计算机辅助飞机制造

唐荣锡 等编

国防工业出版社

内容简介

本书系统地介绍了应用计算机辅助飞机设计、制造技术的基础知识。主要内容包括微分几何和计算几何的预备知识、飞机外形数学模型的建立和计算、交互图形显示、数控绘图、数控加工、数控测量以及计算机辅助设计、制造系统的概貌

本书可作为航空院校飞机制造专业的教材，也可供飞机工厂以及其他工业部门的工厂、设计所、研究所的技术人员和干部参考。

计算机辅助飞机制造

唐荣锡　等编

责任编辑　余发棣

*

国防工业出版社出版

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

国防工业出版社印刷厂印装

*

787×1092 1/16　印张 18 3/4　433千字

1985年6月第一版　1985年6月第一次印刷　印数：0,001—2,860册

统一书号：15034 2898　　定价：3 45元

目　录

第一章　曲线和曲面的矢量方程与参数方程

§1-1　曲线的矢量方程和参数方程

一、位置矢量及其坐标表示

图 1-1 中有一空间点A，从原点O到A点的连线$\overrightarrow{OA}$表示一个矢量，此矢量称为**位置矢量**。

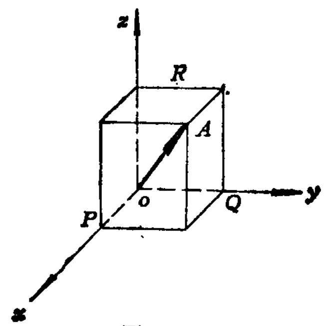

图　1-1

$$\overrightarrow{OA}=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}+\overrightarrow{OR}$$

为了便于用A点的坐标值（a_1，a_2，a_3）来表示OA，我们引用单位矢量（或称基矢量）$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$。

因为　　$OP=a_1$，$OQ=a_2$，$OR=a_3$

故　　$\overrightarrow{OA}=a_1\boldsymbol{i}+a_2\boldsymbol{j}+a_3\boldsymbol{k}=[a_1,\ a_2,\ a_3]$

二、常矢量和变矢量

矢量的特点是有大小和方向，其大小或长度称为矢量的**模**。模为零的矢量称为**零矢量**。大小和方向不变的矢量称为**常矢量**。大小和方向变化的矢量称为**变矢量**。

三、平面曲线的矢量方程和参数方程

若变矢量$\boldsymbol{r}$随数值量t的变化而变化，则称$\boldsymbol{r}$是t的矢函数，记为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$。在图 1-2 中，如果$M$是一个动点，$t$为参数，则对应于每一个$t$，都有一个位置矢量$\boldsymbol{r}(t)$表示$M$点的位置，矢函数$\boldsymbol{r}(t)$的端点就描述了动点$M$的运动轨迹，称为**矢端曲线**。表示为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$$

这就是曲线的矢量方程。

矢量方程的坐标表示是

$$\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{x}(t)\boldsymbol{i}+\boldsymbol{y}(t)\boldsymbol{j}=[x(t),\ y(t)]$$

曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=x(t) \\ y=y(t) \end{cases}$$

一般说来，参数方程中的参数可以不具有几何意义。

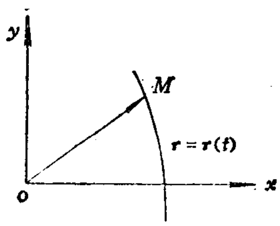

图 1-2

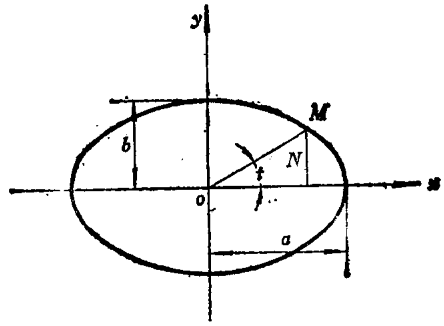

图 1-3

例 1 求椭圆曲线的矢量方程和参数方程

设椭圆曲线的长半轴为 a，短半轴为 b（见图 1-3）。

椭圆曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}=[a\cos t,\ b\sin t]$$

椭圆曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x=a\cos t \\ y=b\sin t \end{cases} \quad 0\leqslant t\leqslant 2\pi$$

例 2 求曲线 $y^2=x$ 的矢量方程和参数方程（见图 1-4），其中 $x\in[0,\ 2]$。

因为矢量方程是

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}$$

令 $x=t^2$

则 $\overrightarrow{ON}=t^2\boldsymbol{i},\ \overrightarrow{NM}=t\boldsymbol{j}$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}(t)&=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j} \\ &=t^2\boldsymbol{i}+t\boldsymbol{j} \\ &=[t^2,\ t] \end{aligned}$$

