

高等学校教材

# 信号与线性系统

下 册

管致中 夏恭恪 编

高等教育出版社

高等学校教材

# 信号与线性系统

下 册

管致中 夏恭恪 编

高等教育出版社

## 内 容 提 要

本书是在管致中、沙玉钧、夏恭恪编《电路、信号与系统》一书下册的基础上，根据审订的《信号与系统》课程的教学大纲改编而成。教材体系按照由时域分析到变换域分析、由连续时间系统到离散时间系统、由系统的输入输出方程表示法到状态变量方程表示法这样的顺序安排。全书共九章。上册一至四章，包括绪论、连续时间系统的时域分析、信号分析和连续时间系统的频域分析；下册共分五章，包括连续时间系统的复频域分析、系统函数、离散时间系统的时域分析、离散时间系统的变换域分析，最后讨论线性系统的状态变量分析。配合正文，精选了适当的例题和习题。

本书可作为四年制无线电技术类专业“信号与线性系统”课程的教材，也可供有关科技人员参考。

本书原由人民教育出版社出版。1983年3月9日，上级同意恢复“高等教育出版社”。本书今后改用高等教育出版社名义继续印行。

高等学校教材

## 信号与线性系统

下册

管致中 夏恭恪/编

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

孝感地区印刷厂印装

开本850×1168 1/32 印张11.5 字数272,000

1979年6月第1版 1982年9月第2版 1984年2月第2次印刷

印数16,501—28,600

书号 15010·0457 定价1.25元

# 目 录

## 第五章 连续时间系统的复频域分析

§ 5.1 引言	1
§ 5.2 拉普拉斯变换	2
§ 5.3 拉普拉斯变换的收敛区	9
§ 5.4 常用函数的拉普拉斯变换	12
§ 5.5 拉普拉斯反变换	17
§ 5.6 拉普拉斯变换的基本性质	32
§ 5.7 线性系统的拉普拉斯变换分析法	46
§ 5.8 阶跃信号作用于 $RLC$ 串联电路的响应	65
§ 5.9 阶跃高频信号作用于 $RLC$ 串联电路的响应	70
§ 5.10 线性系统的模拟	75
§ 5.11 信号流图	81
习题	94

## 第六章 连续时间系统的系统函数

§ 6.1 引言	104
§ 6.2 系统函数的表示法	106
§ 6.3 系统函数极点和零点的分布	111
§ 6.4 系统函数的极点、零点与系统频率特性的关系	115
§ 6.5 波特图	120
§ 6.6 系统的稳定性	130
§ 6.7 根轨迹	144
习题	155

## 第七章 离散时间系统的时域分析

§ 7.1 引言	166
----------	-----

§ 7.2 抽样信号与抽样定理	169
§ 7.3 离散时间系统的描述和模拟	178
§ 7.4 离散时间系统的零输入响应	188
§ 7.5 离散时间系统的零状态响应	195
§ 7.6 离散时间系统与连续时间系统时域分析法的比较	207
习题	209

## 第八章 离散时间系统的变换域分析

§ 8.1 引言	216
§ 8.2 $Z$ 变换及其性质	217
§ 8.3 反 $Z$ 变换	228
§ 8.4 $Z$ 变换与拉普拉斯变换的关系	234
§ 8.5 离散时间系统的 $Z$ 变换分析法	237
§ 8.6 离散时间系统的频率响应特性	248
§ 8.7 数字滤波器的概念	253
§ 8.8 离散傅里叶变换	259
习题	268

## 第九章 线性系统的状态变量分析

§ 9.1 引言	276
§ 9.2 系统的状态方程	282
§ 9.3 由输入-输出方程求状态方程	292
§ 9.4 连续时间系统状态方程的复频域解法	303
§ 9.5 连续时间系统状态方程的时域解法	312
§ 9.6 离散时间系统状态方程的解	318
§ 9.7 按照状态方程作系统的模拟	325
§ 9.8 状态方程的数值解法	328
§ 9.9 线性系统分析方法综述	337
习题	341

