青年数学叢書

有向图形的面積計算

洛普希兹著

中国青年出版社

青年数学叢書

有向图形的面积計算

A. M. 洛普希茲著

高恒珊譯

[illegible]版社

有向图形的面积計算

〔苏〕A. M. 洛普希兹著

高恆珊譯

*

中国青年出版社出版
（北京东四12条老君堂11号）
北京市書刊出版業营業許可証出字第036号
公私合营西四印刷厂印刷
新华書店总經售

*

787×1092 1/32 1 7/8 印張 28,000字
1958年8月北京第1版 1958年8月北京第1次印刷
印数1—15,000

統一書号：13009·162

定价(7)一角八分

內容提要

这本小册子在初等几何知識的基础上，介紹了有向面积的概念，介紹了这个概念在面积計算方面的实际应用。它会告訴你：什么是有向图形和有向面积？怎样根据有向面积的概念来了解面积計的作用原理？为什么利用面积計就可以簡便地测量出画在图紙上任何图形的面积？最后，还从有向面积概念推导出一个簡單合理的公式，利用这个公式可以計算出地面上用任意一条閉綫圍成的土地面积。

А. М. ЛОПШИЦ
ВЫЧИСЛЕНИЕ ПЛОЩАДЕЙ
ОРИЕНТИРОВАННЫХ ФИГУР
ТЕХГИЗ, МОСКВА, 1956

序

这本小册子向讀者介紹了有向图形面积的概念，介紹了这个概念在面积計理論方面的应用，以及推导出計算地面上用一条任意閉折綫圍成的土地面积的一个合理公式．讀者还会相信，有向面积的概念也可以用来解决中学几何上的問題．

这本小册子，是根据我对中学高年級生講演稿写成的．

A．洛普希兹

目　次

序

这本小冊子向讀者介紹了有向图形面积的概念，介紹了这个概念在面积計理論方面的应用，以及推导出計算地面上用一条任意閉折綫圍成的土地面积的一个合理公式．讀者还会相信，有向面积的概念也可以用来解决中学几何上的問題．

这本小冊子，是根据我对中学高年級生講演稿写成的．

A.洛普希兹

目　次

前　言

学习初等几何的时候，应該多多注意面积計算的問題．中学課本里叙述的許多定理，不但具有理論性的、純数学的趣味，而且还有很大的实际意义．但是，要更完善地研究发生在几何学这一部門的問題，并且更广泛地把它們应用到实际問題上去，只有把面积概念本身大大扩充以后才有可能．有向面积的概念（按习惯只在高等数学課程里研究），为各式各样几何問題帶来了很大好处．它好比在学习代数时，发現除开算术里用的正数以外还研究負数一样．

有向面积概念很自然地扩大了中学生习惯的面积概念，內容这样淺显，有趣的結果又这样多，促使我不等到中学生学习高等数学时就来向他們介紹了．仍旧用已經作过的比方，我們可以这样說，高中学生可以接受这个概念的程度，正象已經学会算术而沒有学代数的高小学生可以接受負数一样．

在这本小册子的第一章里，讀者可以找到关于平面上有向图形面积測量問題的叙述．測量的結果，象我們就要指出的，有时候得到正数，有时候得到負数．这个数，我們就叫做**有向面积**．就在这一章里面，將証明一系列的定理，这些定理可以当作初等几何已知定理在数学上的有趣推广．

在第二章里，这些定理將用来解釋一种仪器叫做**面积計**

的作用原理．这种仪器在工程实踐中已經广泛采用，它可以簡便地量出画在图紙上任何图形的面积．

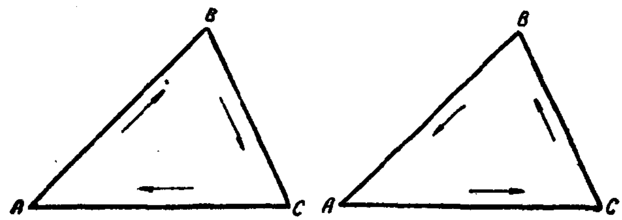
在第三章里，有向面积概念將用来导出計算地面上图形面积的簡單合理的公式．

一　有向图形的面积計算

1. 有向三角形

在初等几何里，如果已知三点 A、B、C 是一个三角形的頂点，那末这个三角形就算完全确定了．在这种情形，通常說：已知三角形 ABC．当然也同样可以說：已知三角形BAC．然而稍稍改变一下我們对三角形的看法，把它看作沿閉路运动的軌迹，这閉路是由依次連結三角形頂点而得到的三个直綫段（三角形的三条边）組成的，这也很合理．在这种观点下，三角形的确定，除了指出它的三个頂点以外，还要附帶說明，在沿着三角形的边作連續閉合运动时經过这些頂点的次序．在图上用箭头标出每条边的运动方向（图1；只标出三角形任何一边的运动方向当然也够了），或者象通常說的，标明运动方向，这是比較容易做到的．

