

高等数学

高等学校教材 GAODENG
SHU XUE

上册



蔡高厅 叶宗泽 主编

天津大学出版社

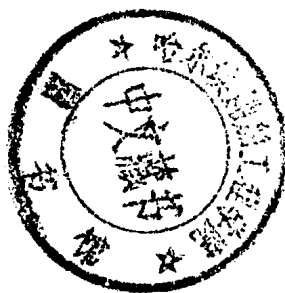
376598

高等学校教材

高等数学

上册

蔡高厅 叶宗泽 邱忠文 梁立华 编



天津大学出版社

DV50/09

内 容 提 要

本版《高等数学》上、下册系高等工业院校适用的教材，是在本社历年《高等数学》版本的基础上重新组织编写而成的。全书参照高等工业学校“高等数学课程教学基本要求”，充分注意原版在使用过程中发现的不足，并吸取多年教学中积累的经验，达到结构进一步合理，论述更加通顺简明，内容愈臻完善。

该书上册包括函数、极限、导数与微分、导数的应用、不定积分、定积分及其应用、空间解析几何与矢量代数等7章；下册包括多元函数微分学、重积分、曲线积分与曲面积分、级数、微分方程等5章。

(津)新登字012号

高 等 数 学

(上册)

蔡高厅 等 编

*

天津大学出版社出版

(天津大学内)

河北省邮电印刷厂印刷

新华书店天津发行所发行

*

开本：850×1168毫米 1/32 印张：15.125 字数：390千字

1994年4月第一版 1994年4月第一次印刷

印数：1—10 100

ISBN 7-5618-0603-5

O·60

定价：12.00元

前 言

为了适应我校教学的需要，多年来高等数学课程一直使用自编教材。经过多年的教学实践，积累了一定的教学和教材建设的经验；采用我校所编教材的有关院校同行也提出了一些宝贵意见。此次我们根据这些经验和意见，吸取教学改革的一些成果，并参照经国家教委批准印发的高等工业学校《高等数学课程教学基本要求》，对教材和习题集进行重新编写，并对部分内容作了调整。为了便于教学，将空间解析几何与矢量代数安排在上册。

参加本书编写工作的有蔡高厅、叶宗泽、邱忠文及梁立华。限于编者水平，这次编写不免仍有疏误，恳请读者指正。

编 者

1993.10

目 录

第一章 函数	(1)
§ 1 集合与集合的映射.....	(1)
一 集合 (1) 二 集合的映射 (2)	
§ 2 实数集.....	(4)
一 实数与数轴 (4) 二 区间与邻域 (5)	
§ 3 函数概念.....	(7)
一 变量与常量 (7) 二 函数的定义 (8)	
三 函数的几何意义 (11) 四 函数的几种性质 (15)	
§ 4 复合函数与反函数.....	(18)
一 复合函数 (18) 二 反函数 (20)	
§ 5 初等函数.....	(24)
一 基本初等函数 (24) 二 初等函数 (30)	
三 双曲函数 (31)	
第二章 极限	(34)
§ 1 数列的极限.....	(34)
一 面积问题 (34) 二 数列的极限概念 (37)	
§ 2 函数的极限.....	(46)
一 自变量趋向有限值时函数的极限 (46)	
二 自变量趋向无穷时函数的极限 (53)	
三 无穷小量与无穷大量 (55)	
四 海涅 (Heine) 定理 (59)	
§ 3 函数极限的性质与运算.....	(62)
一 极限与函数值的关系 (62) 二 函数极限与无穷	

