计算机辅助设计丛书

机械最优化设计

（第二版）

刘惟信

清华大学出版社

机械最优化设计

（第二版）

刘惟信 编著

清华大学出版社

(京)新登字 158 号

内 容 简 介

本书从定义、术语及如何建立最优化设计的数学模型等基本问题谈起，系统地介绍了最优化设计的理论及其数学分析基础；介绍了一系列的最优化设计方法(其中包括一些近年来才发展起来的新方法)及其在机械设计和汽车与内燃机设计上的应用。

全书共分十六章，前六章阐述了最优化设计理论和方法；第七章讨论了如何利用这些最优化设计的理论和方法解决机械设计中的一些共同性问题；后九章介绍了最优化方法在机械设计和汽车结构优化中的具体应用。附录中给出了最优化方法的 FORTRAN 语言子程序及对这些程序的使用说明。

本书可作为高等工科院校机械类专业以及汽车、拖拉机、内燃机等专业高年级学生和研究生的教材和教学参考书，亦可供从事机械设计及汽车、拖拉机与内燃机设计和研究的工程技术人员参考。

图书在版编目(CIP)数据

机械最优化设计/刘惟信编著. —2 版. —北京：清华大学出版社，1994
ISBN 7-302-01471-X

Ⅰ. 机… Ⅱ. 刘… Ⅲ. 机械设计-最佳化 Ⅳ. TH122

中国版本图书馆 CIP 数据核字(94)第 01129 号

出版者：清华大学出版社(北京清华大学校内，邮编 100084)
印刷者：顺义振华印刷厂
发行者：新华书店总店北京科技发行所
开　本：787×1092 1/16　印张：28.5　字数：673 千字
版　次：1994 年 9 月第 2 版　　1994 年 9 月第 1 次印刷
书　号：ISBN 7-302-01471-X/TH · 51
印　数：0001—4000
定　价：14.00 元

再 版 前 言

《机械最优化设计》一书自1986年出版后，为许多高校用作本科生和研究生的教材（选取不同章节），也为许多科研单位和生产、设计部门的机械设计人员选用、参考。因此，已三次重印。原书又为《中国优秀科技图书要览》（何祚庥、周林主编，钱三强作序），及“中国学术著作总目提要（工业分卷）”所收编，并获得第二届全国高等学校机电类专业优秀教材二等奖。这些都肯定了第一版的内容、深度及其适用性。

汽车是一种典型的、大批量生产的机械产品，其结构组成包容了各种典型的机械结构要素、元件，零部件及总成。因此，书中除了以典型的机械元件外，还以汽车零部件和总成为例，介绍机械最优化设计的应用，能概括机械设计的各种结构及各个方面，起着“抓住典型、举一反三”的作用。再加上修订时又补进了有关汽车的优化设计的内容和章节，使本书的适应性更广。在补进的内容中吸取了作者在“七五”期间主持的“建立汽车结构优化设计实用程序库”（“七五”国家重点科学技术（攻关）项目——“建立汽车CAD及CAM系统”的子课题）项目及国家自然科学基金项目的部分科研成果。

本书新版对原版各章都进行了不同程度的加工。第三、四、五章增加了许多新的内容和优化方法；第七章增加了“具有整数型和离散型设计变量的最优化设计问题”一节；第九、十一及新写的第十四、十五、十六各章都补进了汽车结构最优化设计和性能参数最佳匹配的内容。第二、三、四、五各章还给出了习题供读者练习。

由于水平、经验及时间所限，书中难免有错漏之处，热忱欢迎读者批评、指正。

作者于清华园

1993年6月

目 录

第一章 概 述

对任何一位设计者来说，总愿意作出最优设计方案，使所设计的产品或工程设施具有最好的使用性能和最低的材料消耗与制造成本，以便获得最佳的经济效益和社会效益。为此，自古以来，慎重的工程设计人员常常提供几种候选设计方案，再从中择其“最优”者。但是，由于设计时间和经费的限制，使所设计的候选方案的数目受到很大限制。因此，用常规的设计方法进行工程设计，特别是当影响设计的因素很多时，只能得到有限候选方案中的最好方案，不可能得到一切可能方案的“最优设计方案”。

“最优化设计”是在现代计算机广泛应用的基础上发展起来的一项新技术。是根据最优化原理和方法综合各方面的因素，以人机配合方式或“自动探索”方式，在计算机上进行的半自动或自动设计，以选出在现有工程条件下的最佳设计方案的一种现代设计方法。其设计原则是最优设计；设计手段是电子计算机及计算程序；设计方法是采用最优化数学方法。