所以参数方程为

$$\begin{cases} x=t^2 \\ y=t \end{cases} \quad t\in[-\sqrt{2},\ \sqrt{2}]$$

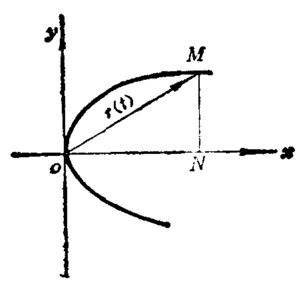

图 1-4

四、空间曲线的矢量方程和参数方程

空间一点的位置矢量有三个坐标分量，而空间曲线是空间动点运动的轨迹，也就是空间矢量端点运动形成的矢端曲线。其矢量方程为

$$\begin{aligned}\boldsymbol{r}&=\boldsymbol{r}(t)\\&=[x(t),\ y(t),\ z(t)]\end{aligned}\tag{1-1}$$

此式又称为单参数 t 的矢函数。

它的参数方程为

$$\begin{cases}x=x(t)\\y=y(t), & t\in[t_0,\ t_n]\\z=z(t)\end{cases}\tag{1-2}$$

例 求空间螺旋线的矢量方程和参数方程

设动点M沿圆柱右螺旋线运动，如图 1-5 所示。M点作圆周运动的转动角速度为 ω，沿 z 轴作直线运动的线速度为 v，运动的时间为 t，圆柱的半径为 a，总长度为 L。

首先选取起始平面的圆心 o 为坐标原点，过动点的起始位置 M_0 作 x 轴，建立右手坐标系 o-xyz。然后，连接坐标原点 o 和动点的任一位置M，得矢量$\overrightarrow{OM}$，$\overrightarrow{OM}$ 的端点轨迹是螺旋线。这时，矢端曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{ON}+\overrightarrow{NM}$$

又因为

$$\begin{aligned}\overrightarrow{ON}&=\overrightarrow{ON'}+\overrightarrow{N'N}\\&=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\boldsymbol{j}\\\overrightarrow{NM}&=vt\boldsymbol{k}\end{aligned}$$

所以 $\boldsymbol{r}(t)=a\cos\omega t\boldsymbol{i}+a\sin\omega t\boldsymbol{j}+vt\boldsymbol{k}$

$$=[a\cos\omega t,\ a\sin\omega t,\ vt]$$

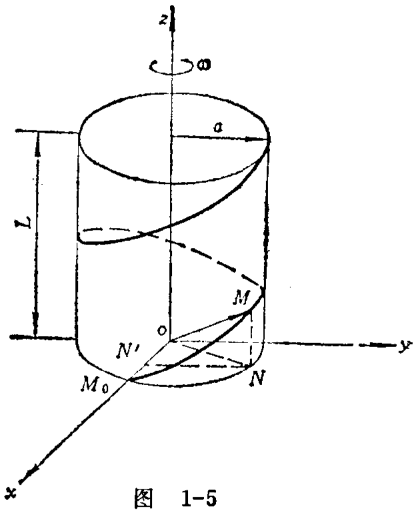

图 1-5

它的参数方程为

$$\begin{cases}x=a\cos\omega t\\y=a\sin\omega t, & t\in[0,\ L/v]\\z=vt\end{cases}$$

§1-2 矢函数的导矢及其应用

一、矢函数求导

和数量函数的求导一样，矢函数也可以求导。设当参数 t 变为 $t+\Delta t$时(见图 1-6)，矢函数 $\boldsymbol{r}(t)$ 对应的位置由$\overrightarrow{OM}$ 变为$\overrightarrow{OM_1}$，线段$\overrightarrow{MM_1}$对应的矢量差是

$$\Delta\boldsymbol{r}(t)=\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)$$

其变化率是

$$\frac{\Delta\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}$$

由此得出的矢量平行于弦矢量$\overrightarrow{MM_1}$。

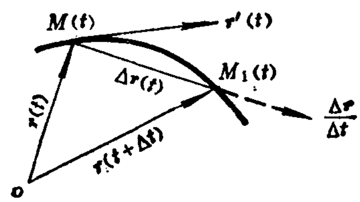

图 1-6

当参数变化量 $\Delta t>0$ 时，$\Delta \boldsymbol{r}/\Delta t$ 和弦 $\overrightarrow{MM_1}$ 的方向相同。反之，当 $\Delta t<0$ 时，两者的方向相反。

当 $\Delta t\to 0$ 时，这个矢量的极限叫做 $\boldsymbol{r}(t)$ 的**导矢**（严格地讲应为一阶导矢）。记为 $\boldsymbol{r}'(t)$ 或 $d\boldsymbol{r}(t)/dt$，

$$\boldsymbol{r}'(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta \boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\frac{d\boldsymbol{r}(t)}{dt}$$

