高等数学

高等学校教材 GAO DENG SHU XUE

上册

蔡高厅 叶宗泽 主编

天津大学出版社

高等学校教材

高等数学

上册

蔡高厅　叶宗泽　邱忠文　梁立华　编

天津大学出版社

DV50/09

内容提要

本版《高等数学》上、下册系高等工业院校适用的教材，是在本社历年《高等数学》版本的基础上重新组织编写而成的。全书参照高等工业学校“高等数学课程教学基本要求”，充分注意原版在使用过程中发现的不足，并吸取多年教学中积累的经验，达到结构进一步合理，论述更加通顺简明，内容愈臻完善。

该书上册包括函数、极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与矢量代数等7章；下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等5章。

（津）新登字012号

高等数学

（上册）

蔡高厅 等 编

*

天津大学出版社出版

（天津大学内）

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：15.125 字数：390千字

1994年4月第一版 1994年4月第一次印刷

印数：1—10 100

ISBN 7-5618-0603-5

O·60

定价：12.00元

前　言

为了适应我校教学的需要，多年来高等数学课程一直使用自编教材。经过多年的教学实践，积累了一定的教学和教材建设的经验；采用我校所编教材的有关院校同行也提出了一些宝贵意见。此次我们根据这些经验和意见，吸取教学改革的一些成果，并参照经国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，对教材和习题集进行重新编写，并对部分内容作了调整。为了便于教学，将空间解析几何与矢量代数安排在上册。

参加本书编写工作的有蔡高厅、叶宗泽、邱忠文及梁立华。限于编者水平，这次编写不免仍有疏误，恳请读者指正。

编　者

1993.10

目　　录

第一章　函　数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映，是微积分学的研究对象．中学里已学过初步的函数概念，本章我们从集合的映射这一角度出发来分析这个概念，并且简略介绍复合函数、反函数以及常用初等函数的一些主要性态．

§1　集合与集合的映射

一　集合

集合是数学的一个基本概念。通常把集合理解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体．例如，某班全体学生；一个书柜中的所有的书；正切为$\sqrt{3}$的所有的角等等，都是集合．组成集合的个体叫做这个集合的元素．所谓“给出了一个集合”就是随意考虑一个对象，必可确定它是不是这个集合的元素．集合常用斜体大写字母A，B，C，…等表示．元素用小写字母a，b，c，x，t，…等表示．如果a是集合A的元素，就记为：$a\in A$，读作“a属于A”．否则，记为：$a\notin A$，读作“a不属于A”．

不含任何元素的集合叫做空集合．空集合用记号ϕ表示．

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示．例如，由元素a_1，a_2，…，a_n组成的集合A，可记作

$$A=\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用以下记号表示：设M是具有某种特性的元素x所组成的集合，就记作

$$M=\{x\mid x\text{所具有的特性}\}.$$

例如集合

$$E=\{\text{点}(x,y)\mid x,\ y\text{为实数},\ x^2+y^2\leqslant 1\},$$

表示E是由平面上这样的点所组成：它的每个点位于中心在原点的单位圆内，或在圆周上.

下面列出几个有关集合的定义.

定义 已给两个集合A与B. 如果A的每一个元素都是B的元素，则称A是B的子集，记为$A\subseteq B$，或$B\supseteq A$，读作"A含于B"或"B包含A". 如果集合A是集合B的子集，而B中至少有一个元素不属于A，则称A是B的真子集，记为$A\subset B$，或$B\supset A$.

由定义可知，显然有$A\subseteq A$，$\phi\subseteq A$，即任何一个集合是它自己的子集，空集是任一集合A的子集.

定义 设有集合A与B，如果$A\supseteq B$，$B\supseteq A$，则称A与B相等，记作$A=B$.