实践证明，最优化设计是保证产品具有优良的性能，减轻自重或体积，降低工程造价的一种有效设计方法。同时也可使设计者从大量繁琐和重复的计算工作中解脱出来，使之有更多的精力从事创造性的设计，并大大提高设计效率。

50 年代以前，用于解决最优化问题的数学方法仅限于古典的微分法和变分法。50 年代末数学规划方法被首次用于结构最优化，并成为优化设计中求优方法的理论基础。数学规划方法是在第二次世界大战期间发展起来的一个新的数学分支，线性规划与非线性规划是其主要内容。此外，还有动态规划、几何规划和随机规划等。在数学规划方法的基础上发展起来的最优化设计，是 60 年代初电子计算机引入结构设计领域后逐步形成的一种有效的设计方法。利用这种方法，不仅使设计周期大大缩短，计算精度显著提高，而且可以解决传统设计方法所不能解决的比较复杂的最优化设计问题。大型电子计算机的出现，使最优化方法及其理论蓬勃发展，成为应用数学中的一个重要分支，并在许多科学技术领域中得到应用。近十几年来，最优化设计方法已陆续用到建筑结构、化工、冶金、铁路、航天航空、造船、机床、汽车、自动控制系统、电力系统以及电机、电器等工程设计领域，并取得了显著效果。其中在机械设计方面的应用虽尚处于早期阶段，但也已经取得了丰硕的成果。一般说来，对于工程设计问题，所涉及的因素愈多，问题愈复杂，最优化设计结果所取得的效益就愈大。

最优化设计反映出人们对于设计规律这一客观世界认识的深化。设计上的“最优值”是指在一定条件（各种设计因素）影响下所能得到的最佳设计值。最优值是一个相对的概念。它不同于数学上的极值，但在很多情况下可以用最大值或最小值来表示。

概括起来，最优化设计工作包括以下两部分内容：

(1) 将设计问题的**物理模型**转变为**数学模型**。建立数学模型时要选取**设计变量**，列出**目标函数**，给出**约束条件**。目标函数是设计问题所要求的最优指标与设计变量之间的函数

关系式；

（2）采用适当的最优化方法，求解数学模型。可归结为在给定的条件（例如约束条件）下求目标函数的极值或最优值问题。

机械最优化设计，就是在给定的载荷或环境条件下，在对机械产品的性态、几何尺寸关系或其它因素的限制（约束）范围内，选取设计变量，建立目标函数并使其获得最优值的一种新的设计方法。设计变量、目标函数和约束条件这三者在**设计空间**（以设计变量为坐标轴组成的实空间）的几何表示中构成设计问题。

当然，要建立能反映客观工程实际的、完善的数学模型并不是一件容易的事。另外，如果所建立的数学模型的数学表达式过于复杂，涉及的因素很多，在计算上也会出现困难。因此，要抓主要矛盾，尽量使问题合理简化，这样不仅可节省时间，有时也会改善优化结果。

最优化设计相对于常规设计来说，是一次变革，要引用一些新的概念和术语，如前所述的设计变量、目标函数、约束条件等。下面将对它们作一一介绍。

§1-1 设计变量

在设计过程中进行选择并最终必须确定的各项独立参数，称为设计变量。在选择过程中它们是变量，但这些变量一旦确定以后，则设计对象也就完全确定。最优化设计是研究怎样合理地优选这些设计变量值的一种现代设计方法。在机械设计中常用的独立参数有结构的总体布置尺寸，元件的几何尺寸和材料的力学和物理特性等等。在这些参数中，凡是可以根据设计要求事先给定的，则不是设计变量，而称为设计常量。只有那些需要在设计过程中优选的参数，才可看成是最优化设计中的设计变量。

最简单的设计变量是元件尺寸，如杆元件的长度、横截面积；抗弯元件的惯性矩；板元件的厚度等。已发表的大多数结构最优化设计文献仅涉及选择元件尺寸，因为这不仅可使问题相对简单些，而且由于很多实际结构的几何关系和材料特性已经选定的缘故。决定结构布置情况的设计变量的选取要复杂些。较困难的是选取表示材料特性的变量，因为通常所用材料的特性是离散值，选择这种变量时出现了设计变量不是连续变化的这一特殊问题。有时在选择机械元件时也会遇到这类问题，如齿轮的齿数只能按正整数变化，而不能连续变化。离散变量的选取在最优化设计中还处于发展阶段，尽管目前已可处理这类问题，但在许多情况下为了简化计算，均假定设计变量有个连续变化的区域，将不连续的变量当作连续变量来处理。计算结果若不在规定的不连续数的范围内，则一般可取与之相近的不连续数（不一定是整数），但这种处理方法并不总是成功的（见图 7-1），而只得采用其它方法。有时设计变量只能取“是”或“非”两个逻辑值之一，这也是一种特殊性质的问题。

