应用数学丛书

模糊数学

李洪兴 汪培庄 编著

国防工业出版社

应 用 数 学 丛 书

模 糊 数 学

李洪兴 汪培庄 编著

国 防 工 业 出 版 社

(京)新登字 106 号

图书在版编目（CIP）数据

模糊数学/李洪兴，汪培庄编著.—北京：
国防工业出版社，1993
（应用数学丛书）
ISBN 7-118-01156-8

Ⅰ.模…
Ⅱ.① 李…② 汪…
Ⅲ.模糊数学
Ⅳ.0159

应用数学丛书
模 糊 数 学
李洪兴 汪培庄 编著
责任编辑 王 华
*
国防工业出版社出版发行
（北京市海淀区紫竹院南路 23 号）
（邮政编码 100044）
新华书店经售
北京地质印刷厂印装
*
850×1168 毫米 32 开本 印张 $9\frac{3}{8}$ 243 千字
1994年 2 月第一版 1994 年 2 月第一次印刷 印数：1—3500册

ISBN 7-118-01156-8/O·91 定价：7.20元

出 版 说 明

近二十年来电子工程、控制工程、系统工程及其它领域都获得巨大发展。众所周知，这些科学技术研究的发展是与现代逐渐形成的应用数学学科紧密相联，相辅相成。尤其近年发展起来的边缘学科，更是与数学紧密结合。但一般数学专著比较偏重于论证严谨，全面系统，篇幅较大，理论较深。广大科技工作者学习此类著作，往往需时较多，与工作结合不紧，收效不大。本丛书将为目前在电子工程、控制工程、系统工程等领域工作的同志在数学基础的提高上，提供适合其工作特点的数学参考书。

本丛书是一种介于现代应用数学专著与工程专业理论书籍之间的桥梁参考著作。更着重于科技工作中应用较多的数学概念，分析和解题的基本技巧。也包括一部分适合于实际工作者为学习更高深的现代应用数学专著所需之基础知识。

本丛书选材包括三个方面：基础数学；应用数学有关领域的基础介绍；应用于科技中的典型基础专业理论。出版采用分册形式，各册内容独立，自成系统，但仍有少量交叉，分期分批出版。

丛书可供大专院校有关专业研究生、教师、从事科研生产的工程师参考。

前　言

模糊（Fuzzy）数学是以模糊集合论为基础而发展起来的一门新兴学科（以下文中模糊均用Fuzzy）。Fuzzy集合的概念是由美国控制论专家扎德（Zadeh）首次提出的，1965年，他发表了奠基性的论文“Fuzzy Sets”，这标志着Fuzzy数学的诞生。20多年来，Fuzzy集合论得到了迅速发展，Fuzzy数学已逐渐形成了一个新的独立的数学分支。

数学和Fuzzy放在一起不降低数学的严格性，而是要用数学去处理各种各样的Fuzzy现象。不要把“Fuzzy”认为是贬义的，相反地它吸取了人类大脑对复杂事物进行Fuzzy识别和Fuzzy判断的特点，丰富了数学方法，扩大了数学的应用领域。

本书简明地叙述了Fuzzy数学基本理论，重点介绍应用方法，深入浅出地把Fuzzy数学的大致内容展现在读者面前。在体系上是自足的，凡了解微积分、离散数学、线性代数以及概率论与数理统计的基本概念的大专院校本科生、研究生、工程技术人员都能顺利地阅读本书。

编　者

于北京师范大学

应 用 数 学 丛 书 目 录

第 一 批

1. Z变换与拉普拉斯变换		关肇直	王恩平	编著
2. 常微分方程及其应用		秦化淑	林正国	编著
3. 实变函数论基础			胡钦训	编著
4. 正交函数及其应用			柳重堪	编著
5. 沃尔什函数与沃尔什变换		关肇直	陈文德	编著
6. 圆柱函数			刘 颖	编著

