应用数学丛书

连续介质力学引论

杜 珣

清华大学出版社

清 华 大 学

应用数学丛书

第 2 卷

连续介质力学引论

杜 珣

清华大学出版社

1985

内 容 简 介

本书用笛卡儿张量系统地介绍了线性连续介质力学的基本概念、基本定理和一些典型的应用问题。内容包括笛卡儿张量、应力、连续介质运动学、连续介质力学基本定律、本构方程、理想弹性体、理想流体和牛顿粘性流体等八章。附有相应的习题，并在附录中附以必要的数学预备知识。

本书可作为理工科高等院校本科生和研究生的教材和有关科技人员的参考书。

连续介质力学引论

杜 珣

★

清华大学出版社出版

北 京 清华园

清华大学印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 · 各地新华书店经售

★

开本：850×1168 1/32 印张：$9\,^5/_{16}$ 字数：250 千字

1985 年 4 月第一版 1985 年 4 月第一次印刷

印张：00001—10000

统一书号：15235·147 定价：1.80 元

关于《应用数学丛书》

为了满足广大科技人员、高等院校教师、研究生进一步学习应用数学的需要，我们编辑出版本丛书。丛书内容将包括应用数学的各个方面、有关的边缘科学以及应用数学的方法等。限于我们的水平和经验，丛书中难免有不少错误和不足之处。诚恳希望广大读者批评指正。

清华大学《应用数学丛书》编辑委员会
1983.4

前　言

连续介质力学是经典理论力学的发展，它把物质体作为连续介质模型而研究其变形和运动的一般规律。它是固体、液体、气体方面许多力学分支学科的共同理论基础，历来就是应用数学和数学物理注意研究的重要领域。从六十年代以后，连续介质力学作为专门的理论学科得到很大的发展，并日益受到广泛的重视。

本书对连续介质力学作了初步的介绍，全书共分八章。在第一章里，对本书广泛运用的张量数学工具（笛卡儿张量）作了集中的介绍。第二章讲述应力和一些连续介质力学最基本的概念。第三章讲描述连续介质变形和运动的方法。第四章从基本物理定律出发，讲述连续介质力学最一般的、基本的运动规律。第五章建立了一些最常用的介质模型的本构方程。在最后三章，分别对理想弹性体、理想流体、牛顿粘性流体这三个应用最广泛的模型，建立了封闭运动方程组和边界条件，并应用它们求解了一些典型的具体问题；同时也就介绍了弹性力学和流体力学中一些基本知识和典型的求解方法。在每章的后面有一些习题作为该章内容的练习或补充。

本书另有三个附录。在研究具体问题时，往往需要把各运动方程写成柱坐标或球坐标的形式，附录一就对此作了系统的推导。在求解过程中还常用到量纲基本原理，附录二对量纲理论作了系统的论述。最后在附录三里对普遍张量理论作了基本介绍，使能把连续介质力学的各方程写到任意坐标系中去。附录一和附录二对学习本书最后三章是必需的，而附录三和本书各章节并没有联系，但对进一步学习连续介质力学的近代理论则是不可缺少的。

好些以连续介质力学为名的课程和书，实际上只是把弹性力学和流

体力学的内容并列在一起，或只作很少的统一。本书则是把连续介质力学作为一门独立的、统一的学科来进行阐述的。

本书是在北京大学、清华大学等单位多次讲授的基础上编写的，可供理工科高年级学生和研究生开设的连续介质力学课作为教材使用。此课程以一个学期、每周3—4学时为宜。如果学时少，第一章的 §9，第五章的 §2、§3、§4，可以略去不讲。此外对最后三章里的各个具体问题，可以根据情况和需要而有较大的选择余地。