参考书目	350
------	-----

索引	352
----	-----

# 第五章 连续时间系统的复频域分析

## §5.1 引言

上一章中讨论的傅里叶变换法对系统分析无疑是有用的。因为时域中的激励表示为无穷多个正弦分量之和，这样就可用求解线性系统对一系列正弦激励的响应之和的方法来讨论线性系统对一般激励的响应，从而使响应的求解得到简化。特别在有关信号的分析与处理方面诸如有关谐波成分、频率响应、系统带宽、波形失真等问题上，它所给出的结果都具有清楚的物理意义。但是它也有不足之处。首先，它一般只能处理符合狄利希莱条件的信号，而有许多信号往往是不符合绝对可积条件的，即积分 $\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)| dt$ 不存在，如：单位阶跃信号 $U(t)$ 、阶跃正弦信号 $\sin \omega t U(t)$ 、单边指数信号 $e^{-\alpha t} U(t) (\alpha > 0)$ ，等等。这时，虽然从极限观点引入奇异函数，上述信号中的一些，如 $U(t)$ 等仍然有傅里叶变换，但因其频谱中包含有冲激函数，因而分析计算较为麻烦。而另一些信号，如 $e^{-\alpha t} U(t) (\alpha > 0)$ 则不存在有傅里叶变换，因此傅里叶变换分析法的运用要受到一定的限制。其次，是在求取时域中的响应时，利用傅里叶反变换要进行对频率自负无穷大到正无穷大的无穷积分，通常这个积分的求解是比较困难的。在这一章中将通过把频域中的傅里叶变换推广到复频域来解决这些问题。

拉普拉斯变换可以从数学中积分变换的观点加以直接定义，也可以从信号分析的观点把它看成是傅里叶变换在复频域中的推广，而后者具有更为清晰的物理意义。应用拉普拉斯变换进行系

统分析的方法，同样是建立在线性非时变系统具有迭加性与齐次性的基础上的，只是信号分解的基本单元函数不同。在傅里叶变换中分解的基本单元信号为虚指数信号  $e^{j\omega t}$  或等幅的正弦信号  $\cos\omega t$ ；而在拉普拉斯变换中分解的基本单元信号是复指数信号  $e^{st}$  或幅度按指数规律变化的正弦信号  $e^{\sigma t} \cos\omega t$ 。因此这两种变换无论在性质上或是在进行系统分析的方法上都是有着很多类似的地方，事实上傅里叶变换常常可看成是拉普拉斯变换在  $\sigma=0$  时的一种特殊情况。

拉普拉斯变换分析法因其运算非常简捷，特别是直接对系统微分方程进行变换时，初始条件即自动被计入，可以一举求得全解，因此在线性非时变系统的分析上占有重要的位置。特别是基于拉普拉斯变换分析法所得到的复频域中转移函数的零、极点分析是网络综合所依赖的基础之一。虽然近年来由于计算机应用的逐步发展，建立在数值积分运算基础上的一些新方法有了较大进展，但拉普拉斯变换分析法仍然不失为分析线性非时变系统的一个重要而有效的方法。

本章将首先由傅里叶变换引出拉普拉斯变换，然后讨论拉普拉斯正、反变换的求取及拉普拉斯变换的性质，进而在上述基础上用拉普拉斯变换法求解系统的响应。最后简要介绍模拟框图与信号流图的概念。至于复频域中转移函数的零极点分析则主要放在下一章中讨论。

## § 5.2 拉普拉斯变换

一个函数  $f(t)$  不满足绝对可积条件，往往是由于在  $t$  趋于正无穷大或负无穷大的过程中减幅太慢的缘故。如果用一个被称为收敛因子的指数函数  $e^{-\sigma t}$  去乘  $f(t)$ ，如  $\sigma$  取足够大的正值，则在时间的正方向上总可以使得  $t \rightarrow \infty$  时， $f(t)e^{-\sigma t}$  减幅较快。当然，