为了把对三角形的这种新观点跟以前的看法区别开来，我們就說，我們研究的是**有向三角形**．这样，已知三个頂点 A、B、C，还不能确定一个有向三角形：很明显，有兩个不同的有向三角形，頂点一样都是 A、B、C；在它們里面，一个（图1，a）是按順时針方向定向的（这样的定向叫做**左定向**），另一个



(a) (б)

图 1.

(图1,б) 是按反时針方向定向的(这样的定向叫做**右定向**)。这兩个有向三角形,第一个应該記作:三角形 ABC(或 BCA,或 CAB),第二个应該記作:三角形 BAC(或 ACB,或 CBA)。

簡單地說,确定一个有向三角形,不單要知道三个頂点,还要知道这三个頂点的次序,也就是不但要指出三个頂点,还要說明这三个頂点是按什么次序的;为了記頂点是 A、B、C 的有向三角形,我們規定,把表示它的頂点的字母按这样的次序写,就是在沿三角形的边按已知定向(右定向或左定向)繞过来的时候,就会按照这个次序通过三个頂点。

2. 有向三角形的有向面积

〔定义〕 **有向三角形 ABC 的有向面积是一个数,这个数的絕对值等于頂点在 A、B、C 的(非有向)三角形的面积;如果三角形按反时針方向定向,有向面积是正数,如果三角形按順时針方向定向,它就是負数。**

如果讀者覚得这个定义奇怪,不痛快,甚至于覚得它在某种程度上和計算面积的习惯(只用正数!)相抵触,那末首先請

安靜，并且請注意：我們現在講的并不是普通三角形的面积，而是有向三角形的面积．正因为这样，我們才把它叫做这个有点新鮮的名字——有向面积．可見这跟通常的方法并不抵触：在初等几何里非有向三角形的面积原是用正数来测量的．

使讀者相信这个定义的合理性是有点困难的．要完全理解这种合理性，只有往后去（特别是学习了第二章内容以后，在第二章里將說明有向面积概念在面积計——一种测量繪在图紙上的图形面积的仪器——理論上的应用）才可能．但是現在我們已經可以指出，把这个概念应用到某些初等几何学問題上去是多么有好处了．为了这个目的，我們来注意下面兩条定理．

〔定理1〕 **如果用一綫段連結三角形 ABC 的頂点 A 和在綫段 BC 內的任何一点 A'，那末原来的三角形 ABC 的面积等于产生的三角形 $A'AB$ 和 $A'AC$ 面积的和．**

〔定理2〕 **如果用一綫段連結三角形 ABC 的頂点 A 和在直綫 BC 上、但不在綫段 BC 內的任何一点 A'，那末原来的三角形 ABC 的面积等于产生的三角形 $A'BA$ 和 $A'AC$ 面积的差．**

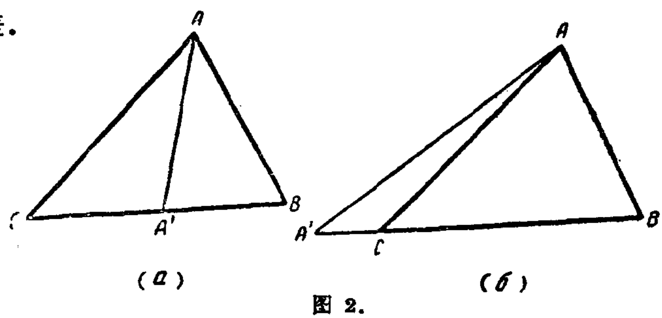
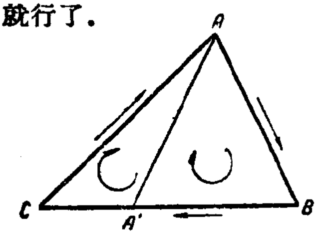


图 2.