本书只假定读者具有微积分、线性代数、向量分析、物理和理论力学的基本知识。这些知识，在大学理工科一、二年级的课程中一般都会学到。

限于自己学识与水平，书中会有不少疏误不当之处，希望读者多提出宝贵意见。

杜 珣　　1983.8

目 录

第一章　笛卡儿张量

§1　引　言

1.　张量的意义

张量是用来描述客观存在的物理量的。它本身不依赖于坐标系而存在，而为了在数量上对物理量进行表征和计算，常常需要选定参考的坐标系。不同的坐标系下得到不同的数量表征；但客观物理量及描述它的张量应该是与坐标系的选择无关。在一个坐标系下，张量可以用一些称为张量分量的集合来表征。如果这些分量都为已知，则此张量就完全确定，从而在另一坐标系内，此张量的各个分量也就应完全确定。换言之，在不同坐标系下，张量的分量之间必有确定的变换规律。这种分量随坐标系变换的规律，正是张量独立于坐标系的反映。

连续介质力学以及各物理学科研究的都是不依赖坐标系的物理量，因此自然要用张量这一数学工具。连续介质力学的运动规律都是用张量方程来表达的，它要对各个坐标都能成立。

张量理论的表述可有两种不同的方式。第一种方式是完全不借助于坐标系，把张量整体作为研究的对象，对它进行运算（这时可定义张量为某种类型的线性变换或某种线性空间的元素）。第二种方式是把张量看成是张量分量的集合，张量的运算就归结为张量分量的运算。两种方式各有其优点，第一种表述简单利落，第二种便于实际计算。我们下面按第二种方式来介绍张量理论。

能在任意坐标系间变换的张量理论称为普遍张量理论；而只在

笛卡儿坐标系间变换的张量理论则称为笛卡儿张量理论（所谓笛卡儿坐标系指的就是右手旋转的直角坐标系）。笛卡儿张量理论远比普遍张量理论简单。介绍连续介质力学基本概念和基本运动规律可以只用笛卡儿张量，从而得到直角坐标系下的分量和运动方程组。在具体问题需要用柱坐标或球坐标时，也可用坐标变换关系直接换算，因此本章只讲笛卡儿张量理论，而把普遍张量理论放在附录三中介绍。

以下凡黑体的小写拉丁字母一般表示向量，黑体的大写拉丁字母一般表示二阶或高阶张量。

2. **约定求和法**

我们研究的是三维欧氏空间中的物理现象。此空间中的笛卡儿张量，其分量的每个指标都在 1， 2， 3 中取值。可以任取 1 或 2 或 3 的文字指标称为自由指标。为书写简便，我们约定：在同一项中，如有一个自由指标重复出现，就表示要对这个指标从 1 到 3 求和。例如：

$$u_i v_i = u_1 v_1 + u_2 v_2 + u_3 v_3$$

$$\frac{\partial v_k}{\partial x_k} = \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

$$u_{ij} v_{ij} = \sum_{j=1}^{3} \sum_{i=1}^{3} u_{ij} v_{ij}$$

对此约定求和法则，我们并作以下规定：在一等式中，如果同一个文字指标，在其中的一项单独出现了，则它即使在其它某项内重复出现，对该项也不约定求和。例如：

$$f_i = T_{ii}$$

右边就不约定求和。

3. **符号 δ_{ij}**

定义：

$$\delta_{ij}=\begin{cases}0, & 当\ i\neq j\\ 1, & 当\ i=j\end{cases}$$

例：记 $\mathbf{e}_i$ 为直角坐标系中沿 x_i 轴的单位向量，$(i=1,2,3)$，则有

$$\mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j=\delta_{ij}$$

单位矩阵可记为：

$$\mathbf{I}=(\delta_{ij})=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

4. 置换符号 $\in_{ijk}$

定义：

$$\in_{ijk}=\begin{cases}1, & 当\ (i,j,k)\ 是\ (1,2,3)\ 的偶排列,\\ -1, & 当\ (i,j,k)\ 是\ (1,2,3)\ 的奇排列,\\ 0, & 当\ i,j,k\ 中有相同者。\end{cases}$$

例：行列式

$$\Delta=\begin{vmatrix}a_{11}&a_{12}&a_{13}\\a_{21}&a_{22}&a_{23}\\a_{31}&a_{32}&a_{33}\end{vmatrix}=\in_{ijk}a_{1i}a_{2j}a_{3k}$$

