吴卓人　应明　编著

复变函数论讲义

FUBIAN
HANSHULUN
JIANGYI

同济大学出版社

复变函数论讲义

吴卓人　应　明　编著

同济大学出版社

内 容 提 要

本书是根据应用数学专业与工程数学教材委员会于 1985 年提出的复变函数教学基本要求而编写的。本教材在同济大学数学系内进行过十年教学，这次又进行了全面的修订。本书的特点是力求概念清楚明晰、证明简单直接、文字简炼通顺。每章均配有大量例题和习题，并附部分答案。本书适用于应用数学、理工科本科大学生及非数学专业的研究生。

责任编辑　曹炯康
封面设计　陈益平

复变函数论讲义

吴卓人　应　明　编著

同济大学出版社出版
（上海四平路1239号）
新华书店上海发行所发行
上海中行印刷厂常熟分厂印刷
开本：850×1168 1/32 印张 8.5 字数：240千字
1996年3月第1版　1996年3月第1次印刷
印数：1-2000　定价：6.80元
ISBN 7-5608 1462-X/O・138

前言

复变函数是理工科大学生的必修基础课，它主要讲授复变数的解析函数的性质、理论和方法。一般应放在微积分课程之后学习。由于它的重要性和应用的广泛性，理工科大学生几乎每人都应该掌握它的基本内容。本讲义就是为了给理工科大学生提供一本简明扼要的教材而编写的。本书可供应用数学专业的本科生及非数学专业的研究生使用，教学需 60 学时，也可供工科大学生在删去某些理论部分及某几个章节后作为课程用书，在 34 个学时内教学。

本书是根据应用数学专业与工程数学教材委员会于 1985 年提出的复变函数教学基本要求编写的，共分八章。

第一章在复习复数运算的基础上介绍复变函数的极限与连续性概念，着重于解析函数概念与初等解析函数。第二章讲授 Cauchy 定理与 Cauchy 积分公式以及从它们获得的主要直接推论，如最大模定理、Liouville 定理与 Morera 定理等。本书中 Cauchy 积分定理的证明，克服了传统的教程中较繁琐的方法而给出直接而简明的论证。非数学专业的各专业则只须在导函数连续的较强条件下，使用 Green 定理来加以证明。在 Cauchy 积分定理与 Cauchy 积分公式的基础上，第三章与第四章进一步研究解析函数的 Taylor 级数与 Laurent 级数，特别是留数的引进及对于孤立奇点的分类研究，其中介绍了留数定理在积分计算中的应用。辐角原理与 Rouché 定理的介绍对非数学专业可能课时不允许，可以略去，亦可仅介绍一些结论，如代数学基本定理。第五章介绍共形映照，主要是分式线性函数的映照性质及简单的

圆界区域的映照方法。对于非数学类的工科专业把握以上各章基本内容已达大纲要求。

第六章介绍解析延拓的两个基本方法——幂级数方法和对称原理及初等 Riemann 面的概念。而复变函数在边界值问题上的应用则是第七章中介绍的调和函数的边界值问题与 Poisson 公式。第八章介绍的 Laplace 变换的基本方法可能在数理方程课程中提到，但一般不会给予充分的展开，我们在讲义中介绍了 Laplace 变换及其逆变换，并列举了几个典型的微分方程与积分方程的例子以引导读者去应用所学的复分析方法。

在书中我们力求概念清楚明瞭，证明简单直接，文字简炼通顺。并且在各节后配有一定数量的习题以供读者选做。要学好数学，必须多下功夫思考，而做习题是初学者把握基本概念、培养思维与演绎能力的必要方法，这是经验所一再证明了的。

本讲义由编者在多年教学实践中几经修改而完成，其中第二、第三、第四及第七章由吴卓人编写，应明编写第一、第五、第六、第八章；在公开出版前应明又作了全面的修订。本书的原讲义在同济大学曾先后经文鸣博士与朱经浩先生使用于教学，他们曾提供过不少很好的意见与建议，趁此机会我们向他们表示衷心的感谢。

编　　者

1995 年春于上海

目 录

第一章　复变函数与解析函数

这一章主要介绍复数、复变函数与解析函数的基本概念，这是整个课程的初步．我们要介绍复变数的复数值函数的解析性概念。从概念上讲它是实函数的微积分学的延伸与推广，而解析函数有一系列深刻的性质，这使得复变函数的理论成为非常丰富的完整体系并且有着广泛的应用领域。

§1　复　数

1. 复数域

定义　复数的全体 $\mathbf{C}$ 是一个代数域：它的元素 α 与 β 之间规定了加法与乘法运算．α 加 β 记为 $\alpha+\beta$；α 乘 β 记为 $\alpha\cdot\beta$ 或 $\alpha\beta$. 加法与乘法满足以下条件：

1）每个实数是复数，即 $\mathbf{R}\subset\mathbf{C}$。若 α，β 是实数，则 $\alpha+\beta$ 与 $\alpha\beta$ 分别等于它们的实数和与实数积，换句话说，实数域是复数域的子域。

2）$\mathbf{C}$ 中有元素 i，适合 $\mathrm{i}^2=-1$，称 i 是虚数单元.