第 二 批

1. 集合论			程极泰	编著
2. 图 论			王朝瑞	编著
3. 概率论			狄昂照	编著
4. 矩阵理论		王耕禄	史荣昌	编著
5. 复变函数论			杨维奇	编著
6. 逼近论	徐利治	周蕴时	孙玉柏	编著
7. 矢量与张量分析	冯潮清	赵愉深	何浩法	编著
*8. 模糊数学		李洪兴	汪培庄	编著
*9. 编码理论		肖国镇	卿斯汉	编著
10. 应用泛函分析			柳重堪	编著

第 三 批

1. 网络理论			张正寅	编著
2. 线性系统与多变量控制			叶庆凯	编著

3.	椭圆函数及其应用		高本庆	编著
4.	拓扑理论及其应用	王则柯	凌志英	编著
5.	数理逻辑		沈百英	编著
6.	误差分析与数据处理		贾沛璋	编著
7.	随机过程理论及应用		熊大国	编著
8.	线性估计与随机控制	卢伯英	陈宗基	编著
9.	渐近分析方法及应用	徐利治	陈文忠	编著
10.	预测的数学方法		张有为	编著
11.	变分法及其应用	叶庆凯	郑应平	编著
12.	应用离散数学		陈文德	编著
13.	多项式与多项式矩阵	王恩平	王朝珠	编著
14.	群论	刘木兰	冯克勤	编著
15.	应用组合论		刘振宏	编著
16.	广义函数及其解析和调和表示	李邦河	李雅卿	编著

---

* 表示即将出版的书目。其余为已出版的书目。

目　录

第一章 Fuzzy集合的朴素思想

§1.1 Fuzzy现象

在人类的日常活动中，几乎处处是Fuzzy现象或Fuzzy概念。例如，“年青人”，“高个子”，“胖子”，“多云”，“黄昏”，“高速度”，“污染”，“有矿”，“柔软”，“四肢无力”，“性能良好”等等。是否可以这样讲，世界上的现象，Fuzzy性是绝对的，而清晰性或精确性是相对的。人脑中所形成的概念几乎都是Fuzzy的，由此形成的判断与推理也都是Fuzzy的。人们为了表达和传递知识而使用的语言巧妙地渗透着Fuzzy性，用最少的词汇表达尽可能多的信息。日本学者浅居喜代治说：“人们在描述某个对象（客体）时，作为认识主体的那个人必须首先认识这个对象，可是人类又不能十分明确地认识各种各样的对象。例如，认识的对象包含了作为认识主体的我们自身时，要对这个对象给出明确的描述就不可能，因为主体和客体混淆起来了。因此，现实对象的大多数不得不用‘Fuzzy的表现’来表现。这就是说，可以认为Fuzzy的现象对于人类是一个本质的东西。”[7]

随着信息革命的需要，人们不可避免地要处理大量的Fuzzy现象，而传统的方法和已有的工具面对Fuzzy现象又显得十分不足，以致精确性与Fuzzy性的对立越发突出。参考文献〔1〕曾作过这样的论述：“精确性与Fuzzy性的对立，是当今科学发展所面临的一个十分突出的矛盾。各门学科迫切要求数学化、定量化。但是，科学的深化意味着研究对象的复杂化，复杂的东西又难于精确化。电子计算机的出现，在一定程度上解决着这个矛盾。然而，正是由于电子计算机的出现，使得这种矛盾更加激化：一方面，严密的程序要求高度的精确；另一方面，机器所执行的日益繁难的任务，使它所面临的系统日益复杂”。

扎德正是注意到了这种对立，提出了这样一条**互克性原理**：“当系统的复杂性日趋增长时，我们作出系统特性的精确然而有意义的描述能力将相应降低，直至达到这样一个阈值，一旦超过它，精确性和有意义性将变成两个几乎互相排斥的特性。”