又设 $\boldsymbol{r}(t)=[x(t),\ y(t),\ z(t)]$

$$\because\quad \frac{\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)}{\Delta t}=\left[\frac{x(t+\Delta t)-x(t)}{\Delta t},\ \frac{y(t+\Delta t)-y(t)}{\Delta t},\ \frac{z(t+\Delta t)-z(t)}{\Delta t}\right]$$

$$\therefore\quad \boldsymbol{r}'(t)=[x'(t),\ y'(t),\ z'(t)] \tag{1-3}$$

矢函数的导矢也是一个矢函数，因此也有方向和模。矢量 $[\boldsymbol{r}(t+\Delta t)-\boldsymbol{r}(t)]/\Delta t$ 的方向平行于割线 $\overrightarrow{MM_1}$（见图 1-6）。当 $\Delta t\to 0$ 时，$\Delta\boldsymbol{r}(t)/\Delta t$ 就转变为 $M(t)$ 点的切线矢量，故又称导矢为**切矢**。它指向曲线参数增长的方向。

导矢的模为

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2} \tag{1-4}$$

由导矢的定义，可推出下列运算法则：

（1） $$\boldsymbol{C}'=\boldsymbol{0},\quad (\boldsymbol{C}\text{为常矢})。 \tag{1-5}$$

（2） $$[\boldsymbol{r}_1(t)+\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}_1'(t)+\boldsymbol{r}_2'(t) \tag{1-6}$$

（3） $$[K\boldsymbol{r}(t)]'=K\boldsymbol{r}'(t) \tag{1-7}$$

其中 K 为常数。

（4） $$[f(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)]'=f'(t)\cdot\boldsymbol{r}(t)+f(t)\cdot\boldsymbol{r}'(t) \tag{1-8}$$

其中 $f(t)$ 为数量函数。

（5） $$[\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)]'=\boldsymbol{r}_1'(t)\cdot\boldsymbol{r}_2(t)+\boldsymbol{r}_1(t)\cdot\boldsymbol{r}_2'(t) \tag{1-9}$$

（6） $$[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]'=[\boldsymbol{r}_1'(t)\times\boldsymbol{r}_2(t)]+[\boldsymbol{r}_1(t)\times\boldsymbol{r}_2'(t)] \tag{1-10}$$

以上诸式读者可以自行证明其正确性。

（7）高阶导矢

$$\boldsymbol{r}''(t)=[x''(t),\ y''(t),\ z''(t)]$$

$$\cdots\cdots$$

$$\boldsymbol{r}^{(n)}(t)=[x^{(n)}(t),\ y^{(n)}(t),\ z^{(n)}(t)]$$

二、导矢在几何上的应用

前面已介绍了导矢的几何定义。导矢的物理意义也是明确的，当参数 t 是时间时，一阶导矢就是速度矢，二阶导矢是加速度矢。下面我们着重介绍导矢在飞机外形数学模型建立中的应用。

1．求曲线上任意一点的切线方程和法平面方程

设已知曲线方程为 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$（见图 1-7），求曲线上任一点 M_0 (x_0, y_0, z_0) 的切线方程和法平面方程。

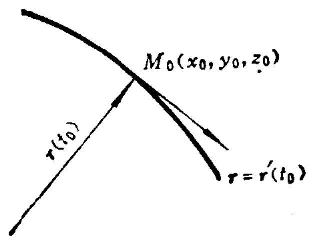

图 1-7

（1）求过 M_0点的切线方程

因为曲线方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=[x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

故曲线的切矢为

$$\boldsymbol{r}'(t)=[x'(t),\ y'(t),\ z'(t)]$$

切矢的模为

$$|\boldsymbol{r}'(t)|=\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$$

这样，切线的方向余弦为

$$\cos\alpha=x'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$$

$$\cos\beta=y'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$$

$$\cos\gamma=z'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2}$$

切线的方向数为

$$l=x'(t),\quad m=y'(t),\quad n=z'(t)$$

过 M_0 点的方向数为

$$l_0=x'(t_0),\quad m_0=y'(t_0),\quad n_0=z'(t_0)$$

因此，过 M_0 点的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{l_0}=\frac{y-y_0}{m_0}=\frac{z-z_0}{n_0}$$

代入得

$$\frac{x-x_0}{x'(t_0)}=\frac{y-y_0}{y'(t_0)}=\frac{z-z_0}{z'(t_0)}$$

令 $\dfrac{x-x_0}{x'(t_0)}=\dfrac{y-y_0}{y'(t_0)}=\dfrac{z-z_0}{z'(t_0)}=\lambda$，$\lambda$ 为实系数

故过 M_0点的切线方程又可写为

$$\begin{cases} x=x_0+\lambda x'(t_0) \\ y=y_0+\lambda y'(t_0) \\ z=z_0+\lambda z'(t_0) \end{cases} \tag{1-11}$$