3）每个复数 α 可唯一地写成 $a+\mathrm{i}b$ 的形式，其中 a，b 是实数，称 a 为 α 的实部，记为 $a=\mathrm{Re}(\alpha)$，b 为 α 的虚部，记为 $b=\mathrm{Im}(\alpha)$。换言之，复数 $a+\mathrm{i}b$ 就是一对有序的实数(a, b).

4）复数间的加法与乘法符合普通的算术定律：

(a) 结合律：设 α，β，γ 是复数，则

$$(\alpha+\beta)+\gamma=\alpha+(\beta+\gamma),\quad (\alpha\beta)\gamma=\alpha(\beta\gamma).$$

(b) 分配律：$\alpha(\beta+\gamma)=\alpha\beta+\alpha\gamma$，$(\alpha+\beta)\gamma=\alpha\gamma+\beta\gamma$.

(c) 交换律：$\alpha\beta=\beta\alpha$，$\alpha+\beta=\beta+\alpha$.

1 表示乘法单位：对每个复数 α，$1\cdot\alpha=\alpha$

0 表示加法零元：对每个复数 α，$0+\alpha=\alpha$，且 $0\cdot\alpha=0$. 又对每个 α，$\alpha+(-\alpha)=\alpha-\alpha=0$.

两个复数 $z_1=a_1+b_1\mathrm{i}$ 与 $z_2=a_2+b_2\mathrm{i}$ 相等，当且仅当它们的实部与虚部各自相等，即

$$z_1=z_2 \quad\Rightarrow\quad a_1=a_2,\ b_1=b_2.$$

两个实数可以比较大小，而复数就没有这样的大小关系。因此，复数也无所谓正的或负的。今后谈到两个数的大小关系时，指的必是实数.

如果复数 $a+b\mathrm{i}$ 的实部 $a=0$，但 $b\neq0$，称 $b\mathrm{i}$ 是纯虚数.

例 1 算出 $(1+\mathrm{i})^{375}=a+\mathrm{i}b$.

解 因 $(1+\mathrm{i})^2=2\mathrm{i}$，$(1+\mathrm{i})^{2n}=2^n\mathrm{i}^n$

$$\begin{aligned}(1+\mathrm{i})^{375}&=(1+\mathrm{i})^{374}(1+\mathrm{i})=(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{187\times2}\\&=(1+\mathrm{i})\cdot2^{187}\cdot\mathrm{i}^{187}\\&=(1+\mathrm{i})\cdot2^{187}\cdot\mathrm{i}^{46\times4+3}\\&=(1+\mathrm{i})\cdot2^{187}(-\mathrm{i})\\&=2^{187}-2^{187}\mathrm{i}\end{aligned}$$

因此得到

$$a=-b=2^{187}.$$

例 2 试从下述方程中解出实数 x，y

$$x^2-y^2+2x+(2xy+2y)\mathrm{i}=0.$$

解 x，y 满足联立方程组

$$(x^2-y^2)+2x=0 \tag{1}$$

$$2xy+2y=0 \tag{2}$$

从式(2)，可知 $xy+y=0$，即 $(x+1)y=0$.

如果 $x=-1$，则由(1)知必有 $-y^2-1=0$，对实数无解. 所以 $x\neq-1$，因而必 $y=0$. 由式(1)得 $x^2+2x=0$，$x=0$ 或 -2.

$x=0$，$y=0$ 必然满足所给方程，$x=-2$，$y=0$ 亦然. 最后，方程的解有两组 $x=0$，$y=0$；$x=-2$，$y=0$.

2. 共轭复数与复数的模

对于不为 0 的复数 $z=a+b\mathrm{i}$，令

$$\lambda=\frac{a-bi}{a^2+b^2}=\frac{a}{a^2+b^2}-\frac{b}{a^2+b^2}i,$$

则 $\lambda z=z\lambda=1$. 称 λ 为 z 的**倒数**，记 λ 为 z^{-1} 或 $\frac{1}{z}$.

对任何复数 $z=a+bi$，称复数 $a-bi$ 为 z 的**共轭复数**，记为 $\bar{z}=a-bi$. 易见 z 为实数的充要条件是 $z=\bar{z}$.