这意味着，复杂程度越高，有意义的精确化能力便越低。这正说明精确的相对性，过分的精确反倒模糊，适当的模糊反而精确。

§1.2 概念与集合

“概念”是人们常使用的名词，例如“男人”就是一个概念。一个概念有其内涵和外延。所谓内涵是指符合此概念所具有的共同属性，例如男人这一概念的内涵就是男人所有的特征。而外延指的是符合此概念的全体对象所组成的集合，男人这一概念的外延就是全体男人。

集合可以表现概念，集合之间还有运算和变换，这些运算和变换可以表现判断与推理。因此建立在集合论基础上的现代数学便成了可以描述和表现各门学科的形式语言和系统。

集合论是由德国数学家康托（G. Cantor）于1895年创立的。他的重要思想方法之一就是概括原则。所谓概括原则是指任给一个性质P，便能把所有满足性质P的对象，也仅由具有性质P的对象汇集在一起构成一个集合，用符号来表示就是

$$A=\{a \mid P(a)\} \tag{1-1}$$

其中a表示A的任何一个元素，$P(a)$表示a具有性质P，$\{\ \ \}$表示把所有具有性质P的a汇成一个集合。因此，概括原则的另一表达式为

$$(\forall a)\ (a\in A \Longleftrightarrow P(a)) \tag{1-2}$$

其中“$\forall$”表示“对每一个”，“$\in$”表示“属于”，“$\Longleftrightarrow$”表示“当且仅当”。

对任何一个概念下定义，必须借助于比它更为基本的概念。然而在各个历史发展阶段中，总有一些概念只能自相解释，而找不到比它们更为基本的概念。例如，集合就是这样一个概念。

康托曾对集合作过这样的描述："把一些明确的（确定的）、彼此有区别的、具体的或想象中抽象的东西看成一个整体，就叫做集合。"

形象地讲，我们想象有一个透明而不可穿透的薄膜，就像一只严格密封的袋子。假设在这只袋子中包含了已知集合A的元素，除此以外，再无别的东西，这样的袋子就是一个集合。这个袋子恰恰表示了将元素汇集在一起的那个作用，正是由于这个作用的结果，才产生了集合。

这里要强调指出，康托要求组成集合的那些对象是确定的，彼此有区别的。实际上是要求用以构成集合的性质P必须是界线分明的，亦即要求任何对象要么具有性质P，要么不具有性质P。因此，排中律被满足。按照这一要求，集合所表现的概念（性质或命题），真就是真，假就是假，只有真假二字以供推理，形成一种二值逻辑。于是数学对于客观事物便作了一个绝对化的写像。这样，数学便对人脑实行了一种分离，这种分离有着重要的意义，但也给数学自身的应用和发展带来了很大的局限性。人脑中的概念，几乎都是没有明确外延的。例如，"胖子"（性质P）这样一个概念，在康托的意义下就不能造出集合，因为对任何一个人来说，他是否具有性质P（胖子）是不能明确判定的。

没有明确外延的概念叫做 **Fuzzy 概念**。Fuzzy 概念能否硬性地用集合来刻画呢？秃头悖论给出了否定的回答。显然，"秃头"是个 Fuzzy 概念，因为任何一个人是否是"秃子"几乎是无法判定的。或许有人说，可以规定一个数字，例如n_0，具有n_0根头发以下的人算是秃子，超过n_0根的人便不秃。这自然是不合理的，因为一根头发之差不能分"楚河"，"汉界"。于是，我们有下列的

公设　若具有n根头发的人是秃头，则具有$n+1$根头发的人亦秃。

基于这个公设，我们来证明

秃头悖论　任何人都是秃子。

证明 采用数学归纳法。

（1）仅有一根头发的人自然是秃子；

（2）假定有n根头发的人是秃子；

（3）由公设，便知有$n+1$根头发的人也是秃子。

由归纳法原理，得出结论：任何人都是秃子。

这个悖论出现的原因，在于数学归纳法是以康托的集合论为基础的基本数学方法，而“秃头”是个Fuzzy概念，用一个精确的方法，处理了一个Fuzzy概念。或者说，把一个二值逻辑的推理，运用到一个二值逻辑所不能施行的判断上去。因此，Fuzzy概念与（普通）集合是不协调的。