小的关系 (63)	三 无穷小的性质 (64)	四 极限的四则运算定理 (66)
§ 4	极限存在的准则及两个重要极限…………… (72)	
一	夹挤准则 (72)	
二	单调有界准则 (76)	
§ 5	无穷小量的比较…………… (81)	
§ 6	连续函数…………… (84)	
一	函数的连续性 (84)	
二	函数的间断点 (87)	
三	初等函数的连续性 (90)	
四	连续函数在闭区间上的性质 (94)	
五*	一致连续概念 (98)	
第三章	导数与微分 ……………	(101)
§ 1	导数概念…………… (101)	
一	导数问题的引例 (101)	
二	导数的定义 (104)	
三	导数的几何意义 (108)	
四	函数的可导性与连续性的关系 (112)	
五	常数和几个基本初等函数的导数 (115)	
§ 2	函数的微分法…………… (119)	
一	函数的和、差、积、商的求导法则 (119)	
二	反函数的导数 (124)	
三	复合函数的微分法 (128)	
四	高阶导数 (135)	
五	相关变化率 (139)	
§ 3	函数微分的概念…………… (141)	
一	微分的概念 (141)	
二	微分的几何意义 (145)	
三	微分公式 (146)	
§ 4	微分在近似计算上的应用…………… (149)	
一	函数的近似公式 (149)	
二	函数值的误差估计 (152)	
§ 5	隐函数及参量函数的导数…………… (156)	
一	隐函数的导数 (156)	
二	参量函数的导数 (161)	
三*	极坐标系下曲线切线的斜率 (165)	

第四章 导数的应用	(168)
§ 1 微分学中值定理.....	(168)
一 罗尔定理 (168) 二 拉格朗日定理 (170)	
三 柯西定理 (174)	
§ 2 罗比塔 (L'Hospita) 法则.....	(177)
一 $\frac{0}{0}$ 型未定式 (177) 二 $\frac{\infty}{\infty}$ 型未定式 (181)	
三 其它类型的未定式 (184)	
§ 3 函数的增减性与极值.....	(186)
一 函数增减的必要条件与充分条件 (186)	
二 函数的极值及其求法 (191)	
§ 4 函数的最大值、最小值.....	(198)
§ 5 曲线的凹凸性与拐点.....	(203)
§ 6 在直角坐标系下函数图形的描绘.....	(209)
一 曲线的渐近线 (210) 二 函数图形的描绘 (212)	
§ 7 台劳 (Taylor) 公式.....	(215)
§ 8 曲率.....	(224)
一 弧微分 (224) 二 曲率 (227) 三 曲率	
圆 (233) 四* 渐屈线与渐伸线 (236)	
§ 9 方程的近似根.....	(238)
第五章 不定积分	(244)
§ 1 不定积分的概念.....	(244)
一 原函数 (244) 二 不定积分的几何意义 (246)	
三 不定积分的性质 (248) 四 基本积分表 (249)	
§ 2 基本积分法.....	(252)
一 换元积分法 (253) 二 分部积分法 (267)	
§ 3 几类函数的积分法.....	(273)
一 有理函数的积分 (273) 二 三角函数有理式的积	

分 (284)	三 两种无理函数的积分 (288)
§ 4	积分表的使用 (294)
第六章	定积分 (298)
§ 1	定积分的概念 (298)
一	定积分问题的两个引例 (298)
二	定积分的定义 (302)
三	定积分的几何意义 (305)
§ 2	定积分的性质 (308)
一	定积分的性质 (308)
二	定积分的中值定理 (312)
§ 3	定积分与原函数的关系 (315)
一	变上限的定积分 (315)
二	牛顿—莱布尼兹 (Newton-Leibniz) 公式 (317)
§ 4	定积分的计算方法 (321)
一	定积分的换元公式 (321)
二	定积分的分部积分公式 (328)
§ 5	定积分的近似算法 (331)
一	矩形法 (331)
二	梯形法 (333)
三	抛物线法 (334)
§ 6	广义积分初步与 Γ 函数 (341)
一	积分区间为无穷的广义积分 (341)
二	无界函数的广义积分 (345)
三	Γ 函数 (348)
§ 7	定积分在几何上的应用 (350)
一	平面图形的面积 S (351)
二	立体的体积 V (358)
三	平面曲线的弧长 s (364)
四	旋转体的侧面积 (368)
§ 8	定积分在物理上的应用 (370)
一	变力所作的功 (370)
二	引力问题 (373)
三	液体的侧压力 (375)
四	函数的平均值 (376)
第七章	空间解析几何与矢量代数 (380)
§ 1	空间直角坐标系 (380)