对于复数 z，w，当 $w\neq0$ 时，称 $z\cdot w^{-1}=\frac{z}{w}$ 为 z 与 w 之比，也称 z 除以 w 的商。

从倒数的定义可知，当 $w\neq0$ 时，$\frac{1}{w}=\frac{\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}$，因此，

$$\frac{z}{w}=\frac{z\cdot\bar{w}}{w\cdot\bar{w}}.$$

容易验证，共轭运算具有以下性质:

$$\overline{(\bar{z})}=z$$

$$\overline{(z_1+z_2)}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$$

$$\overline{(z_1\cdot z_2)}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$$

当 $z_2\neq0$ 时，
$$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}.$$

复数 z 的实部与虚部可以分别地表示为

$$\mathrm{Re}(z)=\frac{z+\bar{z}}{2},$$

$$\mathrm{Im}(z)=\frac{z-\bar{z}}{2i}.$$

例 3 设 $z_1=1-i$，$z_2=-2+3i$，求 $\frac{z_1}{z_2}$ 与 $\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}$.

解
$$\frac{z_1}{z_2}=\frac{z_1\overline{z_2}}{z_2\overline{z_2}}=\frac{(1-i)(-2-3i)}{(-2+3i)(-2-3i)}$$
$$=\frac{(-2-3)+(2-3)i}{(-2)^2+3^2}=\frac{-5-i}{13}$$

$$= -\frac{5}{13} - \frac{1}{13}\mathrm{i}$$

因此，$\overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} = -\frac{5}{13} + \frac{1}{13}\mathrm{i}$.

例 4 设$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}}$，求 $\mathrm{Re}(z)$，$\mathrm{Im}(z)$.

解
$$z = -\frac{1}{\mathrm{i}} - \frac{3\mathrm{i}}{1-\mathrm{i}} = -\frac{-\mathrm{i}}{\mathrm{i}(-\mathrm{i})} - \frac{3\mathrm{i}(1+\mathrm{i})}{(1-\mathrm{i})(1+\mathrm{i})}$$
$$= \mathrm{i} - \frac{-3+3\mathrm{i}}{2} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{i}$$

因此，
$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}，\ \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}.$$

设 $z=a+b\mathrm{i}$，其中 a,b 分别是 z 的实部与虚部。则
$$z\bar{z} = (a+b\mathrm{i})(a-b\mathrm{i}) = a^2+b^2$$

算术平方根$\sqrt{a^2+b^2}$称为 z 的**绝对值**或 z 的**模**，记为$|z|$. 于是$z\bar{z} = |z|^2$，并从定义可知$|z| = |\bar{z}|$.

复数的模适合如下关系:
$$|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$$

这是因为
$$|z \cdot w|^2 = (zw)(\overline{zw}) = z\bar{z}w\bar{w} = |z|^2|w|^2$$
因此，**乘积的模等于模的乘积**.

这个结论对任意有限个数的乘积都是对的:
$$|z_1 z_2 \cdots z_n| = |z_1| \cdot |z_2| \cdots |z_n|$$

如果 $w \neq 0$，由于$w \cdot \frac{1}{w} = 1$，取模后得
$$\left|w \cdot \frac{1}{w}\right| = |w| \cdot \left|\frac{1}{w}\right| = 1$$
所以
$$\left|\frac{1}{w}\right| = \frac{1}{|w|}.$$
一般地，
$$\left|\frac{z}{w}\right| = \frac{|z|}{|w|}.$$
即，**商的模等于模的商**.

3. 三角不等式

首先，我们从复数的实部、虚部及复数模的定义可知

$$-|z|\leqslant \mathrm{Re}(z)\leqslant |z| \tag{1}$$
$$-|z|\leqslant \mathrm{Im}(z)\leqslant |z|.$$

其次，对任何复数 z_1，z_2，我们有

$$\begin{aligned}\mathrm{Re}(z_1\cdot\bar{z}_2)&=\frac{z_1\bar{z}_2+\overline{(z_1\cdot\bar{z}_2)}}{2}\\&=\frac{1}{2}(z_1\bar{z}_2+\bar{z}_1z_2)=\mathrm{Re}(\bar{z}_1z_2).\end{aligned}\tag{2}$$

因此

$$\begin{aligned}|z_1+z_2|^2&=(z_1+z_2)(\bar{z}_1+\bar{z}_2)\\&=z_1\bar{z}_1+2\mathrm{Re}(z_1\bar{z}_2)+z_2\bar{z}_2\\&\leqslant|z_1|^2+2|z_1\overline{z_2}|+|z_2|^2\\&=|z_1|^2+2|z_1||z_2|+|z_2|^2\\&=(|z_1|+|z_2|)^2.\end{aligned}\tag{3}$$

即得三角不等式:

$$|z_1+z_2|\leqslant|z_1|+|z_2|. \tag{4}$$

用归纳法不难推得关于有限和的三角不等式:

$$|z_1+z_2+\cdots+z_n|\leqslant|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|. \tag{5}$$

现在来讨论一下(4)式中等号成立的条件:

(4)式成为等式等价于(3)式中 $\mathrm{Re}(z_1\overline{z_2})=|z_1\overline{z_2}|$，即 $z_1\overline{z_2}$ 是非负实数。当 $z_2\neq0$ 时，条件可写成 $z_1\overline{z_2}=\dfrac{z_1}{z_2}|z_2|^2\geqslant0$，因而等价地，$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant0$.