（2）求过 M_0 点的法平面方程

因为 $\boldsymbol{r}'(t_0)$是曲线在 M_0 点的导矢（见图 1-8），即$\boldsymbol{r}'(t_0)$是过M_0点法平面的法矢。

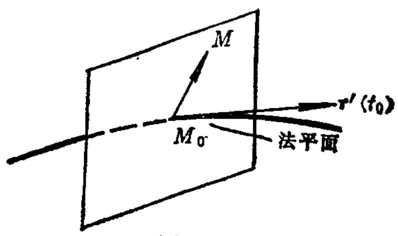

图 1-8

设M是法平面上的一点。所以过 M_0 点法平面的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}'(t_0)\cdot\overrightarrow{M_0M}=0$$

$$[x'(t_0),\ y'(t_0),\ z'(t_0)]\cdot[x-x(t_0),\ y-y(t_0),\ z-z(t_0)]=0$$

即

$$x'(t_0)[x-x(t_0)]+y'(t_0)[y-y(t_0)] +z'(t_0)[z-z(t_0)]=0 \tag{1-12}$$

2．已知一条空间曲线的首末两点的位置矢量

两点位置矢量（$\boldsymbol{R}(0)$，$\boldsymbol{R}(1)$）和该两点的切矢量（$\boldsymbol{R}'(0)$，$\boldsymbol{R}'(1)$），可以将它表达为三次矢函数的形式

$$\boldsymbol{R}(t)=a+bt+ct^2+dt^3 \qquad t\in[0,\ 1]$$

式中a，b，c，d为未知数。

这个问题的具体解法将在第三章中详细叙述。

3．平面曲线的等距线

在飞机外形的数学模型中，有理论外形曲线，相应地也有结构内形曲线，它们只相差一个蒙皮厚度或零件的壁厚。又如在数控铣床加工零件时，铣刀中心轨迹和零件外形相差一个铣刀半径的距离。这些都是等距线的应用。

现在我们给出等距线的定义：已知一条曲线 Γ，沿曲线各点法线方向移动一段距离 a，得到一组新的点。这些新点的轨迹 Γ_1 或 Γ_2（见图 1-9）称为Γ的**等距线**。

设已知曲线 Γ的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}(t)=[x(t),\ y(t)]$$

法向距离为 a，求它的等距线方程。

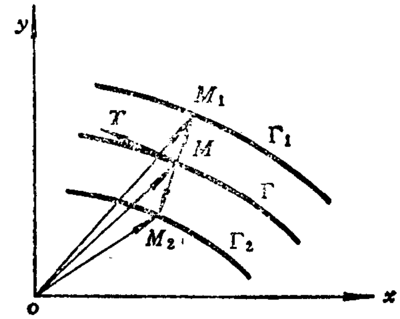

图 1-9

在矢量的原点 o，建立坐标系 oxy。从图 1-9 中可知

$$\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM_1}$$

其中 $\overrightarrow{OM}=\boldsymbol{r}(t)$

设 M 点的单位切矢为 $\boldsymbol{T}$●

$$\boldsymbol{T}=\left[\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}},\ \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}}\right] \tag{1-13}$$

$\boldsymbol{T}$ 的正向指向曲线参数 t 增长的方向。

取垂直于 xoy 平面的方向为 z 轴，令 z 轴方向上的单位矢量为 $\boldsymbol{k}$，则法线方向的单位法矢为

$$\boldsymbol{N}^{●}=\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{k}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}} & \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}} & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\left[\frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}},\ -\frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}},\ 0\right]$$

$$\overrightarrow{MM_1}=a\boldsymbol{N}$$

把它代入到 $\overrightarrow{OM_1}$ 的表达式内，得到等距线的矢量方程为

$$\boldsymbol{R}_1(t)=\overrightarrow{OM_1}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM_1}=\boldsymbol{r}(t)+a\boldsymbol{N} \tag{1-14}$$

等距线的参数方程为

$$\begin{cases} x_1=x(t)+ay'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\\ y_1=y(t)-ax'(t)/\sqrt{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2}\end{cases} \tag{1-15}$$

同理，由矢量 $\overrightarrow{OM_2}$ 可以确定另一条等距线的矢量方程和参数方程。其方法完全与上述方法相同，读者可以自行推导。

● 切矢——Tangent vector
● 法矢——Normal vector

§1-3　曲线的自然参数方程

在曲线的参数方程中，由于参数选取的不同，得到的方程也会是不同的。所以在一般的坐标系中讨论曲线时，由于人们选择坐标的不同而使曲线具有人为的性质。已知曲线自身的弧长是曲线的不变量，即不管坐标系如何选取，只要在其上取一初始点，确定一个方向，取一个单位长度，则曲线的弧长和参数增长方向便完全确定了。它是不依赖于坐标系的选取的。所以我们取曲线本身的弧长作为参数，研究曲线的一些性质，这对实际应用和理论分析，都会带来很多方便。

