1 - \cos 2x)$

同(1),可证 $\cos 2x$ 的周期是 $\frac{2\pi}{2} = \pi$

$\therefore \sin^2 x$ 的周期是 π.

利用倍角公式 $\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

1.14 证明:若 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上既是奇函数又是偶函数,则 $f(x) \equiv 0, x \in [-a,a]$.

证 当 $x \in [-a,a]$ 时,因为 $f(x)$ 是奇函数,所以 $f(-x) = -f(x)$

又 $f(x)$ 是偶函数,所以 $f(-x) = f(x)$

两式相减 $2f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$.

1.15 求下列函数的反函数

(1) $y = 5x + 2$ (2) $y = \frac{x+2}{x-2}$ $(x \neq 2)$

(3) $y = 1 + \lg(1 + x)$ $(x > -1)$ (4) $y = \sqrt[3]{x+1}$

在 $y = f(x)$ 中,将 y 看成已知,解出 $x = f^{-1}(y)$,再将自变量写成 x,因变量写成 y, $y = f^{-1}(x)$,就是原来函数的反函数.

解 (1) $5x = y - 2$ $x = \frac{1}{5}(y - 2)$

$\therefore$ 其反函数为 $y = \frac{1}{5}(x - 2)$

$(2)(x-2)y = x+2 \qquad xy-2y = x+2$

$xy - x = 2+2y \qquad x = \dfrac{1}{y-1}(2+2y)$

$\therefore$ 其反函数为 $y = \dfrac{2(x+1)}{x-1}, \qquad x \neq 1$

$(3) y-1 = \lg(x+1) \qquad \therefore x+1 = 10^{y-1}$

$\therefore$ 其反函数为 $y = 10^{x-1}-1, \qquad x \in R$

$(4) y^3 = x+1 \qquad x = y^3-1$

$\therefore$ 其反函数为 $y = x^3-1 \quad x \in R$

注意反函数的定义域.

1.16 求由下列函数构成的复合函数 $y = y(x)$

$(1) y = u^2, \qquad u = \lg x \qquad (2) y = \sqrt{u}, \qquad u = x^2+1$

$(3) y = \dfrac{1-u}{1+u}, \qquad u = \dfrac{1}{x} \qquad (4) y = 3^u, \quad u = v^2, \quad v = \sin x$

$(5) y = e^u, \qquad u = \sqrt{v}, \qquad v = x^2+1$

解 $(1) y = (\lg x)^2 = \lg^2 x, \qquad x > 0$

$(2) y = \sqrt{x^2+1}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$(3) y = \dfrac{1-\dfrac{1}{x}}{1+\dfrac{1}{x}} = \dfrac{x-1}{x+1}, \qquad x \neq -1$ 且 $x \neq 0$

$(4) y = 3^{v^2} = 3^{\sin^2 x}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

$(5) y = e^{\sqrt{v}} = e^{\sqrt{x^2+1}}, \qquad x \in (-\infty, +\infty)$

1.17 设 $f(x) = 3x^2+2x, \qquad \varphi(t) = \lg(1+t)$

求 $f[\varphi(t)]$ 与 $\varphi[f(x)]$.

解 $f[\varphi(t)] = 3\varphi^2(t) + 2\varphi(t)$

$= 3\lg^2(1+t) + 2\lg(1+t) \qquad (t > -1)$

$\varphi[f(x)] = \lg[1+f(x)] = \lg(1+3x^2+2x), \quad (x \in R)$

$3x^2+2x+1>0$ $\forall x \in R$ 都成立.

1.18 指出下列函数是由哪些简单函数复合而成的?

$(1) y = \sqrt{1-\sin x} \qquad (2) y = \sin^2 x$

$(3) y = \sin x^2 \qquad (4) y = e^{x^2}$

$(5) y = e^{\cos^2 x} \qquad (6) y = (1+\lg x)^5$

$(7) y = (2^x+1)^{\frac{2}{3}} \qquad (8) y = \lg[\lg(\lg x)]$

解 $(1) y = \sqrt{u}, \quad u = 1-\sin x \qquad (x \in R)$

$(2) y = u^2, \qquad u = \sin x \qquad (x \in R)$

$(3) y = \sin u, \qquad u = x^2 \qquad (x \in R)$

$(4) y = e^u, \qquad u = x^2 \qquad (x \in R)$

注意(2)和(3)的区别;
(5)不能直接写成

(5)$y = e^u$,　$u = v^2$,　$v = \cos x$,　$(x \in R)$

(6)$y = u^5$,　$u = 1 + \lg x$　$(x > 0)$

(7)$y = u^{\frac{2}{3}}$,　$u = 2^x + 1$　$(x \in R)$

(8)$y = \ln u$,　$u = \ln v$,　$v = \ln x$　$(x > e)$

$v = \cos^2 x$

(8)中 $\because u > 0, \therefore v > 1$.

1.19　分别就 $a = 2, a = -2$,讨论 $y = \lg(a - \sin x)$ 是不是复合函数?

解　当 $a = 2$ 时,$y = \lg(2 - \sin x)$

$\because |\sin x| \leqslant 1 \quad \therefore 2 - \sin x > 0$

$\therefore y = \lg(2 - \sin x)$ 是复合函数　$(x \in R)$

而当 $a = -2$ 时,$y = \lg(-2 - \sin x)$

$\because |\sin x| \leqslant 1 \quad \therefore -2 - \sin x < 0$　对数无意义.

$\therefore$ 不能组成复合函数.

$y = \lg N$,则 $N > 0$.

1.20　讨论 $[f(x)]^2$ 与 $f(x^2)$ 是否是同一个函数?

解　当 $f(x) = x^2$ 时,　$f^2(x) = (x^2)^2 = x^4$

$f(x^2) = (x^2)^2 = x^4$　$\therefore$ 两个函数相同.

当 $f(x) \neq x^2$ 时,$\because [f(x)]^2$ 是由 $y = u^2, u = f(x)$ 复合而成,而 $f(x^2)$ 是由 $y = f(u), u = x^2$ 复合而成,$\therefore$ 它们不是同一函数.

复合过程中次序不同,得到的函数也不同.

1.21　设 $f(x+1) = x^2 - 3x + 2$,求 $f(x)$.

解法 1　令 $u = x + 1$,则 $x = u - 1$,代入原式

$$f(u) = (u-1)^2 - 3(u-1) + 2 = u^2 - 2u + 1 - 3u + 3 + 2 = u^2 - 5u + 6$$

$\therefore f(x) = x^2 - 5x + 6$

解法 2　$f(x+1) = x^2 - 3x + 2$

$$= x^2 + 2x + 1 - 5x + 1 = (x+1)^2 - 5x - 5 + 6 = (x+1)^2 - 5(x+1) + 6$$

$\therefore f(x) = x^2 - 5x + 6$

1.22　证明 $y = x\cos x$ 不是周期函数.

证　用反证法,设 $y = x\cos x$ 是周期函数,且设 $T(>)0$ 为 y 的周期,则对任何实数 x 有恒等式 $(x+T)\cos(x+T) = x\cos x$.

令 $x = 0$,则得 $T\cos T = 0$　即 $\cos T = 0$

令 $x = \frac{\pi}{2}$,　则 $(\frac{\pi}{2} + T)\cos(\frac{\pi}{2} + T) = \frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$

$\cos\frac{\pi}{2} = 0$

$\cos(\frac{\pi}{2} + T) = -\sin T$