这时在时间负方向上将反而起增幅作用。然而假使原来的函数在时间的负方向上是衰减的，而且其衰减速率较收敛因子引起的增长为快，则仍可以使得当  $t \rightarrow -\infty$  的过程中， $f(t)e^{-\sigma t}$  也是减幅的。例如图5-1(a)的函数，在  $t$  的正方向上为一单位阶跃函数，在  $t$  的负方向上为一指数衰减函数，即

$$f(t) = \begin{cases} U(t) & t > 0 \\ e^{\beta t} & t < 0 \end{cases} \quad (5-1a)$$

乘以收敛因子后，有

$$f(t)e^{-\sigma t} = \begin{cases} U(t)e^{-\sigma t} & t > 0 \\ e^{(\beta-\sigma)t} & t < 0 \end{cases} \quad (5-1b)$$

由式(5-1b)不难看出，只要  $\sigma < \beta$ ，则函数  $f(t)e^{-\sigma t}$  在时间的正、负方向上将都是减幅的。即函数  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积条件，可以进行傅里叶变换。

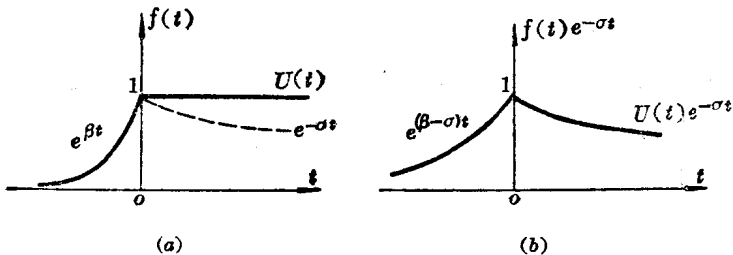


图5-1 一种存在有双边拉普拉斯变换的函数

现在来求  $f(t)e^{-\sigma t}$  的频谱函数，并以  $F_1(j\omega)$  表示，于是

$$\begin{aligned} F_1(j\omega) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-\sigma t} e^{-j\omega t} dt \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-(\sigma+j\omega)t} dt \end{aligned} \quad (5-2)$$

将此式与第二章中的傅里叶正变换式相比较，可以看出  $F_1(j\omega)$  是将  $f(t)$  的频谱函数中的  $j\omega$  换成  $\sigma + j\omega$  的结果。如果令  $s = \sigma + j\omega$ ，再以  $F(s)$  表示这个频谱函数，则有



$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-st} dt \quad (5-3)$$

对  $F(s)$  求傅里叶反变换则有

$$f(t) e^{-\sigma t} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{j\omega t} d\omega$$

因为  $e^{-\sigma t}$  不是  $\omega$  的函数, 故可移至上式右方的积分号内, 得

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(s) e^{(\sigma + j\omega)t} d\omega$$

考虑到  $s = \sigma + j\omega$ , 将变量由  $\omega$  变换成  $s$ , 并相应地改变积分限, 则上式可写为

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\infty}^{\sigma + j\infty} F(s) e^{st} ds \quad (5-4)$$

这也相当于把第三章的傅里叶反变换式中的  $j\omega$  用  $s$  代替所得到的结果。当然在积分变量经过这样的变换后, 相应的积分路径与积分的收敛区都将改变, 关于这个问题, 将在 § 5.3 中讨论。

式(5-3)及式(5-4)组成了一对新的变换式子, 称之为双边拉普拉斯变换式或广义的傅里叶变换式。其中前者称为双边拉普拉斯正变换式, 后者称为双边拉普拉斯反变换式;  $F(s)$  称为  $f(t)$  的象函数,  $f(t)$  称为  $F(s)$  的原函数\*。双边拉普拉斯正、反变换式可用下列符号分别表示

$$F(s) = \mathcal{L}_s \{f(t)\}$$

$$f(t) = \mathcal{L}_s^{-1} \{F(s)\}$$

在前面已经指出, 电子技术中所遇到的激励信号与系统响应大都为有始函数, 因为有始函数在  $t < 0$  范围内函数值为零, 式(5-3)的积分在  $-\infty$  到 0 的区间中为零, 因此积分区间变为由 0 到  $\infty$ , 亦即