一 空间点的直角坐标(380)	二 空间两点间的距离(384)
§ 2 矢量代数..... (386)	
一 矢量概念(386)	二 矢量的运算(387)
三 矢量的坐标表达式(391)	四 数量积、矢量积、 *混合积(399)
§ 3 平面及其方程..... (407)	
一 曲面方程的概念(407)	二 平面的点法式方 程(410)
三 平面的一般式方程(412)	四 平 面的截距式方程(414)
五 两平面的夹角(415)	
§ 4 空间直线及其方程..... (418)	
一 空间曲线方程的概念(418)	二 直线的标准式方 程与参量式方程(419)
三 直线的一般式方程(421)	
四 两直线的相互位置(423)	五 直线与平面的夹 角(424)
§ 5 曲面及其方程..... (426)	
一 柱面(426)	二 旋转面(428)
§ 6 二次曲面..... (431)	
一 椭球面(431)	二 抛物面(433)
三 双曲 面(434)	四 空间立体图形作法举例(437)
§ 7 空间曲线及其方程..... (439)	
一 空间曲线的一般方程(439)	二 空间曲线的参量 方程(440)
三 空间曲线在坐标面上的投影曲线(442)	
附录 积分表..... (447)	

第一章 函 数

函数概念是现实世界中变量依从关系在数学中的反映，是微积分学的研究对象。中学里已学过初步的函数概念，本章我们从集合的映射这一角度出发来分析这个概念，并且简略介绍复合函数、反函数以及常用初等函数的一些主要性态。

§ 1 集合与集合的映射

一 集合

集合是数学的一个基本概念。通常把集理解解为具有某种共同性质的一些对象组成的全体。例如，某班全体学生；一个书柜中的所有书；正切为 $\sqrt{3}$ 的所有的角等等，都是集合。组成集合的个体叫做这个集合的元素。所谓“给出了一个集合”就是随意考虑一个对象，必可确定它是不是这个集合的元素。集合常用斜体大写字母 $A, B, C, \dots$ 等表示。元素用小写字母 $a, b, c, x, t, \dots$ 等表示。如果 a 是集合 A 的元素，就记为： $a \in A$ ，读作“ a 属于 A ”。否则，记为： $a \notin A$ ，读作“ a 不属于 A ”。

不含任何元素的集合叫做空集合。空集合用记号 ϕ 表示。

由有限个元素组成的集合，可用列举出它的全体元素的方法来表示。例如，由元素 $a_1, a_2, \dots, a_n$ 组成的集合 A ，可记作

$$A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}.$$

由无穷多个元素组成的集合，通常用以下记号表示：设 M 是具有某种特性的元素 x 所组成的集合，就记作

$$M = \{x \mid x \text{ 所具有的特性}\}.$$

例如集合

$$E = \{ \text{点}(x, y) \mid x, y \text{ 为实数}, x^2 + y^2 \leq 1 \},$$

表示 E 是由平面上这样的点所组成：它的每个点位于中心在原点的单位圆内，或在圆周上。

下面列出几个有关集合的定义。

定义 已给两个集合 A 与 B 。如果 A 的每一个元素都是 B 的元素，则称 A 是 B 的子集，记为 $A \subseteq B$ ，或 $B \supseteq A$ ，读作“ A 含于 B ”或“ B 包含 A ”。如果集合 A 是集合 B 的子集，而 B 中至少有一个元素不属于 A ，则称 A 是 B 的真子集，记为 $A \subset B$ ，或 $B \supset A$ 。

由定义可知，显然有 $A \subseteq A$ ， $\phi \subseteq A$ ，即任何一个集合是它自己的子集，空集是任一集合 A 的子集。

定义 设有集合 A 与 B ，如果 $A \subseteq B$ ， $B \subseteq A$ ，则称 A 与 B 相等，记作 $A = B$ 。

定义 由集合 A 的一切元素与集合 B 的一切元素所组成的集合叫做 A 与 B 的并，记为 $A \cup B$ ，即

$$A \cup B = \{ x \mid x \in A \text{ 或 } x \in B \}.$$

定义 由属于集合 A 又属于集合 B 的一切元素组成的集合叫做 A 与 B 的交，记为 $A \cap B$ ，即

$$A \cap B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \in B \}.$$

定义 由属于集合 A 但不属于集合 B 的一切元素组成的集合叫作 A 与 B 的差，记为 $A \setminus B$ ，即

$$A \setminus B = \{ x \mid x \in A \text{ 且 } x \notin B \}.$$

如果所讨论的集合都是某一集合 U 的子集，则称 U 为全集。

定义 如果 A 是全集 U 的子集，则 U 中不属于 A 的元素所组成的集合，叫做 A 的补集（或余集），记为 $\overline{A}$ ，即

$$\overline{A} = U \setminus A.$$

二 集合的映射

定义 设有两个集合 A 与 B ， f 表示某种确定的对应规律，使

得对每一个元素 $x \in A$, 通过 f 都有唯一的元素 $y \in B$ 与之对应, 则称 f 是由 A 到 B 的映射, 记为

$$x \xrightarrow{f} y \text{ 或 } f(x) = y.$$

y 叫做 x (在映射 f 下) 的象, 而 x 叫做 y (在映射 f 下) 的原象.

