高等学校
工科电子类
规划教材

组合数学

郁松年　邱伟德

国防工业出版社

组合数学

图书在版编目(CIP)数据

组合数学/郁松年,邱伟德编．一北京:国防工业出版社,1995.10

ISBN 7-118-01434-6

Ⅰ．组… Ⅱ．①郁… ②邱… Ⅲ．组合数学 Ⅳ．0157

中国版本图书馆 CIP 数据核字(95)第 02546 号

国防工业出版社出版发行

(北京市海淀区紫竹院南路 23 号)

(邮政编码 100044)

国防工业出版社印刷厂印刷

新华书店经售

*

开本 787×1092 1/16 印张 14¼ 325 千字

1995 年10月第 1 版 1995 年10月北京第 1 次印刷

印数:1-2000 册 定价:8.15 元

出 版 说 明

根据国务院关于高等学校教材工作的规定，我们承担了全国高等学校和中等专业学校工科电子类专业教材的编审、出版的组织工作。由于各有关院校及参与编审工作的广大教师共同努力，有关出版社的紧密配合，从 1978～1990 年，已编审、出版了三个轮次教材，及时供给高等学校和中等专业学校教学使用。

为了使工科电子类专业教材能更好地适应"三个面向"的需要，贯彻国家教委《高等教育"八五"期间教材建设规划纲要》的精神，"以全面提高教材质量水平为中心，保证重点教材，保持教材相对稳定，适当扩大教材品种，逐步完善教材配套"，作为"八五"期间工科电子类专业教材建设工作的指导思想，组织我公司所属的八个高等学校教材编审委员会和四个中等专业学校专业教学指导委员会，在总结前三轮教材工作的基础上，根据教育形势的发展和教学改革的需要，制订了 1991～1995 年的"八五"(第四轮)教材编审出版规划。列入规划的，以主要专业主干课程教材及其辅助教材为主的教材约 300 余种。这批教材的评选推荐和编审工作，由各编委会或教学指导委员会组织进行。

这批教材的书稿，其一是从通过教学实践、师生反应较好的讲义中经院校推荐，由编审委员会(小组)评选择优产生出来的，其二是在认真遴选主编人的条件下进行约编的，其三是经过质量调查在前几轮组织编写出版的教材中修编的。广大编审者、各编审委员会(小组)、教学指导委员会和有关出版社，为保证教材的出版和提高教材的质量，作出了不懈的努力。

限于水平和经验，这批教材的编审、出版工作还可能有缺点和不足之处，希望使用教材的单位，广大教师和同学积极提出批评和建议，共同为不断提高工科电子类专业教材的质量而努力。

电子工业部教材办公室

前　言

本教材系按电子工业部的工科电子类专业教材1991～1995年编审出版规划，由计算机教材编审委员会计算机编审小组征稿并推荐出版。责任编委为李学干。

本教材由上海工业大学郁松年、邱伟德编写，同济大学邵嘉裕主审。

本课程的参考学时数为80学时，其主要内容为组合计数理论和组合算法与分析，这也是组合数学中最基本的研究方向。第一章至第六章的内容包括母函数，递归关系，容斥原理，Pólya计数定理和Ramsey理论等等，使学生掌握有关数学工具及其应用，着力培养将组合问题表达为数学模型以及组合计算的能力。

算法的研究是计算机科学的核心，组合算法是算法的重要部分，非数值计算在当今已渗透到了各个分支中，在本书中用相对较大的篇幅讨论组合算法，对算法的复杂度分析给出许多例子。培养学生算法步数估算的能力，这也是本书结合计算机专业的一个特点。

阅读本书不需要任何组合数学方面的预备知识，也不需要其它专门的数学知识，只在Pólya定理中用到一些群的知识，我们都详尽列出来了。本书配有大量的例子、图示，每章后都配有习题，供学生演算。本书适合于计算机科学和工程专业本科生及研究生作组合数学课的教材。也可用作工程技术人员自学教材或参考书。

本教材由郁松年编写第二、三、四、五、六章，由邱伟德编写第一、七、八、九章。本书写作过程中，得到了邵嘉裕教授、张吉锋教授的热情鼓励和帮助，这里表示诚挚的感谢。由于编者水平有限，书中难免还存在一些缺点和错误，殷切希望广大读者批评指正。

郁松年　邱伟德

目　录

第一章　基本计数原理

1.1　乘法原理与加法原理

有一所中学要给优秀高中毕业生发奖，奖品是一本英汉词典和一本英文参考书，有 5 种词典和 3 种参考书可选择，奖品种数有 15 种。该校给优秀初中毕业生发奖，奖品是一本词典或一本书。奖品种数有 8 种。这个例子分别说明计数的乘法原理和加法原理。

乘法原理：一个事件 X 以 m 种方式出现，另一个事件 Y 与事件 X 无关，以 n 种方式出现，这两个事件 X 和 Y 以 $m\times n$ 种方式出现。

例 1.1.1　有 4 本书 A,B,C,D 要放在书架上，书架上有 4 个位置，问这 4 本书放在书架上共有多少种方式？

解　书架上有 4 个位置，放在第 1 位置上书有 4 种选择，当在第 1 位置上放了书后，还剩下 3 本书。放在第 2 位置上的书有 3 种选择，放在第 3 位置上的书有 2 种选择，剩下的第 4 本书只能放在第 4 位置上，由乘法原理，书放在书架上方式共有 $4\times3\times2\times1=24$（种）。