设计变量的数目称为最优化设计的维数，如有 $n(n=1,2,\cdots)$ 个设计变量，则称为 **n 维设计问题**。只有两个设计变量的二维设计问题可用图 1-1(a)所示的平面直角坐标表示；有三个设计变量的三维设计问题可用图 1-1(b)所表示的空间直角坐标表示。

在图 1-1(a)中，当设计变量 x_1，x_2 分别取不同值时，则可得到在坐标平面上不同的相应点，每一个点表示一种设计方案。如用向量表示这个点，即为二维向量：

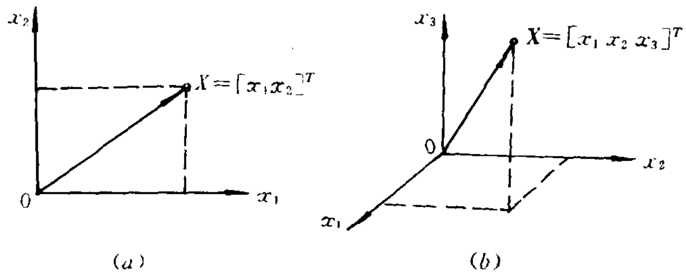

图 1-1 设计变量所组成的设计坐标

(a) 二维设计问题 (b) 三维设计问题

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2]^T$$

上式中"T"为转置符，即把列向量用行向量的转置向量来表示。

同样，在图 1-1(b)中，每一个设计方案表示为三维空间的一个点，并可用三维向量来表示该点：

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2 \quad x_3]^T$$

在一般情况下，若有 n 个设计变量，把第 i 个设计变量记为 x_i，则其全部设计变量可用 n 维向量的形式表示成

$$\boldsymbol{X}=\begin{bmatrix}x_1\\x_2\\\vdots\\x_i\\\vdots\\x_n\end{bmatrix}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_i \quad \cdots \quad x_n]^T \tag{1-1}$$

这种以 n 个独立变量为坐标轴组成的 **n 维向量空间**是一个 **n 维实空间**，用 $\boldsymbol{R}^n$ 表示，如果其中任意两向量又有内积运算，则称 **n 维欧氏空间**，用 $\boldsymbol{E}^n$ 表示。当向量 $\boldsymbol{X}$ 中的各个分量 $x_i(i=1,2,\cdots,n)$都是实变量时则称 $\boldsymbol{X}$ 决定了 n 维欧氏空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中的一个点，并用符号 $\boldsymbol{X}\in\boldsymbol{E}^n$($\boldsymbol{X}$ 属于 $\boldsymbol{E}^n$)表示。在最优化设计中由各设计变量的坐标轴所描述的这种空间就是所谓"**设计空间**"，它是一个重要概念。图 1-1(b)给出了一个三个设计变量的(因而也是三维的)设计空间。决定这个空间的三个坐标轴分别描述三个设计变量 x_1,x_2,x_3。通常，设计变量的个数 n 要比 3 多得多，并且很难用图象表示，这时的 n 维空间又称为**超越空间**。设计空间中的一个点就是一种设计方

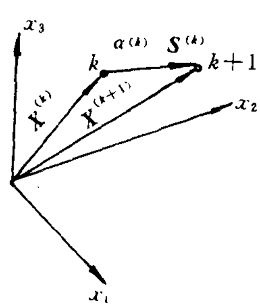

图 1-2 在三变量(三维)设计空间中设计方案的探索

案。如图1-2所示，设计空间中的某点 k 是由各设计变量所组成的向量 $X^{(k)}$ 所决定，而 k 点则决定了一种设计方案。另一种设计方案点($k+1$)则由另一组设计变量所组成的向量 $X^{(k+1)}$ 确定。最优化设计中所常采用的**直接探索法**(或称直接搜索法)，就是在相邻的设计点间作一系列定向的设计改变(移动)。由点 k 到点($k+1$)间的典型移动情况由下式给出：

$$X^{(k+1)}=X^{(k)}+\alpha^{(k)}S^{(k)} \tag{1-2}$$

向量 $S^{(k)}$ 决定移动的方向，标量 $\alpha^{(k)}$ 决定移动步长。

设计空间的维数又表征**设计的自由度**，设计变量愈多，则设计的自由度愈大、可供选择的方案愈多，设计愈灵活，但难度亦愈大、求解亦愈复杂。一般，含有 2—10 个设计变量的为小型设计问题；10—50 个为中型设计问题；50 个以上的为大型设计问题。目前已能解决 200 个设计变量的大型最优化设计问题。