由 A 到 B 的映射 f 也常记为

$$A \xrightarrow{f} B \text{ 或 } f: A \rightarrow B.$$

A 叫做 f 的定义域. $B_f = \{y \mid y = f(x), x \in A\}$ 叫做 f 的值域. 显然 $B_f \subseteq B$.

例 1 设 A 、 B 分别表示某足球队全体队员及他们的号码所成的集合, f 表示 A 中每一个元素 (队员) 取他的号码的对应规律, 则 f 就是一个由 A 到 B 的映射.

例 2 设 T 表示平面上所有三角形的集合, 记号 R 表示全体实数所组成的集合, f 表示对于 T 中每一个元素 (三角形) 取它的面积的对应规律, 则 f 便是一个由 T 到 R 的映射.

例 3 设 R_+ 表示全体正实数所成集合, $x \in R_+$ 则

$$x \xrightarrow{f} \lg x \quad \text{或} \quad f(x) = \lg x,$$

是一个由 R_+ 到 R 的映射.

在上述定义中, 若 $B_f \subset B$, 则称 f 是由 A 到 B 内的映射, 简称内射; 若 $B_f = B$, 则称 f 是由 A 到 B 上的映射, 或者说 f 是映上的, 简称满射. 上面例 1、例 3 的映射是满射, 而例 2 则是内射.

从例 2 我们看到, 集合 T 中不同的元素 (三角形) 可以有相同的象 (面积). 如果在上述定义中, 假定 A 中不同的元素在 B 中必有不同的象与之对应, 即若 $x_1 \neq x_2$ 则 $f(x_1) \neq f(x_2)$, 这样的映射称为单一的或简称单射. 上面例 1, 例 3 是单一的映射, 而例 2 的映射则不是单一的映射.

例 4 设 $A = \{x \mid -1 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$, 设

$f: A \rightarrow B$ 由 $f(x) = x^2$ 来定义, 则 f 是满射, 但不是单射; 若将 A, B 改为: $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \mid 0 \leq y \leq 2\}$, 则由上式所确定的 f 是单射, 但不是映上的; 若 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 1\}$, $B = \{y \mid 0 \leq y \leq 1\}$, 则 f 既是映上的, 又是单射.

如果从 A 到 B 的映射既是满射又是单射, 便称映射 $f: A \rightarrow B$ 为一一映射或一一对应. 这时 B 中每一个元素 y 都在 A 中有而且只有一个原象与之对应, 因此就产生了一个由 B 到 A 的映射, 称为 f 的逆映射, 记为 $f^{-1}: B \rightarrow A$, 或简记为 f^{-1} .

最后, 关于集合映射的定义有以下两点值得注意:

1 映射是由 A, B, f 三者确定的. 对于两个映射, 即使对应规律相同, 而 A 不同, 也应当认为是两个不同的映射, 例如

$$f(x) = x^2 - 1 \quad (-1 \leq x \leq 1),$$

$$g(x) = x^2 - 1 \quad (0 \leq x \leq 2)$$

就是两个不同的映射.

2 记号 “ f ” 与 “ $f(x)$ ” 是有区别的, f 表示由 $x (x \in A)$ 产生 $y (y \in B)$ 的对应规律, 而 $f(x)$ 表示在映射 f 下 x 的象 y , 即 $f(x) = y$.

§ 2 实数集

一 实数与数轴

在高等数学中研究的问题, 绝大多数是在实数范围内进行的. 今后如果没有特别声明, 本书所提到的数都是实数.

全体自然数的集合记作 N . 全体整数的集合记作 Z . 全体有理数的集合记作 Q . 全体实数的集合记作 R .