---

\* 在变域分析法中, 常将变换后所得的函数称为该域中的象函数, 如  $F(s)$  称为  $f(t)$  在  $s$  域中的象函数,  $F(z)$  称为  $f(k)$  在  $z$  域中的象函数等, 一般可简称为象函数。

$$F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt \quad (5-5)$$

应该指出的是，为了适应激励与响应中在原点存在有冲激函数或其各阶导数的情况，积分区间应包括时间零点在内，即式(5-5)中积分下限应取  $0^-$ 。当然如果函数  $f(t)$  在时间零点处连续，则  $f(0^+) = f(0^-)$ ，就不必再区分  $0^+$  和  $0^-$  了。为书写方便，今后仍写为  $0$ ，但其意义表示  $0^-$ 。

至于式(5-4)，则由于  $F(s)$  中包含的仍为  $\omega$  从  $-\infty$  到  $+\infty$  的各个分量，所以其积分区间不变。但因原函数为有始函数，由式(5-4)所求得的  $f(t)$ ，在  $t < 0$  范围内必然为零。因此对有始函数来说式(5-4)可写为

$$f(t) = \left[ \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma-j\infty}^{\sigma+j\infty} F(s)e^{st} ds \right] U(t) \quad (5-6)$$

式(5-5)及式(5-6)也是一组变换对。因为是只对时间轴一个方向上的函数进行变换，为区别于双边拉普拉斯变换式，故称之为单边拉普拉斯变换式，并标记如下：

$$\begin{aligned} F(s) &= \mathcal{L}\{f(t)\} \\ f(t) &= \mathcal{L}^{-1}\{F(s)\} \end{aligned}$$

或简单地以符号表示为

$$f(t) \leftrightarrow F(s)$$

由以上分析可以看出，无论双边或单边拉普拉斯变换都可看成是傅里叶变换在复变数域中的推广。从物理意义上说，如第三章所述，傅里叶变换是把函数分解成许多形式为  $e^{j\omega t}$  的分量之和。每一对正、负  $\omega$  分量组成一个等幅的正弦振荡，这些振荡的振幅  $\frac{|F(j\omega)| d\omega}{\pi}$  均为无穷小量。与此相类似，拉普拉斯变换也是把函数分解成许多形式为  $e^{st}$  的指数分量之和。比较一下式(5-4)与式(3-49)就可以得出与傅里叶变换中相类似的结论，即对于象函数

中每一对正、负 $\omega$ 的指数分量决定一项变幅度的“正弦振荡”，其振幅 $\frac{|F(s)|d\omega}{\pi}e^{\sigma t}$ 也是一无穷小量，且按指数规律随时间变化。与在傅里叶变换中一样，这些振荡的频率是连续的，并且分布及于无穷。根据这种概念，通常称 $s$ 为复频率，并可把 $F(s)$ 看成是信号的复频谱。