加法原理：一个事件 X 以 m 种方式出现，另一个事件 Y 与 X 独立，且以几种方式出现，事件 X 或 Y 以 $(m+n)$ 种方式出现。

使用加法原理，事件 X 与事件 Y 的出现彼此必须是独立的。例如在 $1,2,\cdots,10$ 中找出 1 个偶数有 5 种选择，找出 1 个质数有 4 种选择。要找出 1 个偶数或者质数就不是 $4+5=9$ 种选择，因为 2 既是偶数又是质数。选出的方式应是 8 种。加法原理可以推广到有限多个不同的事件上。

例 1.1.2　从城市 A 到城市 B 的长途汽车一天有 4 个班次，从城市 A 到城市 C 的长途汽车一天有 2 个班次。乘长途汽车离开城市 A 到城市 B 或 C 一天共有 $4+2=6$ 个班次。

例 1.1.3　设有 5 册英文书，7 册法文书和 9 册德文书，从中选择两册不同语种的书籍有 $5\times7+5\times9+7\times9=143$ 种方法。从 21 册书籍中选择两册，则有 $(21\times20)/2=210$ 种方法。

1.2　排列和组合

把 n 个不同元素排在一行上，这样一行称为元素的一个排列。例如 3 个球 a,b,c 共有 6 种排列：abc,acb,bac,bca,cab,cba。在 n 个不同元素中选取 $r(r\leqslant n)$ 个元素，把 r 个元素排成一行称为 r-排列，当 $r<n$，称为选排列；当 $r=n$，称为全排列，$P(n,r)$ 表示 n 个元素中全部 r-排列的数目。

把 1 个元素放在第 1 位置上有几种方式，把余下的 $(n-1)$ 个元素中 1 个放入第 2 位

置有$(n-1)$种方式，……，把余下的$(n-r+1)$个元素中 1 个放入最后位置有$(n-r+1)$种方式。由乘法原理，

$$P(n,r)=n\cdot(n-1)\cdots(n-r+1)=\frac{n!}{(n-r)!}$$

例 1.2.1 问有多少个数字不重复，不取零而且 4 和 5 不相邻的 5 位数？

解 先求数字不重复，不取零的 5 位数，这类数是$\{1,2,3,4,5,6,7,8,9\}$上的 5-排列，一共有$P(9,5)$个。4 和 5 在 5 位数中相邻有二种情形：45，54。先把 45 看成一个整体，在 5 位数中可能出现在第 1，2 位；第 2，3 位，……，第 4，5 位上，一共有 4 种方式。其余 3 个数字从$\{1,2,3,6,7,8,9\}$中选取，有$P(7,3)$种方式，这样 45 出现在 5 位数中有$4\times P(7,3)=840$种。54 出现在 5 位数中也有 840 种方式。所以，答案为$P(9,5)-2\times4\times P(7,3)=13440$(个)5 位数。

在 n 个有区别的球中任取 $r(r\leqslant n)$ 个放入 r 个有标志的盒子中去，每盒 1 球。问有多少种方式？

把 r 个盒子排成一行，r 个球放入盒子里对应 r 个球的 1 个排列，因此，共有 $P(n,r)$ 种方式。

例 1.2.2 (圆形排列)n 个人围着圆桌就坐，问共有多少种方式。

解 n 个人围着圆桌就坐是一种圆形排列。坐定之后按顺时针(或逆时针)方向移动 1 个位置，2 个位置，直至 n 个位置都认为同一个圆形排列，它们的相邻关系没有改变。因此，圆形排列数是

$$\frac{P(n,n)}{n}=(n-1)!$$

也可以从 n 个人中选出 1 人，固定他(她)的位置。$n-1$ 个人按排在 $n-1$ 个位置上，有$(n-1)!$ 种方式。

例 1.2.3 10 只不同的黑球和 5 只不同的白球排成一行，要求两只白球不排在一起，问有多少种排法？若按这要求把球围成圆圈，问有多少种围法？

解 先把 10 只黑球排成一行，两只黑球间留 1 个空位，第 1 只黑球前和最后 1 只黑球后各留 1 个空位。一共有 11 个空位，把 5 只不同的白球放在 11 个空位上，有 $P(11,5)$ 种方式。而 10 只不同黑球排成一行有 10! 种排法，根据乘法原理，一共有 $P(11,5)\times10!$ 种排法。

把 10 只黑球围成一圆圈，两只黑球之间留有 1 个空位。把 5 只不同的白球插在 10 个空位上，有 $P(10,5)$ 种方式。10 只不同黑球围成一圆圈有 9! 种方式，因此一共有 $P(10,5)\times9!$ 种方式。

从 n 个不同的元素中不允许重复地选取 r 个元素，称为 1 个 r-组合。不考虑选取元素的次序，只要取出 r 个元素相同，认为是同一个 r-组合。从 n 个不同元素中选取的 r-组合数记为 $C(n,r)$，或者$\binom{n}{r}$，C_n^r。