定义 由集合A的一切元素与集合B的一切元素所组成的集合叫做A与B的并，记为$A\cup B$，即

$$A\cup B=\{x\mid x\in A\text{或}x\in B\}.$$

定义 由属于集合A又属于集合B的一切元素组成的集合叫做A与B的交，记为$A\cap B$，即

$$A\cap B=\{x\mid x\in A\text{且}x\in B\}.$$

定义 由属于集合A但不属于集合B的一切元素组成的集合叫作A与B的差，记为$A\setminus B$，即

$$A\setminus B=\{x\mid x\in A\text{且}x\notin B\}.$$

如果所讨论的集合都是某一集合U的子集，则称U为全集.

定义 如果A是全集U的子集，则U中不属于A的元素所组成的集合，叫做A的补集（或余集），记为$\overline{A}$，即

$$\overline{A}=U\setminus A.$$

二 集合的映射

定义 设有两个集合A与B，f表示某种确定的对应规律，使

得对每一个元素 $x \in A$，通过 f 都有唯一的元素 $y \in B$ 与之对应，则称 f 是由 A 到 B 的映射，记为

$$x \xrightarrow{f} y \text{或} f(x)=y.$$

y 叫做 x（在映射 f 下）的象，而 x 叫做 y（在映射 f 下）的原象.

由 A 到 B 的映射 f 也常记为

$$A \xrightarrow{f} B \text{或} f: A \to B.$$

A 叫做 f 的定义域. $B_f=\{y \mid y=f(x),\ x \in A\}$ 叫做 f 的值域. 显然 $B_f \subseteq B$.

例 1 设 A、B 分别表示某足球队全体队员及他们的号码所成的集合，f 表示 A 中每一个元素（队员）取他的号码的对应规律，则 f 就是一个由 A 到 B 的映射.

例 2 设 T 表示平面上所有三角形的集合，记号 R 表示全体实数所组成的集合，f 表示对于 T 中每一个元素（三角形）取它的面积的对应规律，则 f 便是一个由 T 到 R 的映射.

例 3 设 R_+ 表示全体正实数所成集合，$x \in R_+$ 则

$$x \xrightarrow{f} \lg x \quad \text{或} \quad f(x)=\lg x,$$

是一个由 R_+ 到 R 的映射.

在上述定义中，若 $B_f \subset B$，则称 f 是由 A 到 B 内的映射，简称内射；若 $B_f=B$，则称 f 是由 A 到 B 上的映射，或者说 f 是映上的，简称满射. 上面例 1、例 3 的映射是满射，而例 2 则是内射.

从例 2 我们看到，集合 T 中不同的元素（三角形）可以有相同的象（面积）. 如果在上述定义中，假定 A 中不同的元素在 B 中必有不同的象与之对应，即若 $x_1 \neq x_2$ 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$，这样的映射称为单一的或简称单射. 上面例 1，例 3 是单一的映射，而例 2 的映射则不是单一的映射.

例 4 设 $A=\{x \mid -1 \leqslant x \leqslant 1\}$，$B=\{y \mid 0 \leqslant y \leqslant 1\}$，设

$f: A\to B$ 由$f(x)=x^2$来定义，则f是满射，但不是单射；若将A，B改为：$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 2\}$，则由上式所确定的$f$是单一的，但不是映上的；若$A=\{x\mid 0\leqslant x\leqslant 1\}$，$B=\{y\mid 0\leqslant y\leqslant 1\}$，则$f$既是映上的，又是单一的.

如果从A到B的映射既是满射又是单射，便称映射$f: A\to B$为一一映射或一一对应．这时B中每一个元素y都在A中有而且只有一个原象与之对应，因此就产生了一个由B到A的映射，称为f的逆映射，记为f^{-1}：$B\to A$，或简记为f^{-1}.

最后，关于集合映射的定义有以下两点值得注意：

1　映射是由A、B、f三者确定的．对于两个映射，即使对应规律相同，而A不同，也应当认为是两个不同的映射，例如

$$f(x)=x^2-1 \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$g(x)=x^2-1 \qquad (0\leqslant x\leqslant 2)$$

就是两个不同的映射.