这兩条定理的証明非常簡單，我們不必在这里多談（图2）．前面說起过的应用有向面积概念[①] 的好处，就在：这兩条"肖似"的定理的內容，可以用下面一条定理說完全．

〔定理3〕 **如果用一綫段連結三角形 ABC 的頂点 A 和在直綫 BC 上的任何一点 A'，A' 不論在綫段 BC 外部或內部，那末有向三角形 ABC 的面积等于有向三角形 $A'AB$ 和 $A'CA$ 面积的和．**

在証明这条定理的时候，讀者当然应該分別考虑兩种可能的情况。第一种情况（图3，a），点 A' 在綫段 BC 上，因此，三个有向三角形 ABC、$A'AB$、$A'CA$ 的定向完全一致，三个有向面积的符号相同；在这种情况，証明定理3只要引用定理1就行了．



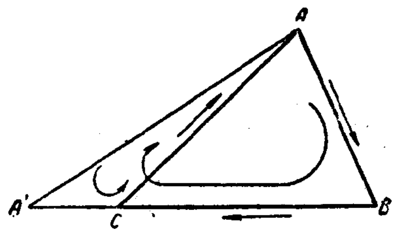


图 3.

第二种情况（图3，$б$），点 A' 在直綫 BC 上、但不在綫段 BC 以內，有向三角形 $A'AB$ 和 $A'CA$ 的定向不同，因此它們的有向面积的符号也就不一样；在这种情况，証明定理3，自然是引用定理2．

---

① 下面敍述时，讀者已經掌握了新概念，我們就不妨簡化一下，用有向三角形的面积来代替有向三角形的有向面积．

注意1： 也許有人認为，要引用兩条定理1和2来証明的一条定理3，在某种程度上是多余的。但是，定理3的基本价值正在无論点A'在直綫BC的什么位置都成立，因此，它就可以应用到这样一些情况，就是我們根本不知道点A'究竟是在綫段BC以內还是以外的情况。利用这种情况，常常可以簡化那些和定理3有关的定理的証明。(参看第12頁定理4的証明。)

注意2： 是不是点A'在直綫BC的任何位置上，定理3都成立呢？可惜，这个論断我們还沒有証明！事实上，在已經証明的定理3的条件里只是說(在証明里用到的也正是这一点)，点A'可以在綫段BC內部，或者在直綫BC上、但在綫段BC外部。由此可見，幷沒有考慮到点A'和綫段BC某一端重合的情况。然而在这种情况定理3是不成立的，这是因为定理条件里提到的三角形$A'AB$(或三角形$A'CA$)幷不存在的緣故；要知道，在初等几何里通常只把不在一直綫上的三点看作是一个三角形的頂点。

不过，放棄这种定义是合理的。我們可以这样假定：处在任何位置的三点A、B、C，都可以看作是一个三角形的頂点；这个三角形的边是綫段AB、BC、CA。在三角形的三个頂点在一直綫上时，它的面积等于零；特别是当三角形的兩个(或者甚至三个)頂点重合时，它的面积等于零。这样看法是完全合理的。跟初等几何里的比較起来，三角形的这种扩充意义可以使A'在直綫上任何位置时定理3都成立(这一点讀者不难驗証)；因此，下面一条以后要用到的定理是正确的。

〔定理 3′〕 **如果把三角形 ABC 的頂点 A 和直綫 BC 上任何一点 A' 連結起来，那末有向三角形 ABC 的面积等于有向三角形 $A'AB$ 和 $A'CA$ 的面积的和.**

3. 加法定理

設 O 是在三角形 ABC 內部的一点. 把 O 和三角形各頂点連結起来，很容易看出(图 4，a)，三角形 ABC 的面积等于三个三角形 OAB、OBC、OCA 的面积的和. 如果点 O 不在三角形 ABC 內部而在外部，那末这个論断是不是正确呢？只要看一下图 4 (б)，就会相信这个問題的回答是否定的：三角形