复频率可以方便地表示在一个复平面上，如图 5-2 所示。图中

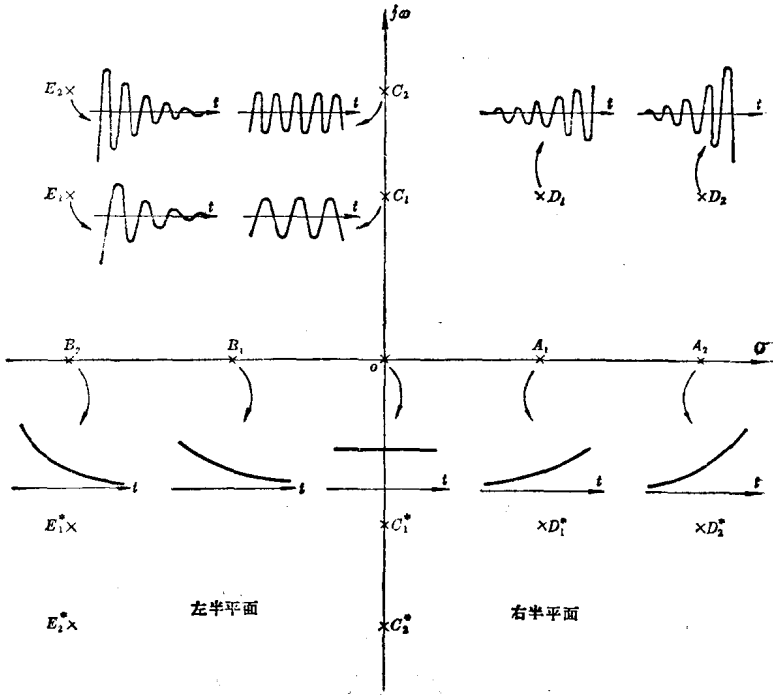


图 5-2 与复平面上位置不同的复频率相对应的时间函数模式图，带有 \* 号的点如  $C_1^*$ ,  $D_1^*$  等与其共轭点  $C_1$ ,  $D_1$  等分别合起来代表一时间模式

\* 事实上振幅变化时，已经不再是一个正弦振荡。但当振荡频率较高而振幅变化较慢时，在每一高频振荡周期内，仍可近似地看成是正弦振荡。

横轴  $\sigma$  为实轴, 纵轴  $j\omega$  为虚轴, 不同的  $s$  值对应于复平面上不同位置的点。当  $s = \sigma + j\omega$  确定时, 指数函数  $e^{st}$  随时间的变化关系亦完全确定, 所以复平面中的点可以与指数函数  $e^{st}$  相对应。 $s$  的实部  $\sigma$  反映指数函数  $e^{st} = e^{\sigma t} e^{j\omega t}$  幅度变化的速率, 虚部  $\omega$  反映指数函数中因子  $e^{j\omega t}$  作周期变化的频率。在复平面实轴上的点如  $A_1$ 、 $A_2$ 、 $B_1$ 、 $B_2$  等, 由于在这些点处  $\omega = 0$ , 所以每一点对应于一个随时间按指数规律作单调增长或衰减的指数函数。点的位置距虚轴愈远,  $\sigma$  的绝对值愈大, 即意味着所对应的函数增长或衰减的速率愈大。试比较  $A_1$  与  $A_2$  及  $B_1$  与  $B_2$ :  $A_1$ 、 $A_2$  在正实轴上, 相对应的是随时间增长的指数函数, 而  $B_1$ 、 $B_2$  在负实轴上, 相对应的是随时间衰减的指数函数。 $A_1$ 、 $B_1$  比  $A_2$ 、 $B_2$  距虚轴为近, 所以对应于  $A_1$ 、 $B_1$  的指数函数随时间的变化速率较对应于  $A_2$ 、 $B_2$  的函数的变化速率为慢。坐标原点  $o$  则对应于不随时间变化的常数。

需要指出的是, 在这里也会出现负频率的形式, 如  $C_1^*$ 、 $D_1^*$  等点的虚部均为负值。与第三章中所述的意义一样, 这仅是用指数分量来表示信号的一种数学形式。在第三章曾经指出, 一对  $\pm j\omega$  的指数函数可以合并成一个等幅正弦振荡, 即

$$e^{j\omega t} + e^{-j\omega t} = 2\cos\omega t \quad (5-7a)$$

与此相似, 一对共轭复频率  $\sigma \pm j\omega$  的指数函数也可以合并成一个幅度按指数规律变化的正弦振荡, 即

$$e^{(\sigma+j\omega)t} + e^{(\sigma-j\omega)t} = 2e^{\sigma t} \cos\omega t \quad (5-7b)$$