又 $\Delta=\in_{ijk}a_{i1}a_{j2}a_{k3}$。由此知：

$$\in_{\alpha\beta\gamma}\Delta=\in_{ijk}a_{\alpha i}a_{\beta j}a_{\gamma k}=\begin{vmatrix}a_{1\alpha}&a_{1\beta}&a_{1\gamma}\\a_{2\alpha}&a_{2\beta}&a_{2\gamma}\\a_{3\alpha}&a_{3\beta}&a_{3\gamma}\end{vmatrix}$$

例：叉乘和旋量的定义

$$\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ u_1 & u_2 & u_3\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\in_{ijk}u_jv_k\mathbf{e}_i$$

即
$$(\mathbf{u}\times\mathbf{v})_i=\in_{ijk}u_jv_k$$

$$\mathrm{rot}\mathbf{v}=\begin{vmatrix}\mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3\\ \dfrac{\partial}{\partial x_1} & \dfrac{\partial}{\partial x_2} & \dfrac{\partial}{\partial x_3}\\ v_1 & v_2 & v_3\end{vmatrix}=\in_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}\mathbf{e}_i$$

即

$$(\mathrm{rot}\mathbf{v})_i=(\nabla\times\mathbf{v})_i=\in_{ijk}\frac{\partial v_k}{\partial x_j}$$

5. $\in$—δ 恒等式

$$\in_{ijk}\in_{ist}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}$$

证：

由于
$$I=\begin{vmatrix}\delta_{11} & \delta_{12} & \delta_{13}\\ \delta_{21} & \delta_{22} & \delta_{23}\\ \delta_{31} & \delta_{32} & \delta_{33}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{vmatrix}=1$$

故
$$\begin{vmatrix}\delta_{1r} & \delta_{1s} & \delta_{1t}\\ \delta_{2r} & \delta_{2s} & \delta_{2t}\\ \delta_{3r} & \delta_{3s} & \delta_{3t}\end{vmatrix}=\in_{rst}I=\in_{rst}$$

$$\begin{vmatrix}\delta_{ir} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{jr} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{kr} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}=\in_{ijk}\in_{rst}$$

上式中令 $i=r$，得

$$\in_{ijk}\in_{ist}=\begin{vmatrix}\delta_{ii} & \delta_{is} & \delta_{it}\\ \delta_{ji} & \delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{ki} & \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}$$

$$=\delta_{ii}\begin{vmatrix}\delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}-\delta_{is}\begin{vmatrix}\delta_{ji} & \delta_{jt}\\ \delta_{ki} & \delta_{kt}\end{vmatrix}+\delta_{it}\begin{vmatrix}\delta_{ji} & \delta_{js}\\ \delta_{ki} & \delta_{ks}\end{vmatrix}$$

对 i 约定求和，得

$$\in_{ijk}\in_{ist}=3\begin{vmatrix}\delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}-\begin{vmatrix}\delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\delta_{jt} & \delta_{js}\\ \delta_{kt} & \delta_{ks}\end{vmatrix}$$

$$=\begin{vmatrix}\delta_{js} & \delta_{jt}\\ \delta_{ks} & \delta_{kt}\end{vmatrix}=\delta_{js}\delta_{kt}-\delta_{jt}\delta_{ks}$$

例：恒等式

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v})-\nabla^2\mathbf{v}$$

其中

$$\nabla=\left(\frac{\partial}{\partial x_1},\ \frac{\partial}{\partial x_2},\ \frac{\partial}{\partial x_3}\right),\qquad \nabla^2=\frac{\partial^2}{\partial x_i\partial x_i}$$

证：

$$[\nabla\times(\nabla\times\mathbf{v})]_i=\in_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}(\nabla\times\mathbf{v})_k=\in_{ijk}\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\in_{klm}\frac{\partial v_m}{\partial x_l}\right)$$

$$=\in_{ijk}\in_{klm}\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_l}=[\delta_{il}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}]\frac{\partial^2 v_m}{\partial x_j\partial x_l}$$

$$=\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right)-\frac{\partial^2 v_i}{\partial x_j\partial x_j}=\frac{\partial}{\partial x_i}(\cdot\nabla\mathbf{v})-\nabla^2 v_i$$