为得到 n 个不同元素的 r-排列，可先给出 n 个元素的 r-组合，然后对 r 个元素作排列，由乘法原理

$$P(n,r)=C(n,r)\times P(r,r)$$

因此
$$C(n,r)=\frac{P(n,r)}{P(r,r)}=\frac{P(n,r)}{r!}=\frac{n!}{r!\ (n-r)!}$$

从 n 个不同元素中选取 r 个元素，也就留下 $(n-r)$ 个元素，因此，r-组合数与 $(n-r)$-组合数相同，即

$$C(n,r)=C(n,n-r)$$

把 r 个相同的球放到 n 个不同盒子中相当于从 n 个不同盒子中选取 r 个盒子，球放入盒子的方式数是 $C(n,r)$。

例 1.2.4 在一个凸 $n(n\geqslant 3)$ 边形 M 内部假设设有 3 条对角线共点，求 M 内对角线交点的个数。

解 设 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 是凸 n 边形 M 的顶点，在 n 个顶点中任选 4 个顶点 $M_{i_1},M_{i_2},M_{i_3},M_{i_4},i_1<i_2<i_3<i_4$，对角线 $M_{i_1}M_{i_3}$ 与对角线 $M_{i_2}M_{i_4}$ 交点在 M 内。在 M 内任一对角线的交点也只能是两条对角线的交点，对应着 M 的 4 个顶点。因此，M 内的交点数与 $M_1,M_2,\cdots,M_n$ 中选取 4 个顶点的组合数相等，交点数为 $C(n,4)$。

例 1.2.5 （路径问题）在某城市一个区内，有 $(m+1)$ 条横街，$(n+1)$ 条竖街，它们把这区分割成矩形小区，如图 1.1 所示。一个人 W 从 A 点走到 B 点，W 只能向东，向北走，问一共有多少条路线？

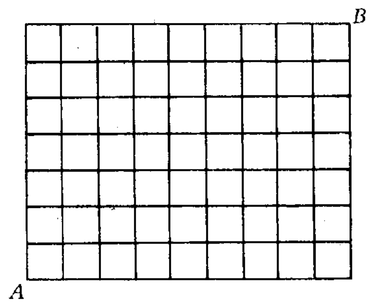

图 1.1

解 用 E 表示 W 向东走过 1 个小区，N 表示 W 向北走过 1 个小区。W 要向东走过 m 个小区，向北走过 n 个小区才能从 A 到 B。每条路线对应着 m 个 E 和 n 个 N 组成的序列，问题归到有多少个这样不同的序列，序列数与 $(m+n)$ 个不同盒子内放 m 个相同球的方式数相等，线路数是 $C(m+n,m)$。

例 1.2.6 某超级市场设 5 个出口处，每出口处只能一位顾客结算付钱。现有 11 位顾客要结算付钱离开，问这 11 位顾客离开出口处有多少种方式？

解 先任给一个 11 位顾客的全排列，在这排列中插入 4 个标记。第 1 个标记前，第 4 个标记后以及两个标记之间各表示 1 个出口处。全排列被标记切成 5 段，每段的子排列对应这部分顾客离开同一出口处的次序。顾客和标记一共 15 个位置，顾客是不同的，标记是相同的。因而设标记的方式数是 $C(15,4)$，顾客的全排列数是 $11!$，顾客离开出口处的方式数是 $C(15,4)\cdot 11!$。

例 1.2.7 设 $S=\{1,2,\cdots,n\}$，数 k 与数 $(k+1)$ 称为相邻。在 S 中选取 k 个数，要求任两个数都不相邻，问有多少种选法？

解 在 S 中任取 k 个数，依数的大小排成序列 $a_1,a_2,\cdots,a_k$。因两相邻项的差至少为 2，有 $1\leqslant a_1\leqslant a_2-1<a_3-2<\cdots<a_k-(k-1)\leqslant n-(k-1)$。设 $b_i=a_i-(i-1),1\leqslant i\leqslant k$。$b_1,b_2,\cdots,b_k$ 是 $\{1,2,\cdots,n-(k-1)\}$ 中 k 个不相同的数。对于 $\{1,2,\cdots,n-(k-1)\}$ 中 k 个不相同的数 $b_1,b_2,\cdots,b_k,b_1<b_2<b_3<\cdots<b_k$，则 $b_1,b_2+1,b_3+2,\cdots,b_k+(k-1)$ 在 S 中，而且任两个数都不相邻。要求选取的方式数也就是在 $\{1,2,\cdots,n-(k-1)\}$ 中选取 k 个不同数的方式数，即 $C(n-(k-1),k)$。

例 1.2.8 r 个相同的球放到 n 个不同的盒子里，$r\geqslant n$，而且无一盒为空，问有多少种

放球的方式？

解 把 r 个相同的球排成一行，两球之间留有一空档，一共有 $(r-1)$ 个空档，这 $(r-1)$ 个不同的空档中选出 $(n-1)$ 个，每个选出的空档处插入 1 个档板，插入档板有 $C(r-1,n-1)$ 种方式。第 1 个档板前，两个档板之间及最后 1 个档板后各对应 1 只盒子，球放入盒子的方式数与档板插入的方式数相等，因此，放球的方式数是 $C(r-1,n-1)$。

1.3 重复排列和重复组合

从 n 个不同元素中允许重复地选取 r 个元素排成一行，称为 r-重复排列。从 n 个不同元素中选取 r 个元素，允许元素重复出现，不考虑元素间的次序，称为 r-重复组合。