§1.3 Fuzzy集合的直观概念

量与质是统一的，量的变化包含着质变。从头发的根数来区分“秃”与“不秃”绝对的界限是没有的，但根数的加1与减1又都必须计较，在这个微小的量变之中已经蕴含着质的差别，而这种差别是绝对不能只用“是”与“非”这两个字刻画出来的。

在逻辑上，“是”与“非”作为逻辑值可分别记为1（等于100%，表示一个命题百分之百地可靠，其真确程度为1）与0（等于1——100%，表示一个命题百分之百地不可靠，其真确程度为零）。逻辑值是对命题真确程度的一种度量。二值逻辑把真与假绝对化，只容许有1，0这两个值。“秃头悖论”给我们启示，对于Fuzzy概念，仅用这两个值是不够的，必须在1与0之间采用其它中间状态的逻辑值来表示不同的真确程度。例如，逻辑值可以为0.5（等于50%，表示一个命题半真半假，其真确度为0.5）；逻辑值若为0.7（等于70%，表示一个命题“三七开”，七分真三分假，其真确度为0.7）。

怎样才能使数学能够处理Fuzzy现象呢？从根本上讲，就要改造康托集合，或者说要建立一种新的集合，自然要称其为Fuzzy集合。康托在创造集合论时，首先要承认排中律，这实际上，他

把 Fuzzy 现象排斥在外。因此，建立 Fuzzy 集合的关键在于否定排中律。形象地说，就是把不可穿透的“薄膜”换为可穿透的薄膜。于是可以出现这样的元素，它穿破“薄膜”且位于其上，从而它表现了中介状态。

在实际问题中，集合总是作为某个概念的外延而出现的。因此总要把涉及的议题限制在一定的范围内。例如，要讨论“男人”这一概念，不必去考虑那些逢马牛不相及的事物，可以把议题限制在“人”这个范围内，从一切人（记为U）中选出所有男人，构成U上的一个集合A，A便是“男人”这个概念的外延。

被讨论的全体对象称为**论域**（universe），常以大写英文字母$U, V, \cdots, X, Y, \cdots$等表示。论域中每个对象称为**元素**（element），以相应的小写字母$u, v, \cdots, x, y, \cdots$等表示。

给定论域U，U中一部分元素全体，称为U上的一个**集合**（set），常以大写英文字母$A, B, C, \cdots$等表示。

在U中任意指定一个元素u及U上任意一个集合A，在u与A之间，要么u属于A（记作$u \in A$），要么u不属于A（记作$u \notin A$），二者必居其一，且仅居其一。

若$u \in A$，记为1，表示u绝对地属于A；若$u \notin A$，记为0，表示u绝对地不属于A。要想建立 Fuzzy 集合，就必须把元素对集合的绝对隶属关系扩展为各种不同的隶属程度。

论域U中的一个元素u可以想象为U中一个没有大小没有质量的“点子”，U上一个集合A可视为U中一个“圆圈”（袋子）。u是否属于A，看它是否在圈子中，参看图 1-1。

现在我们介绍 Fuzzy 集合的两种直观解释。

第一种解释是把论域U中“点子”换为具有**单位长度的线段**，于是中介隶属关系很容易刻画出来。参见图 1-2。

这时，我们把U上的一个 Fuzzy 集合记为$\underset{\sim}{A}$。若元素u位于$\underset{\sim}{A}$（圆圈）的内部，记为1；若u位于$\underset{\sim}{A}$的外部，记为0；若u部分地在$\underset{\sim}{A}$内又部分地在$\underset{\sim}{A}$外，则表示了中介隶属关系，u位于$\underset{\sim}{A}$内部的长度表示了u对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度。