通常用实数轴上的点作为实数的几何表示. 实数轴是一条指定了正向、在其上选定了原点 O 并且规定了单位长度的有向直线 (图 1-1). 负数对应的是原点左侧上的点; 正数对应原点右侧上的

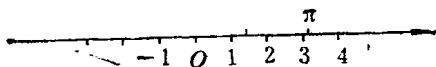


图 1-1

点. 实数在数轴上对应的点叫实点. 有理数、无理数对应的点分别叫有理点、无理点. 实数与数轴上的点是一一对应的. 在本课程中“实数”与“实点”不再区分. 实数有以下性质:

1 有序性 任二实数 a 与 b 必能比较大小: 或是 $a < b$, 或是 $a > b$, 或是 $a = b$, 三者必居其一, 且仅有一种关系成立.

2 稠密性 任二不同的实数 a 与 b 之间必有与 a 、 b 不同的实数, 例如 $\frac{a+b}{2}$ 就是一个. 其实, 仅就有理数集而言已经是稠密的了. 任何两个有理数之间必有一个有理数. 可以想像, 在数轴上一个无论多么小的线段里, 都密密麻麻地挤着无穷多个有理点, 这就是稠密性.

3 连续性 我们承认实数集是连续的是指: 在数轴上任何两个不同的实数之间必被实数所充满. 对比来看, 有理数虽是稠密的, 但是并不连续, 因为任何两个不同的有理数之间必有非有理数(无理数)存在. 如果只看有理数, 它们之间总是有空隙的; 而实数则不然, 它们已经充满整个数轴而毫无空隙了.

二 区间与邻域

区间是用得较多的一类数集. 设 a 与 b 都是实数, 且 $a < b$, 则数集

$$\{x | a < x < b\}$$

称为开区间, 记作 (a, b) , 即

$$(a, b) = \{x | a < x < b\}.$$

a 和 b 称为开区间 (a, b) 的端点. 这里 $a \notin (a, b)$, $b \notin (a, b)$. 数集 $\{x | a \leq x \leq b\}$ 称为闭区间, 记为 $[a, b]$, 即

$$[a, b] = \{x | a \leq x \leq b\}.$$

a 和 b 也称为闭区间 $[a, b]$ 的端点. 这里 $a \in [a, b]$, $b \in [a, b]$, 类似地可说明

$$[a, b) = \{x | a \leq x < b\},$$

$$(a, b] = \{x | a < x \leq b\}.$$

$[a, b)$ 和 $(a, b]$ 都称为半开区间.

以上这些区间都称为有限区间. 数 “ $b - a$ ” 称为这些区间的长度. 从数轴上看, 这些有限区间是长度为有限的线段. 闭区间 $[a, b]$ 与开区间 (a, b) 在数轴上表示出来, 分别如图 1-2 (1) 与 (2) 所示. 此外还有所谓无限区间. 引进记号 “ $+\infty$ ” (读作正无穷大) 及 “ $-\infty$ ” (读作负无穷大), 则可类似地表示无限区间, 例如

$$[a, +\infty) = \{x | x \geq a\},$$

$$(-\infty, b) = \{x | x < b\}.$$

这两个无限区间在数轴上如图 1-2 (3)、(4) 所示.

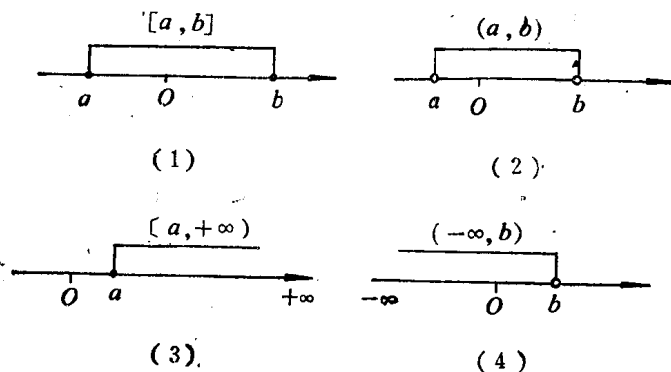


图 1-2

全体实数的集合 R 也可记作 $(-\infty, +\infty)$. 它也是无限区间.