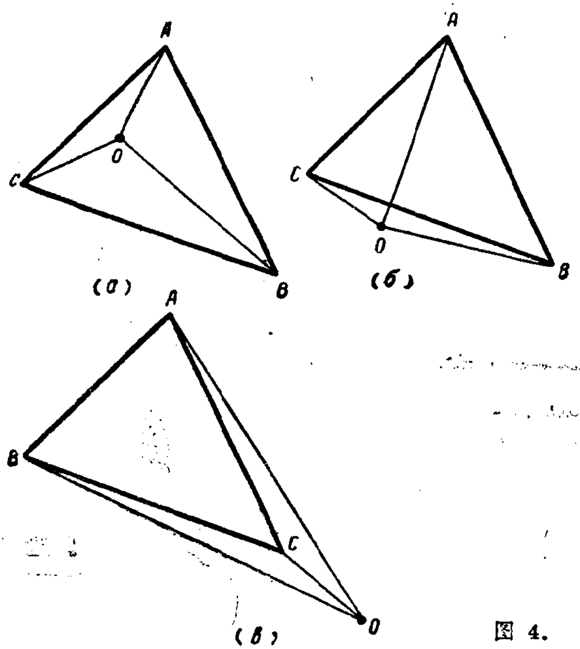


图 4.

ABC 的面积并不等于三角形 OAB、OBC 和 OCA 的面积的和；它显然比这个和数小。

讀者一定会对这种情况发愁！从已經造成的形势找出路有沒有困难呢？定理还能不能“保持”呢？仔細看看图 4 (а)、(б)、(в)吧！請有向面积概念来帮忙吧！难道你們就不會料到，連下面这条定理也是正确的！

〔定理 4 (加法定理)〕 **无論点 O 在三角形 ABC 所在平面的哪一处，有向三角形 ABC 的面积[1] 都等于有向三角形 OAB、OBC、OCA 的面积的和。**

要証明这条定理，除了耐心考虑图 4 (а) 和 (б) 的情况以外，还要考虑到点 O 和三角形 ABC 的关系如图 4 (в) 的情况。

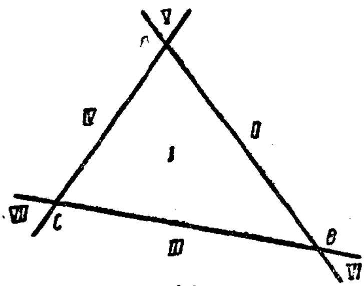


图 5.

不难相信，在每一个这样的情况定理 4 都成立；于是讀者就証明了，定理 4 在点 O 和三角形 ABC 有任何相对位置时都是正确的：要知道，点 O 只可能在(图5)区域 I(图4，а 的情况)，或者在区域 II、III、IV 里的一个区域(图 4，б 的情况)，或者在区域 V、VI、VII 里的一个区域(图 4，в 的情况)。

4. 加法定理的严格証明

讀者对于只象上面那样說說的加法定理的証明，会感到

[1] 参看第 7 頁的注.

十分滿意嗎？不用說，在讀者里面是会发出几何推理要合乎邏輯的抗議声来的，几何学家們認为，只有从定理的条件出发、根据邏輯規則（当然，如果有益的話也可以引用已經証明了的定理）推得結論，才算是証明。

事实上，如果我們仔細想一想上面的所謂"証明"，比如說象图4(*a*)的証明，那末立刻就会明白，它除了合乎邏輯的思考以外，在很大程度上还包括我們的图表示出来的論断（主要是指图4，*б*情况关于三角形OAB、OBC、OCA的定向的論断，而不是指图4，*в*情况的）。但是大家知道得很清楚，这种一看"似真"的論断，在某些情况可能导出前提不正确的"証明"[1]。

根据上述理由，我們一定要对加法定理作出严格的、合乎邏輯的証明。

如果采用專門符号，就可以使叙述簡化，因此我們規定用(ABC)来表示有向三角形ABC的有向面积。

根据假設，下列等式显然是成立的：

$$(ABC)=(BCA)=(CAB), \tag{1}$$

$$(BAC)=(ACB)=(CBA), \tag{1'}$$

$$(ABC)=-(BAC). \tag{2}$$

应用我們的符号，可以把定理3′的条件改写成下面的形式：

〔定理3′〕 **对于任意三点A、B、C，和在直綫BC上的一点**

---

[1] 关于在几何定理証明中图形的作用这个問題，請詳細参看杜勃諾夫（Я.С.Дубнов）著的小册子："几何証題中的錯誤"，"数学通俗講演"里的一本，苏联技术理論書籍出版社1954年出版。（該書已有中譯本，洪波譯，中外書局1955年出版。——譯者注）