在一个确定的重复排列（或重复组合）中，任一元素 a 出现次数称为 a 在该重复排列（或重复组合）中的重复度。

从 n 个不同元素中重复度无限制的 r-重复排列个数是 n^r。因为重复度无限制，在 r-重复排列中任一位置上元素可有 n 种选择，由乘法原理，总共有 $\underbrace{n\times n\times\cdots\times n}_{r\text{个}}=n^r$ 个 r-重复排列。

设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$ 是 n 元集，$a_1,a_2,\cdots,a_n$ 的重复度依次为 $k_1,k_2,\cdots,k_n$ 的重复排列称为 A 的一个 $(k_1,k_2,\cdots,k_n)$-重复排列。也可以看成一个 k 个元素的全排列，$k=k_1+k_2+\cdots+k_n$，其中 k_1 个 a_1，k_2 个 a_2，$\cdots$，k_n 个 a_n。$(k_1,k_2,\cdots,k_n)$-重复排列个数为

$$\frac{(k_1+k_2+\cdots+k_n)!}{k_1!k_2!\cdots k_n!} \tag{1.3.1}$$

本节先举几个例子，在第 2 章母函数中再详细讨论。

例 1.3.1 有 2 只红球，2 只蓝球，3 只黄球，4 只白球，把这 11 只球排成一行，问有多少种排法？

解 先把 11 只球看成不相同球，全排列数是 11!，然后把红（蓝，黄，白）球看成相同的，这样排列对应着 2! 2! 3! 4! 个各不相同的 11 只球排列，因此有

$$\frac{11!}{2!2!3!4!}=69300$$

种排法。

这问题还可以这样来求，在一行上有 11 个位置，从中选 2 个位置放红球，有 $C(11,2)$ 种方式。余下的 9 个位置中放 2 只蓝球，有 $C(9,2)$ 种方式。放 3 只黄球的方式是 $C(7,3)$，放白球的只能是 $C(4,4)=1$ 种方式。根据乘法原理，排法数为

$$\begin{aligned}&C(11,2)\times C(9,2)\times C(7,3)\times C(4,4)\\=&\frac{11!}{9!2!}\times\frac{9!}{7!2!}\times\frac{7!}{4!3!}\times\frac{4!}{0!4!}=\frac{11!}{2!2!3!4!}\end{aligned}$$

例 1.3.2 证明 $(k!)!$ 能被 $(k!)^{k-1}$ 整除。

证 设有 $k!$ 个元素，元素分成 $(k-1)!$ 类，每类元素恰含 k 个，同类中元素看成相同的，$k!$ 个元素的全排列数为

$$\frac{(k!)!}{\underbrace{k!k!\cdots k!}_{(k-1)!\text{个}}}=\frac{(k!)!}{(k!)^{(k-1)!}}$$

因排列数一定是正整数，故$(k!)^{(k-1)!}$整除$(k!)!$。

例 1.3.3 在线性齐次 k 项式的 n 次方幂

$$(x_1+x_2+\cdots+x_k)^n \tag{1.3.2A}$$

中，求 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 的系数，其中 $n_1+n_2+\cdots+n_k=n$。

解 (1.3.2A)式是 n 个因式$(x_1+x_2+\cdots+x_k)$的连乘积。其中选出 n_1 个因式，这 n_1 个因式中 x_1 参与乘积 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 中，在$(n-n_1)$个因式中选出 n_2 个因式，这 n_2 个因式中 x_2 参与乘积 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 中，……，最后 n_k 个因式中 x_k 参与乘积 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 中。由乘法原理，共有

$$C(n,n_1)\times C(n-n_1,n_2)\times\cdots\times C(n-n_1-n_2-\cdots-n_{k-1},n_k)=\frac{n!}{n_1!n_2!\cdots n_k!}$$

种方式，这也就是 $x_1^{n_1}x_2^{n_2}\cdots x_k^{n_k}$ 的系数。

从 n 个不同元素中允许重复地选取 r 个元素的组合数是 $C(n+r-1,r)$。现证明这个结论。

n 个不同元素就取 $1,2,\cdots,n$。设 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是重复组合，并且排成递增序列 $a_1\leqslant a_2\leqslant\cdots\leqslant a_r$。令 $b_i=a_i+(i-1)$，有 $b_1<b_2<\cdots<b_r$。因而 $b_1,b_2,\cdots,b_r$ 是$[1,n+r-1]$中元素不重复的组合。而对于$[1,n+r-1]$中任一元素不重复 r-组合，设其递增序列为 $b_1,b_2,\cdots,b_r$，取 $a_i=b_i-i+1$，则 $a_1,a_2,\cdots,a_r$ 是$[1,n]$中一个 r-重复组合。这样建立一一对应关系，$\{1,2,\cdots,n\}$上 r-重复组合数等于$\{1,2,\cdots,n-r+1\}$上 r-组合数，即 $C(n+r-1,r)$。

把 r 只相同的球放入 n 个不同标志的盒子里，每盒内球数不加限制。求球放入盒子里的方式数。这是重复组合问题。一球放入一盒子内相当于取该盒子的标志，由于盒内球数不加限制，相当于盒子的标志可重复取。因此，球放入盒子里方式数是 $C(n+r-1,r)$。

例 1.3.4 有 r 只相同球放到 n 个不同的盒子中，每个盒子至少包含 q 只球，放球数目不加限制，已知 $r\geqslant nq$，问有多少种放球方式。