§1-2 目标函数

在设计中，设计者总是希望所设计的产品或工程设施具有最好的使用性能(性能指标)、最小的质量或最紧凑的体积(结构指标)和最小的制造成本及最大的经济效益(经济指标)。在最优化设计中，可将所追求的设计目标(最优指标)用设计变量的函数形式表达出来，这一过程称为建立目标函数。即**目标函数**是设计中预期要达到的目标，表达为各设计变量的函数表达式：

$$f(X) = f(x_1,x_2,\cdots,x_n) \tag{1-3}$$

它代表设计的某项最重要的特征，例如上面所提到的性能、质量或体积以及成本等。最常见的情况是以质量作为目标函数，因为质量大小是对价值最易于定量的一种量度，虽然费用有更大的实际重要性，但通常需有足够的资料方能构成以费用作为目标函数。

目标函数是设计变量的标量函数。最优化设计的过程就是优选设计变量使目标函数达到最优值，或找出目标函数的最小值(或最大值)的过程。

在最优化设计问题中，可以只有一个目标函数，称为**单目标函数**，如式(1-3)所示。当在同一设计中要提出多个目标函数时，这种问题称为**多目标函数**的最优化问题。在一般的机械最优化设计中，多目标函数的情况较多。目标函数愈多，设计的综合效果愈好，但问题的求解亦愈复杂。

对于多目标函数，可以将它们分别独立地列出来：

$$\left.\begin{aligned} f_1(X) &= f_1(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ f_2(X) &= f_2(x_1,x_2,\cdots,x_n) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f_q(X) &= f_q(x_1,x_2,\cdots,x_n) \end{aligned}\right\} \tag{1-4}$$

也可以把几个设计目标综合到一起，建立一个综合的目标函数表达式，即

$$f(X) = \sum_{j=1}^{q} f_j(X) \tag{1-5}$$

q 为最优化设计所追求的目标数目。

在实际工程设计问题中，常常会遇到在多目标函数的某些目标之间存在矛盾的情况，这就要求设计者正确处理各目标函数之间的关系。对这类多目标函数的最优化问题的研究，至今还不如单目标函数那样成熟，但有时可用一个目标函数表示若干所需追求目标的加权和，把多目标问题转化为单目标问题来求解。这时必须引入加权因子的概念或其它处理方法(见第六章)，以平衡各项指标即各个目标间的相对重要性，以及它们在量纲和量级上的差异。

加权因子系指用多项指标来建立一个总的目标函数时，为反映出各项指标在最优化设计中所占的重要程度，而选取的各项指标的常系数 $w_1, w_2, \cdots$。引入加权因子后，式(1-5)则变为

$$f(\boldsymbol{X}) = \sum_{j=1}^{q} w_j \cdot f_j(\boldsymbol{X}) \tag{1-6}$$

式中　w_j——第 j 项指标的加权因子。

加权因子 w 是个非负系数，由设计者根据该项指标在最优化设计中所占的重要程度等情况选定。如果该项指标的相对重要性为一般，则取 $w=1$。

所选择的各项指标的加权因子，应能客观地反映该项最优化设计所追求的总目标，使总目标的综合效果达到最优。因此，如何正确选择这些加权因子是一个比较复杂的问题，至今在理论上尚未得到完善的解决。关于加权因子的选择以及多目标函数的其它处理方法，将在第六章中详细介绍。

目标函数与设计变量之间的关系，可用曲线或曲面表示。一个设计变量与一个目标函数之间的函数关系，是二维平面上的一条曲线，如图 1-3(a)所示。当有两个设计变量时，目标函数与它们的关系是三维空间的一个曲面，如图 1-3(b)所示。若有 n 个设计变量时，则目标函数与 n 个设计变量间呈($n+1$)维空间的**超越曲面**关系。

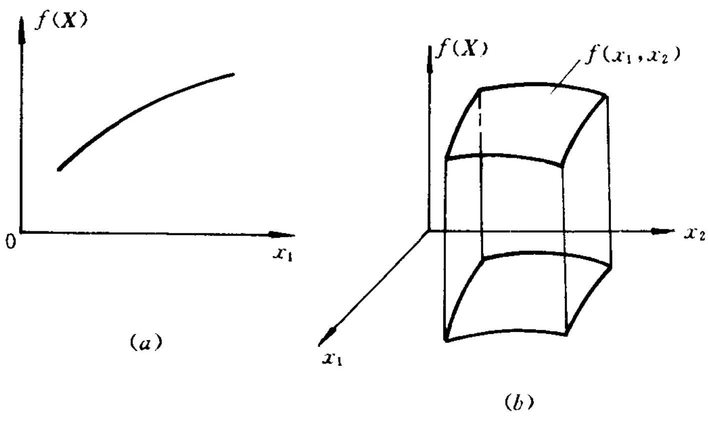

图 1-3　目标函数与设计变量之间的函数关系

图 1-4 表示目标函数 $f(\boldsymbol{X})$与两个设计变量 x_1, x_2 所构成的关系曲面上的**等值线**(亦称等高线)，它是由许多具有相等目标函数值的设计点所构成的平面曲线。当给目标函数以不同值时，可得到一系列的等值线，它们构成目标函数的等值线族。在极值处目标函数的等值线聚成一点，并位于等值线族的中心。当该中心为极小值时，则离开它愈远目标函