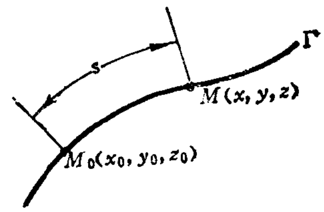

图　1-10

设有一条空间曲线Γ（见图 1-10），在Γ上任取一点 M_0 (x_0, y_0, z_0)，作为计算弧长的初始点。曲线上其他点M（x，y，z）到 M_0之间的弧长 s 是可以计算的（用弧长积分公式或累计弦长公式）。这样，曲线上每一点的位置与它的弧长之间有一一对应的关系。以曲线弧长作为曲线方程的参数，这样的方程称为**曲线的自然参数方程**，弧长则称为**自然参数**。这就是说，曲线上点的坐标（x，y，z）都是以弧长为参数的函数。曲线的参数方程为

$$\begin{cases} x = x(s) \\ y = y(s) \\ z = z(s) \end{cases} \tag{1-16}$$

曲线的矢量方程为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)=[x(s),\ y(s),\ z(s)] \tag{1-17}$$

下面叙述曲线的自然参数方程与一般参数方程的联系。设已知曲线的一般参数方程（或矢量方程）为

$$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)=[x(t),\ y(t),\ z(t)]$$

如何将它转化为曲线的自然参数方程呢？

为了观察方便，图 1-11 所示为平面曲线的情况，空间曲线的情况类同。

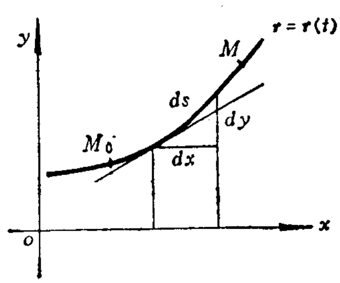

图　1-11

∵　$$\boldsymbol{r}'(t)=[x'(t),\ y'(t),\ z'(t)]=\left[\frac{dx}{dt},\ \frac{dy}{dt},\ \frac{dz}{dt}\right]$$

又弧长微分公式为

$$(ds)^2=(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2$$

引入参数 t，则上式可改写为

$$(ds/dt)^2=(dx/dt)^2+(dy/dt)^2+(dz/dt)^2=|\boldsymbol{r}'(t)|^2$$

由于矢量的模一定为正或零，不会为负，所以

$$\frac{ds}{dt}=|\boldsymbol{r}'(t)|>0$$

故知弧长 s 是 t 的单调增函数，其反函数 $t(s)$ 存在，且一一对应。将 $t(s)$ 代入到曲线方程 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t)$ 中去，得 $\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(t(s))=\boldsymbol{r}(s)$，此式即是以弧长为参数的自然参数方程。

自然参数方程有一个重要的性质：

$$\because \quad \dot{\boldsymbol{r}}(s)^{●}=\frac{d\boldsymbol{r}}{ds}=\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\cdot\frac{dt}{ds}=\boldsymbol{r}'(t)\cdot\frac{1}{|\boldsymbol{r}'(t)|}$$

$$\therefore \quad |\dot{\boldsymbol{r}}(s)|=1$$

即自然参数方程的切矢为单位矢量。

下面将举一简单的例子来说明如何从一般参数曲线方程求自然参数方程。

例　已知圆柱螺线的一般参数方程为（见图 1-12）

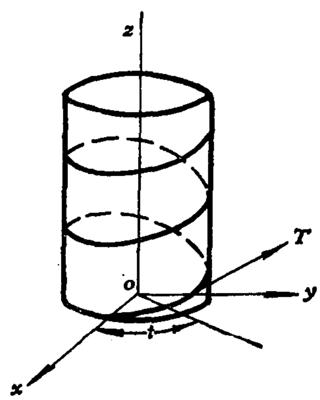

图　1-12

$$\boldsymbol{r}(t)=[a\cos t,\ a\sin t,\ bt]$$

其中 a 为柱面半径，螺距为 $2\pi b$。

求圆柱螺线的自然参数方程

$$\because \quad s=\int_{t_0}^{t}|\boldsymbol{r}'(t)|dt$$

今

$$\boldsymbol{r}'(t)=[-a\sin t,\ a\cos t,\ b]$$

代入得

● 今后约定$\dot{\boldsymbol{r}}$代表自然参数方程的导矢，$\boldsymbol{r}'(t)$代表一般参数方程的导矢。

$$s=\int_{t_0}^{t}\sqrt{(-a\sin t)^2+(a\cos t)^2+b^2}\,dt=\sqrt{a^2+b^2}\ t$$

$\therefore$
$$t=s/\sqrt{a^2+b^2}$$

代入圆柱螺线的一般参数方程，得到自然参数方程为

$$\boldsymbol{r}(s)=[a\cos(s/\sqrt{a^2+b^2}),\quad a\sin(s/\sqrt{a^2+b^2}),\ bs/\sqrt{a^2+b^2}]$$