解 已知 $r\geqslant nq$，先在每个盒子中放 q 只球，其余$(r-nq)$只球放到 n 个不同盒子中。每个盒子中放的球数不加限制，有 $C(n+(r-nq)-1,r-nq)=C(n+r-nq-1,n-1)$种方式。

例 1.3.5 求下列系数为 1 的线性方程式的非负整数解的个数。

$$x_1+x_2+\cdots+x_n=r \tag{1.3.2B}$$

其中，n,r 都是正整数。

解 方程式的解由$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$表示。设有 n 个不同的元素，从中取一个 r-重复组合。设 x_i 是组合中第 i 个元素出现的次数，$1\leqslant i\leqslant n$，则 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$，得到一个非负整数解。方程式的非负整数解也对应一个 r-重复组合。x_i 是第 i 个元素在组合中出现次数，$1\leqslant i\leqslant n$。因此，非负整数解的个数就是 r-重复组合数 $C(n+r-1,r)$。

设 $r\geqslant n$，设$(x_1,x_2,\cdots,x_n)$是方程(1.3.2)的正整数解，则$(x_1-1,x_2-1,\cdots,x_n-1)$是方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r-n$ 的非负整数解。由于这种一一对应的关系，方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的正整数解的个数为

$$C(n+(r-n)-1,r-n)=C(r-1,r-n)=C(r-1,(r-1)-(r-n))=C(r-1,n-1)$$

例 1.3.6 硬币有一分，二分，五分，壹角，伍角，壹元 6 种，每种硬币可重复选取，要选出 5 枚硬币共有多少种选法？

解 这是从 6 个不同元素中求 5-重复组合数，有 $C(6+5-1,5)=C(10,5)=252$ 种选法。

1.4 组合恒等式与二项式系数

本节讨论有关组合数和排列数的一些等式。

等式 1 $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$

从 n 个元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 中取 r 个元素的组合。取某特定元素 a_1。组合分成两类，一类组合不包含 a_1，这要从除 a_1 外的 $(n-1)$ 个元素中取出 r 个元素，组合数为 $C(n-1,r)$。另一类组合包含 a_1，有了 a_1，只要从 $(n-1)$ 个元素中取 $(r-1)$ 个元素，组合数为 $C(n-1,r-1)$，依加法原理，等式 1 成立。

等式 2 $C(n,l)\times C(l,r)=C(n,r)\times C(n-r,l-r),(l\geqslant r)$

从 n 个元素中取 l 个元素的组合数是 $C(n,l)$。再从 l 个元素中取出 r 个元素，共有 $C(n,l)\times C(l,r)$ 种组合数。但是，r 个元素可取自两个不同的 l-组合，故 r 个元素的组合会被重复计算。当固定 r 元素后，从 n 个元素中取含这 r 元素的 l-组合数等于从 $(n-r)$ 个元素中取 $(l-r)$ 个元素的组合数。故含有相同 r 个元素的 l-组合数为 $C(n-r,l-r)$。由 $C(n,l)\times C(l,r)$ 除以重复数 $C(n-r,l-r)$ 就是 $C(n,r)$。因此，等式 2 成立。

等式 3 $C(n+r+1,r)=C(n+r,r)+C(n+r-1,r-1)+C(n+r-2,r-2)+\cdots+C(n+1,1)+C(n,0)$

从 $\{a_1,a_2,\cdots,a_{n+r+1}\}$ 中取 r 个元素的组合有下列 $(r+1)$ 种情形：(1)组合中不含 a_1，只能从除 a_1 外的 $(n+r)$ 个元素中取 r 个元素，组合数为 $C(n+r,r)$；(2)组合中含 a_1 但不含 a_2，要从除 a_2 外的 $(n+r-1)$ 个元素中取 $(r-1)$ 个元素，其组合数为 $C(n+r-1,r-1)$，$\cdots(i)$组合数中含 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$，但不含 a_i，因 $a_1,a_2,\cdots,a_{i-1}$ 已在组合中，还要除去 a_i，从 $(n+r+1-i)$ 元素中取 $(r-(i-1))$ 个元素，其组合数为 $C(n+r-i+1,r-i+1),\cdots,i=3,\cdots,r-1$。$(r)$组合中已含 $a_1,a_2,\cdots,a_r$，组合已确定，只有 $\{a_1,a_2,\cdots,a_r\}$ 一种情形，$C(n,0)=1$。由加法原理，等式 3 成立。

等式 4 $\binom{m+n}{r}=\binom{m}{0}\binom{n}{r}+\binom{m}{1}\binom{n}{r-1}+\cdots+\binom{m}{r}\binom{n}{0},r\leqslant\min(m,n)$

这等式的组合解释十分清楚，从 m 只红球和 n 只蓝球中取 r 只球的组合数，等于取 0 只红球和 r 只蓝球，1 只红球和 $(r-1)$ 只蓝球，……，r 只红球和 0 只蓝球的组合数的总和。这个等式称为 Vandermende 等式。

等式 5 $\binom{m+n}{m}=\binom{m}{0}\binom{n}{0}+\binom{m}{1}\binom{n}{1}+\cdots+\binom{m}{m}\binom{n}{m},m\leqslant n$