数值愈大；当该中心为极大值时，则离开它愈远目标函数值愈小。当目标函数值的变化范围一定时，等值线愈稀疏说明目标函数值的变化愈平缓。利用等值线的概念可用几何图象形象地表现出目标函数的变化规律。另外，在许多最优化问题中，最优点周围往往是一族近似的共心椭圆族，而每一个近似椭圆就是一条目标函数的等值线。这时，求最优点即是求目标函数的极值问题，可归结为求其等值线同心椭圆族的中心。根据求椭圆族中心的不同途径，存在着各种最优化方法，本书将在后面一一介绍。

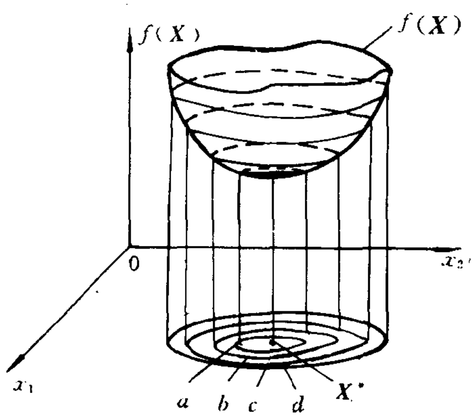

图 1-4　等值线

以上讨论的是二维设计问题，等值线为平面曲线。对于三维设计问题，其等值函数是一个面，叫做**等值面**；对于 n 维设计问题则为等值超越曲面。

为了说明目标函数的建立过程，现以多杆桁架为例：对于有 m 个元件的桁架，以 L_i，A_i，ρ_i 分别表示第 i 个元件的长度、横截面积、密度，并取质量 W 为目标函数，则

$$W = \sum_{i=1}^{m} \rho_i \cdot L_i \cdot A_i$$

在桁架计算中，通常只取元件的横截面积作为设计变量，L_i 及 ρ_i 都给定，则上式可改写为矩阵形式：

$$W = \rho[L_1 \quad L_2 \quad \cdots \quad L_n] \cdot \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ \vdots \\ A_n \end{bmatrix} = \rho \boldsymbol{L}^T \boldsymbol{A}$$

将此式推广到某些结构的设计变量不是元件横截面积的一般情况，得目标函数为

$$W = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n] \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \boldsymbol{C}^T \boldsymbol{X} \quad (1\text{-}7)$$

式中 $\boldsymbol{C}^T = [C_1 \quad C_2 \quad \cdots \quad C_n]$ 是由几何尺寸及材料特性常数组成。显然，在以上的两式中设计变量与目标函数是线性关系。

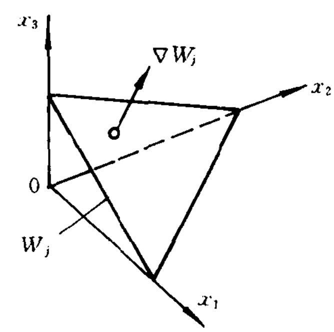

图 1-5　线性目标函数在三维空间中的等重量面(等值面)

也可以用图 1-5 的形式来说明设计空间内的目标函数，三维设计空间内的线性目标函数是个平面，面上的所有点有相同的目标函数值，故称为**等值面**。当以质量为目标函数时，则该平面称为**等质量面**。在 n 维设计空间的这种面就是**超越平面**。如果设计变量与目标函数呈非线性关系时，就是 n 维设计空间中的一个**超越曲面**。

最优化设计中的一个重要概念，就是目标函数的**梯度**，它是目标函数 $f(\boldsymbol{X})$对各个设计变量的偏导数所组成的列向量，并以符号"$\nabla f(\boldsymbol{X})$"表示，即

$$\nabla f(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2} \\ \vdots \\ \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f(\boldsymbol{X})}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T \tag{1-8}$$

当取质量 W 为目标函数时，其梯度则是

$$\nabla W(\boldsymbol{X}) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial W}{\partial x_1} & \dfrac{\partial W}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial W}{\partial x_n} \end{bmatrix}^T$$