任一函数表示为指数函数之和时, 其复频率一定是共轭成对出现的, 所以实际上并不存在具有负频率的变幅正弦分量。

这样, 在虚轴上一对互为共轭的点, 因为  $\sigma = 0$ , 对应于等幅的正弦振荡, 且共轭点离实轴愈远, 相应的振荡频率亦愈高。试比较图 5-2 中点  $C_1$ 、 $C_1^*$  与  $C_2$ 、 $C_2^*$ : 因为  $C_1$ 、 $C_1^*$  比  $C_2$ 、 $C_2^*$  距实轴为近, 所以与  $C_1$ 、 $C_1^*$  对应的等幅正弦振荡的频率比与  $C_2$ 、 $C_2^*$  对应的等

幅正弦振荡的频率为低。

既不在实轴又不在虚轴上的每一对互为共轭的点，都对应于一个幅度按指数规律变化的正弦振荡。在左半平面的点对应于幅度按指数律衰减的正弦振荡，在右半平面的点对应于幅度按指数律增长的正弦振荡。例如在图 5-2 中， $D_1, D_1^*$  及  $E_1, E_1^*$  为分别在右半平面中及左半平面中的两对共轭点，它们分别对应于幅度按指数律增长及衰减的正弦振荡。同样，共轭点距离虚轴的远近，决定幅度变化的快慢；共轭点距离实轴的远近，决定振荡频率的高低。如在图 5-2 中，与  $D_1, D_1^*$  对应的变幅振荡的幅度增长速率比之与  $D_2, D_2^*$  对应的变幅振荡的幅度增长率为慢；而与  $E_1, E_1^*$  对应的变幅振荡的频率比之与  $E_2, E_2^*$  对应的变幅振荡的频率为低。

通过以上讨论可以看出，复平面  $s$  上的每一对共轭点或实轴上的每一点都分别唯一地对应于一个确定的时间函数模式。

由上面对复频率的说明，还可以清楚地看出，双边或单边拉普拉斯变换都是把函数表示为无穷多个具有复频率  $s$  的指数函数之和。而傅里叶变换只是双边拉普拉斯变换中  $s = j\omega$  的一种特殊情况，即分解是沿复平面中的虚轴进行的。因此在求傅里叶反变换时，广义积分是沿  $j\omega$  轴求取的。而在双边或单边拉普拉斯反变换中，积分可在收敛区中沿任意路径进行；通常  $\sigma$  取定值，即积分沿与  $j\omega$  轴平行且相距  $\sigma$  的直线进行（见图 5-3）。由本章后面的分析可以看到，利用复变函数中的留数理论，后者的求取要比前者容易得多。这也是在分析线性系统时经常采用拉普拉斯变换而不常用傅里叶变换的原因。

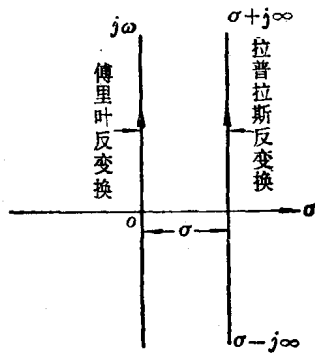


图 5-3  $s$  平面中反变换积分途径

### § 5.3 拉普拉斯变换的收敛区

在上节中已指出,当函数  $f(t)$  乘以收敛因子  $e^{-\sigma t}$  后,就有满足绝对可积条件的可能性,但是否一定能满足,尚要看  $f(t)$  的性质与  $\sigma$  值的大小而定。这也就是说对于某一函数  $f(t)$ ,通常并不是在所有的  $\sigma$  值上,  $f(t)e^{-\sigma t}$  俱为有限值,亦即并不是对所有  $\sigma$  值而言,函数  $f(t)$  俱存在拉普拉斯变换;而只是在  $\sigma$  值的一定的范围内,  $f(t)e^{-\sigma t}$  是收敛的,  $f(t)$  存在拉普拉斯变换。通常把  $f(t)e^{-\sigma t}$  满足绝对可积的  $\sigma$  值的范围称为收敛区。显然在收敛区内函数的拉普拉斯变换是存在的,在收敛区外则函数的拉普拉斯变换不存在。