设有 m 只红球，n 只蓝球，而且每只球都不相同。由 i 只红球和 i 只蓝球组成 1 个组合，还有 $(m-i)$ 只红球没有选入，而 i 只蓝球和这 $(m-i)$ 只红球也构成 1 个组合。这样，在这两类组合间可建立一一对应。因而两类组合数相等。$(m-i)$ 只红球和 i 只蓝球的组合数也是 i 只红球和 i 只蓝球的组合数。于是

$$\binom{m+n}{m}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{m-i}\binom{n}{i}=\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}\binom{n}{i}$$

等式 6 $P(n,r)=rP(n-1,r-1)+P(n-1,r),n\geqslant r\geqslant 2$

设有 n 个不同元素，其中取定一个元素，记为 a，r 个元素的排列分为两类。一类排列包含元素 a，a 在排列中有 r 个位置可选择，除 a 外 $(r-1)$ 个元素的排列数为 $P(n-1,r-1)$，故这类排列数为 $rP(n-1,r-1)$。另一类排列不含 a，排列数为 $P(n-1,r)$，由加法原理，等式 6 成立。

等式 7　$P(n,r)=n\cdot P(n-1,r-1),n\geqslant r\geqslant 2$

在 n 个不同元素中取 r 个元素的排列，n 个元素中任一个都可以作为排列的第 1 个元素，有 n 种选法。第 1 个元素取定之后，其余 $(r-1)$ 个元素排列从 $(n-1)$ 个元素中选取。由乘法原理得等式 7。

公式 $(1+x)^n=\sum\limits_{i=0}^{n}\binom{n}{i}x^i$ 称为牛顿二项式定理。组合数 $\binom{n}{r}$ 称为二项式系数。

在二项式定理中，令 $x=1$，就得到等式 8：

等式 8　$\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}=2^n$

令 $x=-1$，得到等式 9：

等式 9　$\binom{n}{0}-\binom{n}{1}+\binom{n}{2}-\binom{n}{3}+\cdots+(-1)^i\binom{n}{i}+\cdots+(-1)^n\binom{n}{n}=0$

从这个等式可知，在 n 个不同的元素中取偶数个元素的方式数等于取奇数个元素的方式数。

等式 10　$\binom{n}{0}^2+\binom{n}{1}^2+\cdots+\binom{n}{i}^2+\cdots+\binom{n}{n}^2=\binom{2n}{n}$

因为

$$(1+x)^n\cdot(1+x^{-1})^n=(1+x)^n(1+x)^nx^{-n}=x^{-n}\cdot(1+x)^{2n}$$

该式的常数项是 $\binom{2n}{n}$。而等式 10 的左边式子是 $(1+x)^n(1+x^{-1})^n$ 的常数项。因此，等式 10 成立。其实等式 10 是等式 5 在 $m=n$ 的特例。

等式 11　$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}+3\binom{n}{3}+\cdots+i\binom{n}{i}+\cdots+n\binom{n}{n}=n2^{n-1}$

对等式

$$(1+x)^n=\binom{n}{0}+\binom{n}{1}x+\binom{n}{2}x^2+\cdots+\binom{n}{i}x^i+\cdots+\binom{n}{n}\cdot x^n$$

两边求导数，有

$$\binom{n}{1}+2\binom{n}{2}x+\cdots+i\binom{n}{i}x^{i-1}+\cdots+n\binom{n}{n}x^{n-1}=n(1+x)^{n-1}$$

令 $x=1$ 可求得等式 11。

习　　题

1. 在 1000 到 9999 之间有多少个每位数字全不相同并由奇数组成的整数？

2. 在一个圆周上任给 n 个顶点，问可以构成多少条直线？假设这些直线在圆内的线段有 3 条交于 1 点，问在圆内线段之间的交点共有多少？

3. 问有多少个整数满足以下条件：(1)大于 53000；(2)每位数字各不相同；(3)数字 0,9 不出现。

4. 现有 12 个人坐在一排上看电影,要求其中某两个人不坐在一起,问有多少种坐的方式?

5. 有 11 本不同的书,其中 5 本是数学书,6 本是物理书,把这 11 本书放在书架的一层上,各个要求是:(1)没有限制;(2)数学书放在一起,物理书放在一起;(3)数学书放在一起,物理书不放在一起;(4)数学书和物理书交错地放,数学书不相邻,物理书也不相邻。问书放在书架上各有多少种放法?

6. 整数 1,2,3,…,20 构成的全排列共有 20!,问其中偶数不相邻的排列有多少个?

7. 在国际象棋的棋盘(8×8 棋盘)上放 4 只白色棋子和 4 只黑色棋子,问有多少种放法使得任 2 只棋子不在同一行也不在同一列上?

8. 5 个男学生和 5 个女学生围着圆桌聚餐,任两个男生不坐在一起,问共有多少种坐法?

9. 在 1 到 10000 中有多少个数字的和等于 5 的整数?有多少个数字的和小于 5 的整数?

10. 某会议室有两排座位,每排 12 个座位。有 20 人就坐,其中 7 人要坐在前排,5 人要坐在后排,问有多少种就座方式?

11. 有红球,蓝球,黄球各 3 只排成一行,要求红球不相邻,问有多少种排列方式?蓝球也不相邻有多少种?