因此，对于式(1-7)的线性目标函数就有

$$\nabla W = \boldsymbol{C}$$

对于 $W=[\boldsymbol{C}(\boldsymbol{X})]^T\boldsymbol{X}$ 的非线性目标函数，则有

$$\nabla W(\boldsymbol{X}) = \boldsymbol{C}'(\boldsymbol{X})$$

梯度表示在其取值点处与该函数面相垂直的向量。线性函数(式(1-7))表示一个平面，故线性函数的梯度处处相同(为常量)。

在最优化设计中，当以给定的步长改变设计(即移动)时，目标函数值在沿梯度的方向变化最快，这就使梯度向量获得了实用效用。在以质量为目标函数时，最优化过程为的是降低目标函数值，这相当于向目标函数梯度的负方向移动。

§1-3 约束条件

如前所述，目标函数取决于设计变量，而在很多实际问题中设计变量的取值范围是有限制的或必须满足一定的条件。在最优化设计中，这种对设计变量取值时的限制条件，称为**约束条件**或**设计约束**，简称约束。约束的形式，可能是对某个或某组设计变量的直接限制(例如，若应力 σ 为设计变量，则应力值 σ 应不大于其许用值$[\sigma]$，构成直接限制)，这时称为**显约束**；也可能是对某个或某组设计变量的间接限制(例如，若结构应力又是某些设计变量如力和截面积的函数时，则这些设计变量间接地受到许用应力的限制)，这时称为**隐约束**。

约束条件可以用数学等式或不等式来表示。

等式约束对设计变量的约束严格，起着降低设计自由度的作用。等式约束可能是显约束，也可能是隐约束，其形式为

$$h_v(\boldsymbol{X}) = 0 \quad (v = 1,2,\cdots,p) \tag{1-9}$$

在机械最优化设计中**不等式约束**更为普遍，不等式约束的形式为

$$g_u(\boldsymbol{X}) \leqslant 0 \quad (u = 1,2,\cdots,m) \tag{1-10}$$

或

$$g_u(\boldsymbol{X}) \geqslant 0 \quad (u = 1,2,\cdots,m) \tag{1-11}$$

式中

$\boldsymbol{X}$——设计变量，见式(1-1)；

p——等式约束的数目；

m——不等式约束的数目。

在上述式中 $h_v(\boldsymbol{X})=0$，$g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0$ 为设计变量的约束方程，即设计变量的允许变化范围。最优化设计，即是在设计变量允许范围内，找出一组最优参数 $\boldsymbol{X}^* = [x_1^* \quad x_2^* \quad \cdots \quad x_n^*]^T$，使目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 达到最优值 $f(\boldsymbol{X}^*)$。

从理论上说，有一个等式约束就有从最优化过程中消去一个设计变量的机会，或降低一个设计自由度(或问题维数)的机会。但消去过程在代数上有时会很复杂或难于实现，故并不能经常采用这种方法。不等式约束的概念对结构的最优化设计特别重要。例如，在仅有应力限制的问题中，若只规定等式约束，则所有的方法都将得出满应力设计，而这未必就是最小重量设计。因此，要得到最优点就必须允许设计中的所有应力约束并不都以等式形式出现，即应有不等式约束。

另一种分类法是将设计约束分为边界约束和性态约束。

边界约束又称为区域约束或辅助约束，用以限制某个设计变量(结构参数)的变化范围，或规定某组变量间的相对关系。例如，要求构件的长度 l_i(设计变量为 $\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_k]^T=[l_1 \quad l_2 \quad \cdots \quad l_k]^T$)满足给定的最大、最小尺寸 $l_{i\max}$，$l_{i\min}$，于是其边界约束为

$$\left.\begin{aligned} g_1(\boldsymbol{X}) &= l_{i\min} - x_i \leqslant 0 \\ g_2(\boldsymbol{X}) &= x_i - l_{i\max} \leqslant 0 \end{aligned}\right\} \quad i = 1,2,\cdots,k$$

边界约束属于显约束。

性态约束又称为性能约束，在机械最优化设计中它是由结构的某种性能或设计要求推导出来的一种约束条件，是根据对机械的某项性能要求而构成的设计变量的函数方程。例如在曲柄摇杆机构设计中要求存在的曲柄条件，在行星齿轮系统中对装配条件、邻接条件的限制等均可构成性态约束方程。也可以对应力与位移、振动频率、磨损程度、屈曲强度等因素加以限制。若许用应力$[\sigma]$、许用挠度$[f]$均已给定，设计变量 $\boldsymbol{X}=[x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n]^T=[\sigma \quad f \quad \cdots \quad]^T$，则根据强度条件和刚度条件可给出如下的性态约束：