2　记号“f”与“$f(x)$”是有区别的，f表示由x（$x\in A$）产生y（$y\in B$）的对应规律，而$f(x)$表示在映射f下x的象y，即$f(x)=y$.

§2　实数集

一　实数与数轴

在高等数学中研究的问题，绝大多数是在实数范围内进行的．今后如果没有特别声明，本书所提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作N．全体整数的集合记作Z．全体有理数的集合记作Q．全体实数的集合记作R.

通常用实数轴上的点作为实数的几何表示．实数轴是一条指定了正向、在其上选定了原点O并且规定了单位长度的有向直线（图1－1）．负数对应的是原点左侧上的点；正数对应原点右侧上的

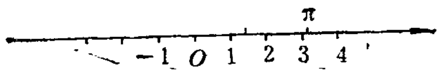

图 1-1

点．实数在数轴上对应的点叫实点．有理数、无理数对应的点分别叫有理点、无理点．实数与数轴上的点是一一对应的．在本课程中“实数”与“实点”不再区分．实数有以下性质：

1　**有序性**　任二实数 a 与 b 必能比较大小：或是 $a<b$，或是 $a>b$，或是 $a=b$，三者必居其一，且仅有一种关系成立．

2　**稠密性**　任二不同的实数 a 与 b 之间必有与 a、b 不同的实数，例如 $\dfrac{a+b}{2}$ 就是一个．其实，仅就有理数集而言已经是稠密的了．任何两个有理数之间必有一个有理数．可以想像，在数轴上一个无论多么小的线段里，都密密麻麻地挤着无穷多个有理点，这就是稠密性．

3　**连续性**　我们承认实数集是连续的是指：在数轴上任何两个不同的实数之间必被实数所充满．对比来看，有理数虽是稠密的，但是并不连续，因为任何两个不同的有理数之间必有非有理数（无理数）存在．如果只看有理数，它们之间总是有空隙的；而实数则不然，它们已经充满整个数轴而毫无空隙了．

二　区间与邻域

区间是用得较多的一类数集．设 a 与 b 都是实数，且 $a<b$，则数集

$$\{x\,|\,a<x<b\}$$

称为开区间，记作 (a, b)，即

$$(a,\ b)=\{x\,|\,a<x<b\}.$$

a 和 b 称为开区间 $(a,\ b)$ 的端点．这里 $a\notin(a,\ b)$，$b\notin(a,\ b)$．数集 $\{x\ |\ a\leqslant x\leqslant b\}$ 称为闭区间，记为 $[a, b]$，即

$$[a,\ b]=\{x\,|a\leqslant x\leqslant b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间$[a,\ b]$的端点．这里$a\in[a,\ b]$，$b\in[a,\ b]$，类似地可说明

$$[a,\ b)=\{x\,|a\leqslant x<b\},$$
$$(a,\ b]=\{x\,|a<x\leqslant b\}.$$

$[a,b)$和$(a,b]$都称为半开区间．

以上这些区间都称为有限区间．数“$b-a$”称为这些区间的长度．从数轴上看，这些有限区间是长度为有限的线段．闭区间$[a,b]$与开区间(a,b)在数轴上表示出来，分别如图1－2（1）与（2）所示．此外还有所谓无限区间．引进记号“$+\infty$”（读作正无穷大）及“$-\infty$”（读作负无穷大），则可类似地表示无限区间，例如

$$[a,+\infty)=\{x\,|x\geqslant a\},$$
$$(-\infty,b)=\{x\,|x<b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图1－2（3）、（4）所示．