12. 证明由 n 个 1 和 m 个 0 排成一行,且任两个 1 不相邻的排列数是 $C(m+1,n)$。

13. 证明(1)2^n 整除$(2n)!$ (2)$(n!)^{n+1}$整除$(n^2!)!$。

14. 设有 5 种颜色的球,第 i 种颜色的球有 a_i 个,分给 8 个小朋友,每个小朋友拿到球的数目不加限制(包括 0),问有多少种分配方法?

15. 两个十位数,若重排一个数的数字得到另一个数,称这两个数是等价的,问有多少个互不等价的十位数?

16. 使用等式 $C(n,r)=C(n-1,r)+C(n-1,r-1)$,证明:

$$C(n-1,m)=C(n,m)+C(n-1,m-1)+C(n-2,m-2)+\cdots+C(n-m,0)$$

作出组合解释。

17. 证明等式

$$1\times 1!+2\times 2!+3\times 3!+\cdots+n\times n!=(n+1)!-1$$

讨论等式的组合意义。

18. 证明

$$n\times C(n-1,r)=(r+1)\times C(n,r+1)$$

这个等式的组合意义是什么?

19. 证明

$$C(n,1)+2\times C(n,2)+3\times C(n,3)+\cdots+n\times C(n,n)=n\times 2^{n-1}$$

20. 考虑在字母表{0,1,2}上长度为 n 的字

(1)证明 0 在其中出现偶数次的字的个数是$(3^n+1)/2$;

(2)证明等式

$$\binom{n}{0}2^n+\binom{n}{2}2^{n-2}+\cdots+\binom{m}{n}2^{n-m}=\frac{3^n+1}{2}$$

若 n 是偶数,令 $m=n$;若 n 是奇数,令 $m=n-1$。

第二章　母　函　数

从形式上看，母函数很像幂级数，又称"生成函数"，或"发生函数"。在组合数学中，母函数的典型作用主要体现在组合计数方面，它是解决组合计数问题的强有力的工具之一。

当然，它的价值不仅限于计数，随着以后各章的相继展开，我们还会领略到它在其他方面的作用。

在正式引入母函数概念之前，先回顾和小结求解可重或不可重组合数的情形。

设任意元素集合 $A=\{K_1 \cdot a_1, K_2 \cdot a_2, \cdots, K_n \cdot a_n\}$，其中 $a_i, i=1,2,\cdots,n$，是 n 个不同元素，$K_i \cdot a_i$ 表示元素 a_i 有 K_i 个。通常问：从 A 中任意取出 r 个元素，共有多少种不同的组合方案？

情形 1　当 $K_1=K_2=\cdots=K_n=1$ 时，易知有 $\binom{n}{r}$ 种不可重组合方案。

情形 2　当 $K_1=K_2=\cdots=K_n=\infty$ 时，所求全部方案数等于方程 $x_1+x_2+\cdots+x_n=r$ 的全部非负整数解的个数，有 $\binom{r+n-1}{n-1}=\binom{n+r-1}{r}$ 种可重组合方案。

情形 3　当 $1<K_i<\infty$ 时，$i=1,2,\cdots,n$，方案数怎么计算？更明确地问，当 K_i 为任意正整数且至少存在一个 K_i，满足 $1<K_i<r$ 时，共有多少种不同可重组合方案？

2.1　引　　例

例 2.1.1　设有红、黄、蓝三种大小相同的球分别为 4 个，3 个和 2 个，从中任取 4 球，问：总共有多少种不同取法？

解　这是一个典型的可重组合球模型问题。

设　$A=\{4 \cdot a_1, 3 \cdot a_2, 2 \cdot a_3\}$，其中 a_1,a_2,a_3 表示三种不同颜色的球。引进函数

$$\begin{aligned} G(x) &= (x^0+x^1+x^2+x^3+x^4)\cdot(x^0+x^1+x^2+x^3)\cdot(x^0+x^1+x^2) \\ &= (1+x+x^2+x^3+x^4)\cdot(1+x+x^2+x^3)\cdot(1+x+x^2) \end{aligned}$$

如果将构成 $G(x)$ 的三个因式从左到右分别与球 a_1,a_2,a_3 对应，将每个因式的最高指数与该球的实有个数对应，则不难看出，$G(x)$ 展开式中 x^4 这一项的系数就是本例所要求的全部方案数。

事实上，每一项 $x^4=x^{i_1}\cdot x^{i_2}\cdot x^{i_3}$ 对应一种可能的取法，其中 x^{i_k} 表示球 a_k 在这种取法中贡献出了 i_k 个，$K=1,2,3$。全部方案数恰好等于方程 $i_1+i_2+i_3=4, i_1\leqslant 4, i_2\leqslant 3, i_3\leqslant 2$ 的全部非负整数解的个数。

方程 $i_1+i_2+i_3=4$ 的非负整数解的个数为

$$\binom{4+3-1}{4}=\binom{6}{4}=\binom{6}{2}=15$$

注意到约束条件 $i_1\leqslant 4$　$i_2\leqslant 3$　$i_3\leqslant 2$ 应减去

i_2 为 4 的情形　　$i_1=0\quad i_2=4\quad i_3=0$

i_3 为 3 的情形　　$\begin{cases} i_1=1\quad i_2=0\quad i_3=3 \\ i_1=0\quad i_2=1\quad i_3=3 \end{cases}$

i_3 为 4 的情形　　$i_1=0\quad i_2=0\quad i_3=4$

因此，本例实有方案数　　$15-4=11$

进一步，如果还想知道这 11 种取法的具体方案，可将 a_1,a_2,a_3 分别代入 $G(x)$ 的相应因式，并且展开

$$(1+a_1+a_1^2+a_1^3+a_1^4)\cdot(1+a_2+a_2^2+a_2^3)\cdot(1+a_3+a_3^2)$$

列出全部 4 次项：

$$a_2^3\cdot a_3\quad a_2^2\cdot a_3^2\quad a_1\cdot a_2^3\quad a_1\cdot a_2^2\cdot a_3\quad a_1\cdot a_2\cdot a_3^2\quad a_1^2\cdot a_2^2$$

$$a_1^2\cdot a_2\cdot a_3\quad a_1^2\cdot a_3^2\quad a_1^3\cdot a_2\quad a_1^3\cdot a_3\quad a_1^4$$