§1-4　曲线论的基本公式

一、活动坐标系和基本三棱形

如果取坐标系的原点和曲线Γ上的动点M重合，使整个坐标系随M点的运动而跟随运动，这种坐标系称为**活动坐标系**(见图1-13)。

现在我们来讨论活动坐标系中各坐标轴如何选取？

（1）确定坐标轴Ⅰ：

设空间曲线Γ的方程为$\boldsymbol{r}=\boldsymbol{r}(s)$，由前面证明的自然参数方程的一个重要性质知，自然参数方程表示的曲线的切矢为单位矢量，记为$\boldsymbol{T}$。

$$\boldsymbol{T}(s)=\dot{\boldsymbol{r}}(s)\tag{1-18}$$

切矢$\boldsymbol{T}$的方向就取为活动坐标系的第一个坐标轴的方向。

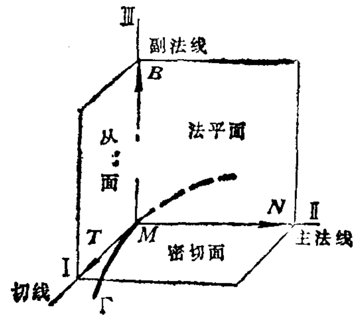

图 1-13

（2）确定坐标轴Ⅱ：

$\because$ $[\boldsymbol{T}(s)]^2=1$，对左式求导，得

$$2\boldsymbol{T}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}(s)=0$$

上式说明$\boldsymbol{T}(s)$和$\dot{\boldsymbol{T}}(s)$垂直。又因为$\dot{\boldsymbol{T}}(s)$不是单位矢量，可以认为

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s)=k(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)\tag{1-19}$$

式中所定义的单位矢量$\boldsymbol{N}(s)$是曲线Γ的主法线单位矢量，或称**主法矢**。主法矢$\boldsymbol{N}(s)$总是指向曲线凹入的方向，这也是主法矢正向的几何意义。$k(s)$是个数量系数，称为曲线Γ的**曲率**。而矢量$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=\dot{\boldsymbol{T}}(s)$称为曲率矢量，它的模就是该曲线的曲率。

$$|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|=k(s)$$

记$\rho(s)=1/k(s)$，$\rho(s)$称为**曲率半径**。

取主法线单位矢量$\boldsymbol{N}$的方向作为活动坐标系的第二个坐标轴的方向。

（3）确定坐标轴Ⅲ：

令垂直于$\boldsymbol{T}$和$\boldsymbol{N}$的单位矢量为$\boldsymbol{B}$●，称此矢量为次法线单位矢量或副法线单位矢量。

$$\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{T}(s)\times\boldsymbol{N}(s)\tag{1-20}$$

$\boldsymbol{B}$构成活动坐标系的第三个坐标轴的方向。

这三个单位矢量$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$是按右手系来建立的，它们与空间直角坐标系的三个单位矢量$\boldsymbol{i}$，$\boldsymbol{j}$，$\boldsymbol{k}$有相同的性质。所不同的是$\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$是随动点M沿曲线变动的。由

● 副法矢——Binormal vector

于 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$ 是三个基矢，故空间曲线 Γ 从 M 点所引出的其他任何矢量都可以在这个活动坐标系上分解。

在图 1-13 中，由切线和主法线所定的平面称为**密切平面**。由主法线和副法线组成的平面称为**法平面**。而由切线和副法线构成的平面称为**从切面**（或称次切面）。这三个面构成了曲线 Γ 在 M 点处的**基本三棱形**（或称基本三面形）。当 M 点沿曲线 Γ 移动时，基本三棱形作为一个刚体运动，故又称为动标三棱形。

下面我们将介绍基矢 $\boldsymbol{T}$，$\boldsymbol{N}$，$\boldsymbol{B}$ 之间的相互关系：

（1）它们是单位矢量：

$$[\boldsymbol{T}(s)]^2=[\boldsymbol{N}(s)]^2=[\boldsymbol{B}(s)]^2=1 \tag{1-21}$$

（2）三个基矢是相互垂直的：

$$\boldsymbol{T}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=\boldsymbol{N}(s)\cdot\boldsymbol{B}(s)=\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0 \tag{1-22}$$

（3）它们相互垂直又构成右手系：

$$\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N}=\boldsymbol{B},\ \boldsymbol{N}\times\boldsymbol{B}=\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{B}\times\boldsymbol{T}=\boldsymbol{N} \tag{1-23}$$