下面就来讨论拉普拉斯变换的收敛区,先讨论单边拉普拉斯变换的情况。

有始函数  $f(t)$  乘以因子  $e^{-\sigma t}$  后,取时间  $t \rightarrow \infty$  的极限,若当  $\sigma > \sigma_0$  时,该极限等于零,则函数  $f(t)e^{-\sigma t}$  在  $\sigma > \sigma_0$  的全部范围内是收敛的。这一关系可表示为

$$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)e^{-\sigma t} = 0 \quad \sigma > \sigma_0 \quad (5-8)$$

$\sigma > \sigma_0$  为收敛条件。根据  $\sigma_0$  的值可将  $s$  平面划分为两个区域,见图 5-4。通过  $\sigma_0$  的垂直线是收敛区的边界,称为收敛边界或收敛轴,  $\sigma_0$  称为收敛坐标,  $s$  平面上收敛轴之右的部分即为收敛区。凡满足式(5-8)的函数通常称为指数阶函数,意思是指可借助于指数函数的衰减将函数  $f(t)$  的发散性压下去,使之成为收敛函数。

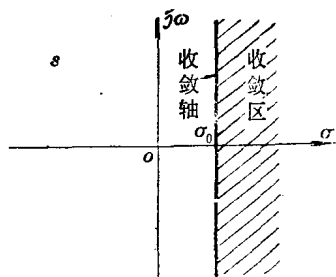


图 5-4 拉普拉斯变换的收敛区

下面举几个简单函数为例来说明收敛区的情况。

### (1) 单个脉冲信号

单个脉冲信号在时间上有始有终,且其能量有限,因此对任何 $\sigma$ 值式(5-8)俱成立,其收敛坐标位于 $-\infty$ ,整个 $s$ 平面全属于收敛区,也就是说单个脉冲的单边拉普拉斯变换是一定存在的。

### (2) 单位阶跃信号

对于单位阶跃信号 $U(t)$ ,不难看出对于 $\sigma > 0$ 的任何值,式(5-8)都是满足的,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [U(t)e^{-\sigma t}] = 0 \quad \sigma > 0$$

所以单位阶跃函数的收敛区由 $\sigma > 0$ 给出,为 $s$ 平面的右半平面。

### (3) 指数函数

对于指数函数 $e^{at}$ ,式(5-8)只有当 $\sigma > a$ 时方能满足,即

$$\lim_{t \rightarrow \infty} [e^{at}e^{-\sigma t}] = \lim_{t \rightarrow \infty} [e^{(a-\sigma)t}] = 0 \quad \sigma > a$$

故其收敛区为 $\sigma > a$

应该说明的是,在电子技术中实际遇到的有始信号,都是指数阶信号。因此只要 $\sigma$ 取得足够大,式(5-8)总是能满足的,也就是说实际上存在的有始信号,其单边拉普拉斯变换一定存在。当然,也有某些函数随时间的增长较指数函数为快,如 $e^{t^2}U(t)$ 或 $t^tU(t)$ 等,对这样的函数,不论 $\sigma$ 取何值,式(5-8)都不能满足,单边拉普拉斯变换就不存在。然而这类函数在实用中不会遇到,因此也就没有讨论的必要。

现在再来讨论双边拉普拉斯变换的收敛区。双边拉普拉斯变换可以看成是两个单边拉普拉斯变换的迭加。通常在时间正、负方向上信号是用不同函数来表示的,因为假如在时间正、负方向上表示信号的函数相同则双边拉普拉斯变换即不存在。所以可以用 $f_1(t)$ 及 $f_2(t)$ 分别表示 $t > 0$ 及 $t < 0$ 时的信号。式(5-3)可改写为

$$F(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt = \int_{-\infty}^0 f_2(t)e^{-st} dt + \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt$$