例 2.1.2　从上例的 A 中任取 4 球，若要求取出的方案里 a_1 至少出现一个，a_2 出现奇数个，a_3 出现偶数个(含 0)，问：一共有多少种不同取法？

解　引进函数 $G(x)=(x+x^2+x^3+x^4)\cdot(x+x^3)\cdot(1+x^2)$，而所要求的方案数即为 $G(x)$ 展开式中 x^4 项的系数。

例 2.1.3　设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，从 A 中任取 r 个元素作不可重组合，求方案数？

解　显然，方案数应该是函数

$$G(x)=(1+x)\cdot(1+x)\cdots(1+x)=(1+x)^n$$

展开式中 x^r 项的系数。而

$$(1+x)^n=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}\cdot x^i$$

中 x^r 项的系数恰为 $\binom{n}{r}$。

一般地，从集合 $A=\{K_1\cdot a_1,K_2\cdot a_2,\cdots,K_n\cdot a_n\}$ 中任取 r 个元素的全部方案数恰为函数

$$G(x)=(1+x+x^2+\cdots+x^{K_1})\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{K_2})\cdots\cdot(1+x+x^2+\cdots+x^{K_n})$$

展开式中 x^r 项的系数。

对于序列 $a_0,a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$，构造一个函数

$$G(x)=a_0+a_1\cdot x+a_2\cdot x^2+\cdots=\sum_{i=0}^{\infty}a_i\cdot x^i$$

称函数 $G(x)$ 是序列 $\{a_i\}$ 的母函数。

例如：函数 $G(x)=(1+x)^n$ 就是序列 $\left\{\binom{n}{i}\right\}$ 的母函数。

2.2　母函数与形式幂级数

在上一节介绍了母函数的概念。在某些情形下，为了能较好地利用母函数来确立并且解出一类组合计数问题的方案数，不仅应该注意母函数 $G(x)$ 与相应序列 $\{a_i\}$ 的对应关系，而且还要了解和掌握有关形式幂级数的一些运算性质。我们知道，幂级数有一个收敛问

题，而形式幂级数就是一类不必考虑其收敛问题的幂级数。下面是形式幂级数的两个最基本、最常用的运算性质。

设
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i \text{ 和 } \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i$$
则有

(1)和运算
$$\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i + \sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i = \sum_{i=0}^{\infty} (a_i + b_i) \cdot x^i$$

(2)积运算
$$\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i \cdot x^i\right) \cdot \left(\sum_{i=0}^{\infty} b_i \cdot x^i\right) = \sum_{i=0}^{\infty} c_i \cdot x^i$$

其中
$$c_i = \sum_{k=0}^{i} a_K \cdot b_{i-K}$$

需要说明一下"积运算"。设两个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$，仿照有限项和函数的乘积规则，可以获得所有可能的乘积项 $x_i \cdot y_j, i, j = 0, 1, \cdots$，并可以用多种方式将这些乘积排列起来。例如图 2.1 所示的"对角线法"就是其中的一种。

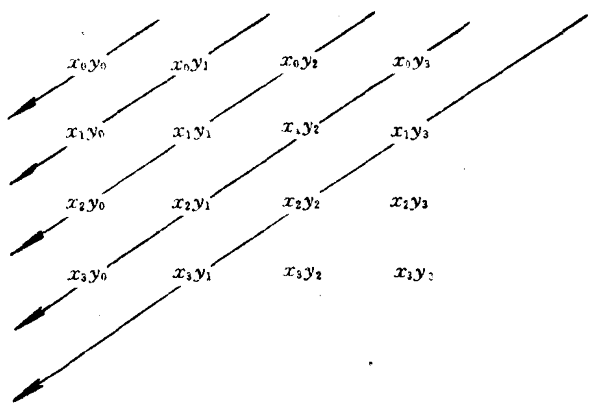

图 2.1

把处在同一条线上的乘积加起来作为一项，再将这些项依次相加组成一个级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$，其中 $z_n = \sum_{i=0}^{n} x_i \cdot y_{n-i}$，称级数 $\sum_{n=0}^{\infty} z_n$ 为两级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ 和 $\sum_{n=0}^{\infty} y_n$ 的 Cauchy(柯西)乘积，也叫对角线乘积。

例 2.2.1 设 $a_n = 1, b_n = (-1)^n$，则

$$\begin{aligned}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \cdot x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n \cdot x^n\right) &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right) \cdot \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot x^n\right) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} 1^i \cdot (-1)^{n-i}\right) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{n} (-1)^i\right) \cdot x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}\end{aligned}$$

另一方面