§2　笛卡儿张量定义

1. 笛卡儿坐标变换

$ox_1x_2x_3$ 为右手直角坐标系，$\mathbf{e}_i$ 为沿 ox_i 轴的单位向量，则

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij}$$

记 $\mathbf{x}$ 为向径 $\overrightarrow{oP}$，在此坐标系中 $\mathbf{x}$ 的分量（也即 P 点的坐标）为 x_j

$$\mathbf{x} = x_j \mathbf{e}_j$$

笛卡儿坐标变换，把此坐标系变为另一个右手直角坐标系 $o'x_1'x_2'x_3'$。记 $\mathbf{e}_i'$ 为沿 $o'x'_i$ 轴的单位向量，则 $\mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j' = \delta_{ij}$。记

$$\beta_{ij} = \mathbf{e}_i' \cdot \mathbf{e}_j \tag{1}$$

β_{ij} 是 $o'x'_i$ 轴与 ox_j 轴间夹角的方向余弦。

$$\mathbf{e}_i' = \beta_{ij}\mathbf{e}_j, \qquad \mathbf{e}_i = \beta_{ji}\mathbf{e}_j'$$

由于　$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \delta_{ij} = \mathbf{e}'_i \cdot \mathbf{e}_j'$　而有

$$\beta_{ij}\beta_{kj} = \beta_{ji}\beta_{jk} = \delta_{ik}$$

记向量 $\mathbf{c}$ 是 $\overrightarrow{oo'}$，它在 $ox_1x_2x_3$ 中的分量（也即 o' 的坐标）为 c_i。p 点在两坐标系中的坐标分别记为 x_i 和 x'_i，则由

$$\overrightarrow{op} = \overrightarrow{o'p} + \overrightarrow{oo'}$$

得

$$\mathbf{x} = x_j\mathbf{e}_j = x_j'\mathbf{e}_j' + \mathbf{c} \tag{2}$$

用 $\mathbf{e}_i$ 点乘（2）式得

$$x_i = \beta_{ji} x_j' + c_i \tag{3}$$

用 $\mathbf{e}_i'$ 点乘（2）式得

$$x_i' = \beta_{ij} x_j - c'_i \tag{3'}$$

其中 $$c'_i = \mathbf{c}\cdot\mathbf{e}'_i = c_j \mathbf{e}_j \cdot \mathbf{e}_i' = \beta_{ij} c_j$$

坐标变换（3）和（3′）称为刚体运动变换，其中 $\mathbf{c}$ 代表刚体（坐标架）的平移，矩阵（β_{ij}）代表刚体旋转。

位置向量 $\mathbf{r} = \overrightarrow{o'p}$ 在两个坐标系中的分量分别记为 $y_i = x_i - c_i$ 和 $y_i' = x_i'$，则（3）和（3′）给出

$$y_i = \beta_{ji} y_j', \qquad y_i' = \beta_{ij} y_j \tag{4}$$

由于行列式

$$|\beta_{ij}| = \begin{vmatrix} \beta_{11} & \beta_{12} & \beta_{13} \\ \beta_{21} & \beta_{22} & \beta_{23} \\ \beta_{31} & \beta_{32} & \beta_{33} \end{vmatrix} = (\mathbf{e}'_1 \times \mathbf{e}'_2)\cdot\mathbf{e}'_3 = 1$$

变换（4）是刚体旋转变换。

2. 张量定义

张量分量中所含指标的个数称为张量的阶。在三维空间中，每个指标可取 1，2，3 之值，故 n 阶张量共有 3^n 个分量。我们是用张量分量随坐标系的变换规律来定义张量的。在笛卡儿张量理论中，坐标系间的变换由（3）和（3′）给出。笛卡儿张量的定义如下：

1） 零阶张量（即标量）ϕ

它只有一个分量，且其值不随坐标系改变，即标量 ϕ 是坐标变换下的不变量。

2） 一阶张量（即向量）$T = (T_i)$