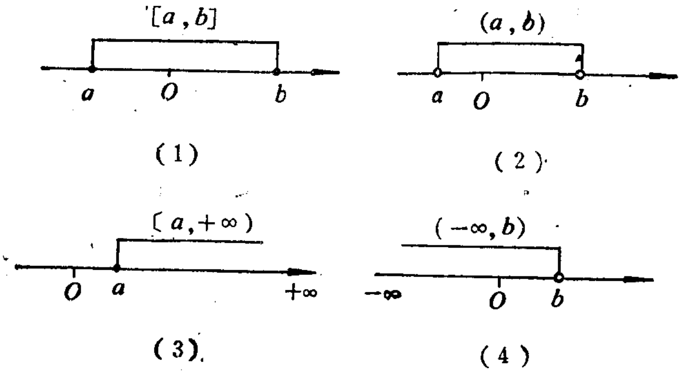

图 1-2

全体实数的集合R也可记作（$-\infty,+\infty$）．它也是无限区间．

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点，以及是有限区间还是无限区间的场合，就简称它们为“区间”，且常用字母I表示．

邻域也是一个经常用到的概念．设a与δ是两个实数，且$\delta>0$．数集$\{x \mid |x-a|<\delta\}$称为点a的δ邻域，记作$U(a,\delta)$．点a叫做这个邻域的中心，δ叫做这个邻域的半径．

因为$|x-a|<\delta$相当于：$a-\delta<x<a+\delta$．所以

$$U(a,\delta)=\{x \mid a-\delta<x<a+\delta\},$$

也就是说，$U(a,\delta)$实际上就是开区间$(a-\delta,a+\delta)$．今后我们总是在研究a点附近的数值时使用邻域这个概念．所以，δ一般是很小的正数，尽管定义中并没有这个限制．

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉．点a的δ邻域去掉中心a后，称为点a去心的δ邻域，记作$U(\hat{a},\delta)$，即

$$U(\hat{a},\delta)=\{x \mid 0<|x-a|<\delta\},$$

或 $$U(\hat{a},\delta)=U(a,\delta)\setminus\{a\}.$$

§3 函数概念

一 变量与常量

人们在实践过程中经常遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持同一个数值，这种量叫常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫变量．

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们可以取不同的数值．

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析．例如，就地球表面附近地区而言，重力加速度可以看作常量，但就更广阔的范围来说，重力加速度则是变量．

通常用字母a、b、c、…等表示常量，用字母x、y、z、t、…等来表示变量．

设变量x所取数值的全体组成数集A，那末变量x也可以看作

表示数集A中任何元素的符号．例如，若变量x所取数值全体组成开区间（a，b），那末x就表示数集

$$(a,b)=\{x\mid a<x<b\}$$

中任何元素的符号、特殊地，如果数集只含一个元素，那末表示数集元素的符号就是常量．在这个意义上，常量可以看作是变量的特殊情形．

二　函数的定义

客观世界的事物，总是直接或间接地互相联系、相互制约的．在某一种自然现象或某一技术过程中，往往有若干个变量相互联系并遵循着一定的变化规律而变化着．下面仅就过程中只涉及两个变量的情形（多于两个变量的情形以后第八章再讲）举几个例子．

例1　自由落体运动．设物体下落的时间为t，落下的距离为s，开始下落的时刻$t=0$，物体着地时刻为$t=T$．由物理学知道，变量s与变量t之间的关系由公式

$$s=\frac{1}{2}gt^2,\qquad (0\leqslant t\leqslant T)$$

给出，其中g是重力加速度．由上述关系式可知，当t在闭区间$[0,T]$上任取一个数值时，按照上式给定的规律，就有一个确定的数值s和它对应．

例2　为了掌握气温的变化，气象台每天用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化的曲线．如图1－3所示的某一天记下的气温变化曲线，图中横坐标是时间t，纵坐标是温度T．曲线的图形反映出时间t在区间$[0,24]$上变化时，温度T随时间t变化的规律．曲线上任一点P（a，b）表示在时刻$t=a$时，测得的气温$T=b$．所以，在$0\leqslant t\leqslant 24$这个区间上，对每一个确定的时间t，根据曲线的图象都有一个确定的温度T和它对应．

例3　若弹簧一端固定，另一端挂上重物，则弹簧长度l随重物重量P而变化．设弹簧最大负荷量为10kg，用实验方法测得长度