（4）三个基矢组成的体积为 1：

$$(\boldsymbol{T}\times\boldsymbol{N})\cdot\boldsymbol{B}=(\boldsymbol{T},\ \boldsymbol{N},\ \boldsymbol{B})=1 \tag{1-24}$$

二、曲线论的基本公式●

这组公式是说明活动坐标系中三个基矢的导矢和基矢之间的关系。现在我们先谈公式的内容。

因为
$$\dot{\boldsymbol{T}}(s)=k(s)\cdot\boldsymbol{N}(s) \tag{1-25}$$

其中
$$k(s)=|\dot{\boldsymbol{T}}(s)|=|\ddot{\boldsymbol{r}}(s)|=\sqrt{\ddot{x}(s)^2+\ddot{y}(s)^2+\ddot{z}(s)^2}$$

又 $\boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0$，对左式求导，得

$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{B}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{T}}(s)=0$$

又因为

$$\dot{\boldsymbol{T}}(s)=k(s)\cdot\boldsymbol{N}(s),\quad \boldsymbol{B}(s)\cdot\boldsymbol{N}(s)=0$$

所以
$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)\cdot\boldsymbol{T}(s)=0$$

又 $[\boldsymbol{B}(s)]^2=1$，对左式求导，得

$$\boldsymbol{B}(s)\cdot\dot{\boldsymbol{B}}(s)=0$$

所以，$\dot{\boldsymbol{B}}(s)$ 既垂直于 $\boldsymbol{T}(s)$，又垂直于 $\boldsymbol{B}(s)$，必有 $\dot{\boldsymbol{B}}(s)\,/\!/\,\boldsymbol{N}(s)$。

于是令
$$\dot{\boldsymbol{B}}(s)=-K(s)\boldsymbol{N}(s) \tag{1-26}$$

式中 $K(s)\in(-\infty,\ \infty)$，是数量系数，称为曲线 Γ 的**挠率**，$1/K$ 称为**挠率半径**。

再看
$$\boldsymbol{N}(s)=\boldsymbol{B}(s)\times\boldsymbol{T}(s)$$

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{N}}(s)&=\dot{\boldsymbol{B}}(s)\times\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{B}(s)\times\dot{\boldsymbol{T}}(s)\\&=(-K(s)\boldsymbol{N}(s))\times\boldsymbol{T}(s)+\boldsymbol{B}(s)\times(k(s)\times\boldsymbol{N}(s))\\&=-k(s)\boldsymbol{T}(s)+K(s)\boldsymbol{B}(s)\end{aligned} \tag{1-27}$$

将公式（1-25），（1-26），（1-27）综合起来，可写为

● 又称弗朗内-塞雷（Frenet-Serret）公式

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{T}}(s) = & k(s)\boldsymbol{N}(s) & \\ \dot{\boldsymbol{N}}(s) = -k(s)\boldsymbol{T}(s) & & +K(s)\boldsymbol{B}(s) \\ \dot{\boldsymbol{B}}(s) = & -K(s)\boldsymbol{N}(s) & \end{cases} \tag{1-28}$$

写成矩阵形式为

$$\begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{T}} \\ \dot{\boldsymbol{N}} \\ \dot{\boldsymbol{B}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & k & 0 \\ -k & 0 & K \\ 0 & -K & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{T} \\ \boldsymbol{N} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$

这组公式说明了基矢 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 关于弧长的导矢，可以用基矢的线性组合来表示。它反映了当M点在曲线上移动时，活动坐标系跟随着移动，矢量 $\boldsymbol{T}$、$\boldsymbol{N}$、$\boldsymbol{B}$ 的方向也随着变化，这种变化可以用导矢 $\dot{\boldsymbol{T}}$、$\dot{\boldsymbol{N}}$、$\dot{\boldsymbol{B}}$ 来描述。这组公式还可用来求曲线的曲率 k 和挠率K。

§1-5　曲率和挠率

一、曲　　率

1．曲率的几何意义

在微积分中，已讨论过平面曲线的曲率，即曲线在一点的曲率等于切线方向对于弧长的导数 $d\theta/ds$。即

$$\lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = k$$

在微分几何中，曲率的几何意义是

$$k = |\dot{\boldsymbol{T}}| = \left| \frac{d\boldsymbol{T}}{ds} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta \boldsymbol{T}}{\Delta \theta} \right| \cdot \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right|$$

由于 $|\boldsymbol{T}(s)| = |\boldsymbol{T}(s+\Delta s)| = 1$，都是单位矢量，(见图 1-14)，故弦长$|\Delta \boldsymbol{T}|$ 与角度 $\Delta\theta$ 之比的极限为 1，就得到

$$k = \lim_{\Delta s \to 0} \left| \frac{\Delta\theta}{\Delta s} \right| = \left| \frac{d\theta}{ds} \right|$$