例 5 不等式(5)成为等式的充分且必要条件是 z_1，…，z_n 中任何两个非零项之比为正数.

证 如果(5)式成为等式，则

$$
\begin{aligned}
|z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n| &= |(z_1+z_2)+z_3+\cdots+z_n| \\
&\leqslant |z_1+z_2|+|z_3|+\cdots+|z_n| \\
&\leqslant |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.
\end{aligned}
$$

从而$|z_1+z_2|=|z_1|+|z_2|$，若 $z_2\neq 0$，则$\dfrac{z_1}{z_2}\geqslant 0$，由于 z_1 与 z_2 的下标是具有一般意义的。因此任何两个非零项之比必为正数。

反之，设 $z_1\neq 0$，而两个非零项 z_k 与 z_1 之比$\dfrac{z_k}{z_1}>0$，则

$$
\begin{aligned}
|z_1+z_2+\cdots+z_n| &= |z_1||1+\frac{z_1}{z_2}+\cdots+\frac{z_n}{z_1}| \\
&= |z_1|\left(1+\frac{z_2}{z_1}+\cdots+\frac{z_n}{z_1}\right) \\
&= |z_1|\left(1+\left|\frac{z_2}{z_1}\right|+\cdots+\left|\frac{z_n}{z_1}\right|\right) \\
&= |z_1|+|z_2|+\cdots+|z_n|.
\end{aligned}
$$

即(5)式中等号成立。

三角不等式的特例之一是不等式

$$
|a+bi|\leqslant|a|+|b|. \tag{6}
$$

即对任一复数 z，$|z|\leqslant|\mathrm{Re}(z)|+|\mathrm{Im}(z)|$，在下一节可以看出(6)式的几何意义。

4. 柯西(Cauchy)不等式

对任意两组复数 α_1，α_2，$\cdots\alpha_n$；β_1，β_2，$\cdots$，β_n，有

$$
\left|\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\nu\right|\leqslant\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2. \tag{1}
$$

证法一 读者可用归纳法验证下述 Lagrange 等式

$$
\left|\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\nu\right|^2=\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2-\sum_{1\leqslant\mu<\nu\leqslant n}|\alpha_\mu\overline{\beta_\nu}-\alpha_\nu\overline{\beta_\mu}|. \tag{2}
$$

立即得到所要的 Cauchy 不等式。

证法二 对任意一个复数 λ，由

$|\alpha_\nu - \lambda\beta_\nu|^2 = |\alpha_\nu|^2 + |\lambda|^2|\beta_\nu|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\alpha_\nu\overline{\beta_\nu})$，可得

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu - \lambda\overline{\beta_\nu}|^2 = \sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2 + |\lambda|^2\sum_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2 - 2\mathrm{Re}(\bar{\lambda}\sum_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\nu). \tag{3}$$

不妨设 $\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2 > 0$(不然的话，即每个 $\beta_\nu = 0$ 不等式(1)自动成立)且不论 λ 取何数(3)式左端总是非负的。因此，要使右端尽可能地小，只要令

$$\lambda = \frac{\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\nu}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2},$$

代入(3 式中就得

$$\sum_{\nu=1}^{n}|\alpha_\nu|^2 - \frac{|\sum\limits_{\nu=1}^{n}\alpha_\nu\beta_\nu|^2}{\sum\limits_{\nu=1}^{n}|\beta_\nu|^2} \geqslant 0.$$

这就证明了(1)式。

最后，我们从等式(3)又可推知，(1)式成为等式当且仅当所有的 α_ν 与 $\overline{\beta_\nu}$ 成定比时实现。

Cauchy 不等式在分析学与代数学中都具有重要意义。

习 题 1-1

1. 设 z_1，z_2 是复数，下面的等式中哪些是正确的？

1) $\dfrac{\mathrm{Re}(z_1)}{\mathrm{Re}(z_2)} = \mathrm{Re}\left(\dfrac{z_1}{z_2}\right)$； 2) $\dfrac{1}{z_1} + \dfrac{1}{\bar{z}_1} = 2\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z_1}\right)$；

3) $\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right) = -\mathrm{Im}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_1}\right)$； 4) $\mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{z_1\bar{z}_2}\right) = \mathrm{Re}\left(\dfrac{1}{\bar{z}_1 z_2}\right)$；