以后在不需要辨明所论区间是否包含端点, 以及是有限区间还是无限区间的场合, 就简称它们为 “区间”, 且常用字母 I 表示.

邻域也是一个经常用到的概念。设 a 与 δ 是两个实数，且 $\delta > 0$ 。数集 $\{x \mid |x - a| < \delta\}$ 称为点 a 的 δ 邻域，记作 $U(a, \delta)$ 。点 a 叫做这个邻域的中心， δ 叫做这个邻域的半径。

因为 $|x - a| < \delta$ 相当于： $a - \delta < x < a + \delta$ 。所以

$$U(a, \delta) = \{x \mid a - \delta < x < a + \delta\},$$

也就是说， $U(a, \delta)$ 实际上就是开区间 $(a - \delta, a + \delta)$ 。今后我们总是在研究 a 点附近的数值时使用邻域这个概念。所以， δ 一般是很小的正数，尽管定义中并没有这个限制。

有时用到的邻域需要把邻域的中心去掉。点 a 的 δ 邻域去掉中心 a 后，称为点 a 去心的 δ 邻域，记作 $U(\hat{a}, \delta)$ ，即

$$U(\hat{a}, \delta) = \{x \mid 0 < |x - a| < \delta\},$$

$$\text{或 } U(\hat{a}, \delta) = U(a, \delta) \setminus \{a\}.$$

§ 3 函数概念

一 变量与常量

人们在实际过程中经常遇到各种不同的量，其中有的量在过程中不起变化，也就是保持同一个数值，这种量叫常量；还有一些量在过程中是变化着的，也就是可以取不同的数值，这种量叫变量。

例如，把一个密闭容器内的气体加热时，气体的体积和气体的分子个数保持一定，它们是常量；而气体的温度和压力则是变量，它们可以取不同的数值。

一个量是常量还是变量，要根据具体情况作出具体分析。例如，就地球表面附近地区而言，重力加速度可以看作常量，但就更广阔的范围来说，重力加速度则是变量。

通常用字母 a 、 b 、 c 、 $\dots$ 等表示常量，用字母 x 、 y 、 z 、 t 、 $\dots$ 等来表示变量。

设变量 x 所取数值的全体组成数集 A ，那末变量 x 也可以看作

表示数集 A 中任何元素的符号. 例如, 若变量 x 所取数值全体组成开区间 (a, b) , 那末 x 就表示数集

$$(a, b) = \{x \mid a < x < b\}$$

中任何元素的符号. 特殊地, 如果数集只含一个元素, 那末表示数集元素的符号就是常量. 在这个意义上, 常量可以看作是变量的特殊情形.

二 函数的定义

客观世界的事物, 总是直接或间接地互相联系、相互制约的. 在某一种自然现象或某一技术过程中, 往往有若干个变量相互联系并遵循着一定的变化规律而变化着. 下面仅就过程中只涉及两个变量的情形(多于两个变量的情形以后第八章再讲)举几个例子.

例1 自由落体运动. 设物体下落的时间为 t , 落下的距离为 s , 开始下落的时刻 $t = 0$, 物体着地时刻为 $t = T$. 由物理学知道, 变量 s 与变量 t 之间的关系由公式

$$s = \frac{1}{2}gt^2, \quad (0 \leq t \leq T)$$

给出, 其中 g 是重力加速度. 由上述关系式可知, 当 t 在闭区间 $[0, T]$ 上任取一个数值时, 按照上式给定的规律, 就有一个确定的数值 s 和它对应.

例2 为了掌握气温的变化, 气象台每天用自动温度记录仪记下一昼夜气温变化的曲线. 如图1-3所示的某一天记下的气温变化曲线, 图中横坐标是时间 t , 纵坐标是温度 T . 曲线的图形反映出时间 t 在区间 $[0, 24]$ 上变化时, 温度 T 随时间 t 变化的规律. 曲线上任一点 $P(a, b)$ 表示在时刻 $t = a$ 时, 测得的气温 $T = b$. 所以, 在 $0 \leq t \leq 24$ 这个区间上, 对每一个确定的时间 t , 根据曲线的图象都有一个确定的温度 T 和它对应.

例3 若弹簧一端固定, 另一端挂上重物, 则弹簧长度 l 随重物重量 P 而变化. 设弹簧最大负荷量为 10kg , 用实验方法测得长度