将第一个积分中变量由  $t$  变为  $-t$  则得

$$F(s) = \int_0^{\infty} f_2(-t)e^{st} dt + \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt \quad (5-9)$$

因此, 双边拉普拉斯变换的收敛区一般来说有两个有限边界: 一个边界决定于  $t > 0$  时的函数  $f_1(t)$ , 是收敛区的左边界, 以  $\sigma_+$  表示; 另一个边界则决定于  $t < 0$  时的函数  $f_2(t)$ , 是收敛区的右边界, 以  $\sigma_-$  表示。如果  $\sigma_- > \sigma_+$ , 则式(5-9)中两个积分有公共收敛区, 双边拉普拉斯变换存在; 如果  $\sigma_- \leq \sigma_+$ , 则无公共收敛区, 双边拉普拉斯变换不存在。

现以图 5-1 的函数为例来说明双边拉普拉斯变换的收敛问题。

**例题 5-1** 设已知

$$f(t) = \begin{cases} f_1(t) = 1 & t > 0 \\ f_2(t) = e^t & t < 0 \end{cases}$$

试确定  $f(t)$  的双边拉普拉斯变换的收敛区。

**解** 取积分

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-st} dt &= \int_0^{\infty} f_2(-t)e^{st} dt + \int_0^{\infty} f_1(t)e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{-t} e^{st} dt + \int_0^{\infty} e^{-st} dt \\ &= \int_0^{\infty} e^{(\sigma-1)t} dt + \int_0^{\infty} e^{-\sigma t} dt \end{aligned}$$

可以看出, 等式右边第一个积分的收敛边界为  $\sigma_- = 1$ , 第二个积分的收敛边界为  $\sigma_+ = 0$ 。现在  $\sigma_- > \sigma_+$ , 故公共收敛区为  $0 < \sigma < 1$ 。在此范围内,  $f(t)e^{-st}$  满足收敛条件, 双边拉普拉斯变换存



在; 对此范围外的其它  $\sigma$  值而言, 双边拉普拉斯变换不存在。此收敛区如图 5-5 中阴影部分所示。

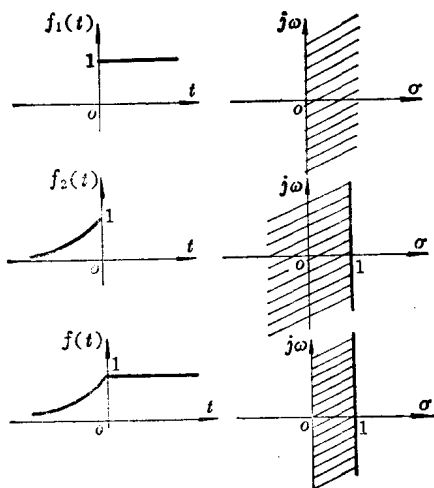


图 5-5  $f_1(t)$ ,  $f_2(t)$  及  $f(t)$  的收敛区

从上面分析中可以看出, 双边拉普拉斯变换的收敛区要受到一定的限制, 因而求其反变换就较为复杂。而单边拉普拉斯变换, 则因为电子技术中所遇到的有始信号都是指数阶函数, 单边拉普拉斯变换必定存在。目前, 在实际工作中双边拉普拉斯变换虽有应用, 但远不如单边拉普拉斯变换应用广泛。因此在本书中, 今后将只讨论单边拉普拉斯变换, 并简称为拉普拉斯变换。又因为其收敛区必定存在, 所以在今后讨论中将不再说明函数是否收敛的问题。

## § 5.4 常用函数的拉普拉斯变换

有些函数是在应用中经常遇到的, 本节将对一些常见的函数求取其拉普拉斯变换或即象函数。实际上, 如果函数  $f(t)$  的拉普拉斯变换收敛区包括  $j\omega$  轴在内, 则只要将其频谱函数中的  $j\omega$  换