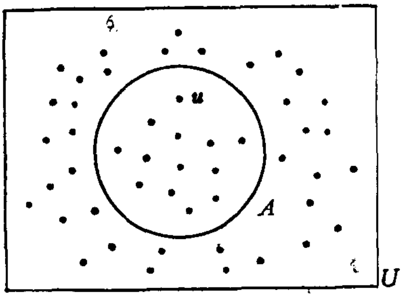

图 1-1 论域、集合、元素

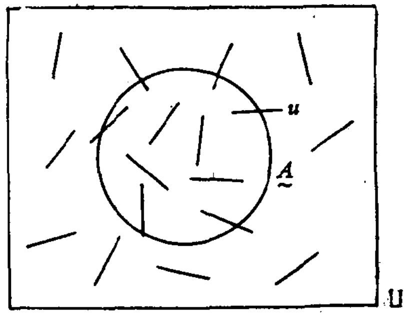

图 1-2 Fuzzy 集的第一种直观解释

第二种解释是把论域中的“圆圈”换为具有单位厚度“皮层”的圆圈（同心圆环），U中任何一个元素一定位于以同心圆环的中心为始点的射线上，参见图 1-3。

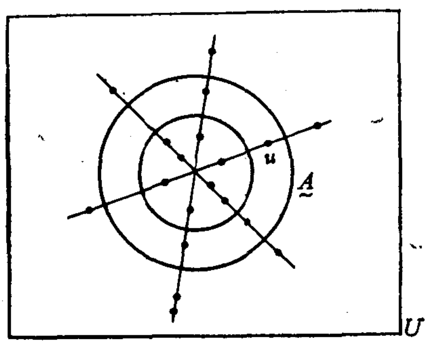

图 1-3 Fuzzy 集的第二种解释

若U中元素u位于内圈内，则记为 1；若u位于外圈外，则记为 0；若u位于两圈之中，则表示了中介状态。u沿射线进入“皮层”的深度表示了u对$\underset{\sim}{A}$的隶属程度。

怎样才能从数学上实现上述的朴素思想呢，扎德采用隶属函数实现了上述思想。应当注意，实现这样的思想其方法不是唯一的。

第二章　集合的基本知识

为了清楚地理解 Fuzzy 集合的基本内容，首先要知道集合的基本概念。这一章介绍集合及其有关的预备知识。

§2.1　集合的运算

设A，B是论域U上的两个集合，如果对任意的$u\in U$，由$u\in A$可推出$u\in B$，则称A**包含于**B（或被B包含），记作$A\subset B$。亦称B**包含**A，记作$B\supset A$。用符号表示为

$$(\forall u\in U)(u\in A\Longrightarrow u\in B)$$

这里“$\Longrightarrow$”表示“蕴含”。此时称A是B的**子集**。

于是，U上任何一个集合A都是U的子集，即$A\subset U$。

不含任何元素的集合，叫做**空集**，记为$\varnothing$。显然，$\forall A\subset U$，恒有

$$\varnothing\subset A\subset U$$

把U的每一个子集都视为新的元素，由U的一些子集又可以组成集合，“集合的集合”称为**集类**（或称集族）。这是提高了一个层次的集合。

U的一切子集所组成的类

$$\mathscr{P}(U)\triangleq\{A\mid A\subset U\} \tag{2-1}$$

称为U的**幂集**。

例如，若$U=\{a,\ b,\ c\}$，则

$\mathscr{P}(U)=\{\varnothing,\ \{a\},\ \{b\},\ \{c\},\ \{a,b\},\ \{a,c\},\ \{b,c\},U\}$

设A，$B\in\mathscr{P}(U)$，记

$$A\cup B\triangleq\{u\in U\mid u\in A\text{或}u\in B\} \tag{2-2}$$

$$A\cap B\triangleq\{u\in U\mid u\in A\text{且}u\in B\} \tag{2-3}$$

$$A-B\triangleq\{u\in U\mid u\in A\text{且}u\notin B\} \tag{2-4}$$