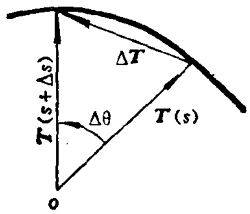

图　1-14

这个结果和平面曲线曲率的定义是一致的。所以 k 是空间曲线 Γ 的曲率，平面曲线的曲率只不过是它的特例。曲率表示切线方向对于弧长的转动率。转动越“快”，曲率越大，弯曲程度越厉害。

由公式 $k = |\ddot{\boldsymbol{r}}(s)| = 0$ 可知，曲率恒等于零的曲线是直线。

2．平面曲线曲率的计算方法

对于曲线方程 $y = f(x)$，微积分中给出的曲率计算公式是

$$k = \left| \frac{y''(x)}{[1+(y'(x))^2]^{3/2}} \right| \tag{1-29}$$

对于曲线方程$F(x, y)=0$，曲率的计算公式是

$$k=\left|-\frac{F_{xx}(F_y)^2-2F_{xy}F_xF_y+F_{yy}(F_x)^2}{[(F_x)^2+(F_y)^2]^{3/2}}\right| \tag{1-30}$$

对于自然参数方程，曲率的计算公式是

$$k=\sqrt{[\ddot{x}(s)]^2+[\ddot{y}(s)]^2+[\ddot{z}(s)]^2} \tag{1-31}$$

现在给出自然参数方程中曲率的另一种表示形式。

∵ $$y'(x)=\dot{y}(s)/\dot{x}(s)$$

对上式求导，得

$$y''(x)=[\ddot{y}(s)\dot{x}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s)]/[\dot{x}(s)]^3$$

将以上二式代入（1-29）式，得

$$k=\frac{\ddot{y}(s)\dot{x}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s)}{[(\dot{x}(s))^2+(\dot{y}(s))^2]^{3/2}}$$

又∵ $$\sqrt{(\dot{x}(s))^2+\dot{y}(s)^2}=1$$

∴ $$k=\ddot{y}(s)\dot{x}(s)-\dot{y}(s)\ddot{x}(s) \tag{1-32}$$

3．空间曲线的曲率计算方法

对于自然参数方程，曲率的计算公式为

$$k=\sqrt{[\ddot{x}(s)]^2+[\ddot{y}(s)]^2+[\ddot{z}(s)]^2} \tag{1-33}$$

对于一般参数方程，曲率的计算方法如下。

∵ $$[\dot{\boldsymbol{r}}(s)]^2=\left(\frac{d\boldsymbol{r}}{dt}\right)^2\cdot\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$$

又 $$|\dot{\boldsymbol{r}}(s)|=|\boldsymbol{T}(s)|=1$$

∴ $$\left(\frac{dt}{ds}\right)=1/\sqrt{[\boldsymbol{r}'(t)]^2}$$

则 $$\dot{\boldsymbol{r}}(s)=\boldsymbol{r}'(t)/\sqrt{[\boldsymbol{r}'(t)]^2}$$

又 $$\ddot{\boldsymbol{r}}(s)=\{\boldsymbol{r}''(t)[\boldsymbol{r}'(t)]^2-\boldsymbol{r}'(t)[\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)]\}/[\sqrt{[\boldsymbol{r}'(t)]^2}]^3\cdot\sqrt{[\boldsymbol{r}'(t)]^2}$$

将上述等式两边平方，

$$\begin{aligned}[\ddot{\boldsymbol{r}}(s)]^2&=\{[\boldsymbol{r}''(t)]^2[\boldsymbol{r}'(t)]^2-[\boldsymbol{r}'(t)\cdot\boldsymbol{r}''(t)]^2\}/\{[\boldsymbol{r}'(t)]^2\}^3\\&=|\boldsymbol{r}'(t)\boldsymbol{r}''(t)|^2/\{[\boldsymbol{r}'(t)]^2\}^3\end{aligned}$$ ●

∴ $$k=\frac{|\boldsymbol{r}'(t)\times\boldsymbol{r}''(t)|}{|\boldsymbol{r}'(t)|^3} \tag{1-34}$$

若用分量表示

$$k=\frac{\left[\begin{vmatrix}y'(t)&z'(t)\\y''(t)&z''(t)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}z'(t)&x'(t)\\z''(t)&x''(t)\end{vmatrix}^2+\begin{vmatrix}x'(t)&y'(t)\\x''(t)&y''(t)\end{vmatrix}^2\right]^{1/2}}{\{[x'(t)]^2+[y'(t)]^2+[z'(t)]^2\}^{3/2}} \tag{1-35}$$

4．应用举例

（1）已知曲线方程，求任意点的曲率；

● ∵ $a^2b^2-(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b})^2=|\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}|^2$