$$g_1(\boldsymbol{X}) = 1 - \frac{[\sigma]}{x_1} \leqslant 0$$

$$g_2(\boldsymbol{X}) = 1 - \frac{[f]}{x_2} \leqslant 0$$

性态约束通常是隐约束，但也会遇到显约束的情况。

在设计空间中每一个约束条件都是以几何面[图1-6(b)，(c)，在二变量设计空间中则为线，如图1-6(a)所示]的形式出现，并称为**约束面**(或约束线)。该面(或线)是等式约束方程或是不等式约束的极限情况(即等式部分 $g_u(\boldsymbol{X})=0$)的几何图象。当设计变量是连续的，则约束面(或线)通常也是连续的。图1-6(b)表示三变量设计空间中的一个约束面；图1-6(c)表示三变量设计空间中由许多约束方程构成的组合约束面。

对于等式约束来说，设计变量 $\boldsymbol{X}$ 所代表的设计点必须在式(1-9)所表示的面(或线)

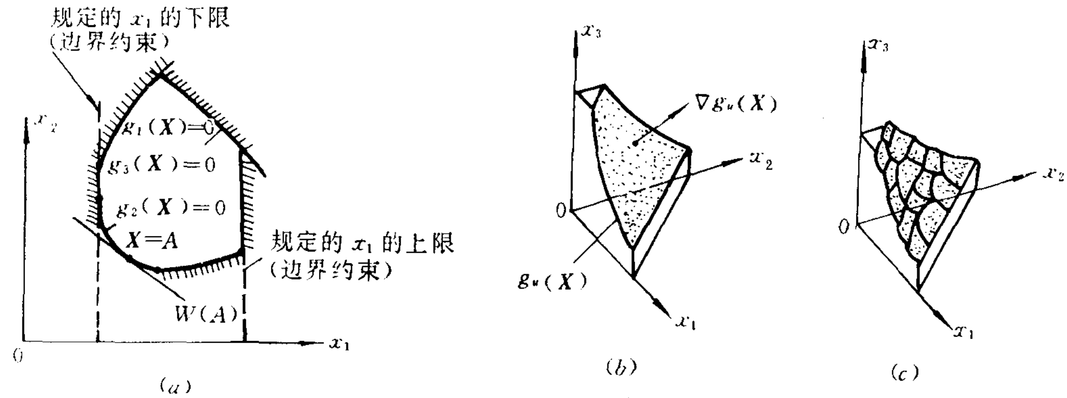

图 1-6　设计空间中的约束面(或约束线)

(a) 二变量设计空间中的约束线　(b) 三变量设计空间中的约束面　(c) 组合约束面

上、这种约束又称为**起作用约束**或**紧约束**。对于不等式约束来说，其极限情况 $g_u(X)=0$所表示的几何面(线)将设计空间分为两部分：一部分中的所有点均满足约束条件式(1-10)或式(1-11)，这一部分的空间称为设计点的**可行域**，并以 $\mathscr{D}$ 表示，可行域中的点是设计变量可以选取的，称为**可行设计点**或简称**可行点**，如果最优点在可行域之内，则其所有的约束条件都不是起作用约束。另一部分中的所有点均不满足约束条件式(1-10)或式(1-11)，在这个区域如果选取设计点则违背了约束条件，它就是设计的**非可行域**，该域中的点称为**非可行点**。如果设计点落到某个约束边界面(或边界线)上，则称**边界点**，边界点是允许的极限设计方案。例如：在图1-7上画出了满足两项约束条件 $g_1(X)=x_1^2+x_2^2-16=0$和 $g_2(X)=2-x_2\leqslant 0$的二维设计问题的可行域 $\mathscr{D}$，它位于 $x_2=2$的上面和圆 $x_1^2+x_2^2=16$的圆弧$\overset{\frown}{ABC}$下面并包括线段$\overline{AC}$和圆弧$\overset{\frown}{ABC}$在内。

在二变量设计空间中，不等式约束的可行域是各约束线所围的平面，如为三维以上的设计问题，则可行域为各约束面所包围的空间。最优化设计过程，即寻找可行域内的最优点或最优设计方案。

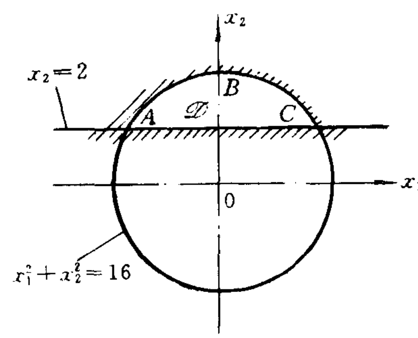

图 1-7　约束条件规定的可行域 $\mathscr{D}$

与式(1-8)对目标函数梯度的定义相类似，约束面梯度$\nabla g_u(X)$是约束方程 $g_u(X)$对各设计变量的偏导数所组成的列向量，即

$$\nabla g_u(X)=\left[\frac{\partial g_u(X)}{\partial x_1}\quad\cdots\quad\frac{\partial g_u(X)}{\partial x_n}\right]^T \tag{1-12}$$

它表示在其取值点处与该约束面相垂直的向量，如图1-6(b)所示。

在机械最优化设计中，约束面常常是设计变量的非线性函数而呈曲面，因此，约束面梯度与取值点的位置有关，只有在约束面为平面的情况下其梯度才是常数。

§1-4 最优化设计的数学模型

选取设计变量、列出目标函数、给定约束条件后便可构造最优化设计的数学模型。如前所述，任何一个最优化问题均可归结为如下的描述，即：在满足给定的约束条件（决定 n 维空间 $\boldsymbol{E}^n$ 中的可行域 $\mathscr{D}$）下，选取适当的设计变量 $\boldsymbol{X}$，使其目标函数 $f(\boldsymbol{X})$ 达到最优值。其数学表达式（数学模型）为

设计变量 $\boldsymbol{X}=[x_1\quad x_2\quad \cdots\quad x_n]^T,\quad \boldsymbol{X}\in\mathscr{D}\subset\boldsymbol{E}^n$

在满足约束条件 $h_v(\boldsymbol{X})=0,\quad v=1,2,\cdots,p$

$g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0,\quad u=1,2,\cdots,m$

的条件下，求目标函数 $f(\boldsymbol{X})=\sum\limits_{j=1}^{q} w_j f_j(\boldsymbol{X})$ 的最优值。

目标函数的最优值一般可用最小值（或最大值）的形式来体现，因此，最优化设计的数学模型可简化表示为

$$\left.\begin{array}{ll}\min f(\boldsymbol{X}) & \boldsymbol{X}\in\mathscr{D}\subset\boldsymbol{E}^n \\ \text{s.t. (subject to)}\, h_v(\boldsymbol{X})=0 & v=1,2,\cdots,p \\ \qquad g_u(\boldsymbol{X})\leqslant 0 & u=1,2,\cdots,m\end{array}\right\}\tag{1-13}$$

在结构设计中常以减小质量为目标，最优化设计的目标函数为质量，则问题就成为求目标函数的最小值，如上式所示。若目标函数不是质量，而是另一函数，且最优点为可行域中的最大值时，则可看成是求 $[-f(\boldsymbol{X})]$ 的最小值，因为 $\min[-f(\boldsymbol{X})]$ 与 $\max f(\boldsymbol{X})$ 是等价的。当然，也可看成是求 $1/f(\boldsymbol{X})$ 的极小值。

在最优化设计的数学模型中，若 $f(\boldsymbol{X})$，$h_v(\boldsymbol{X})$ 和 $g_u(\boldsymbol{X})$ 都是设计变量 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数，则这种最优化问题属于数学规划方法中的**线性规划**问题；若它们不全是 $\boldsymbol{X}$ 的线性函数，则属于数学规划方法中的**非线性规划**问题。如果要求设计变量 $\boldsymbol{X}$ 只能取整数，称为整数规划；当式(1-13)中的 $p=0$，$m=0$ 时，称为无约束最优化问题，否则称为约束最优化问题。机械最优化设计问题多属于约束非线性规划，即约束非线性最优化问题。

建立数学模型是最优化过程中非常重要的一步，数学模型直接影响设计效果。对于复杂的问题，建立数学模型往往会遇到很多困难，有时甚至比求解更为复杂。这时要抓住关键因素，适当忽略不重要的成分，使问题合理简化，以易于列出数学模型。另外，对于复杂的最优化问题，可建立不同的数学模型。这样，在求最优解时的易难程度也就不一样。有时，在建立一个数学模型后由于不能求得最优解而必须改变数学模型的型式。由此可见，在最优化设计工作中开展对数学模型的理论研究，十分重要。

现举例说明建立数学模型的过程：

例题1-1 要用薄钢板制造一体积为 5m^3 的汽车货箱，由于运输的货物要求其长度不小于4m。为了使耗费的钢板最少并减小质量，问应如何选取货箱的长 x_1、宽 x_2 和高 x_3？

解 显然，钢板的耗费量与货箱的表面积成正比，如果货箱不带上盖，则目标函数为

$$f(\boldsymbol{X})=f(x_1,x_2,x_3)=x_1\cdot x_2+2(x_2\cdot x_3+x_1\cdot x_3)$$

约束条件为