科学和工程中的
偏微分方程数值解法

〔美〕LEON LAPIDUS GEORGE F. PINDER

孙讷正　陆祥璇　李竞生 译

煤炭工业出版社

科学和工程中的偏微分方程数值解法

〔美〕LEON LAPIDUS GEORGE F.PINDER

孙讷正 陆祥璇 李竞生 译

煤 炭 工 业 出 版 社

内容提要

本书汇集了目前在求解科学和工程问题中经常遇到的各类偏微分方程时所用的数值方法中的最主要部分。不仅编入了经典（和非纯经典）的有限差分方法，而且也编入了有限元、配置和边界元方法。对每一种方程类型——抛物型、椭圆型和双曲型都按数值方法提出。因此，读者既可按方程类型阅读，也可按数值方法阅读。本书特别适合作为教材或教学参考书，也适合从事计算机应用科学的工程技术人员、科研人员参考。

责任编辑：吴志莲

LEON LAPIDUS GEORGE F.PINDER
NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL
DIFFERENTIAL EQUATIONSIN
SCIENCE AND ENGINEERING
JOHN WILEY & SONS NEW YORK 1982

科学和工程中的偏微分方程数值解法

孙讷正 陆祥璇 李竞生 译

*

煤炭工业出版社 出版
（北京安定门外和平里北街21号）
煤炭工业出版社印刷厂 印刷
新华书店北京发行所 发行

*

开本 $850\times1168\text{mm}\ ^1/_{32}$ 印张 $23^5/_8$
字数 621千字 印数1—2,400
1989年5月第1版 1989年5月第1次印刷
ISBN 7-5020-0024-0/TD·25

书号 2937 定价 8.60元

校译者的话

研究和解决现代的科学和工程问题离不开电子计算技术。掌握和使用电子计算机已成为各个学科的大学生和研究工作者必须具备的能力。我们在美国加州大学洛杉矶分校访问期间，对这一点是颇有感触的。从中国来的研究生和访问学者遇到的第一个问题就是补上使用电子计算机这一课，否则无法开展他的研究工作。数值方法是使用电子计算机进行科学计算的基础，而数值方法中应用最广泛、发展最快并且最难以掌握的就是偏微分方程的数值解法。

许多美国教授推荐这本刚出版的“科学和工程中的偏微分方程数值解法”,它是由美国普林斯顿大学的已故化学工程系系主任拉皮德斯教授与现任土木系系主任平德尔教授合著的。目前这本书已被美国许多大学的应用科学和工程学院选用为教材或教学参考书。这本书的特点之一是它的实用性,不是停留在理论分析上,而是着重讲清方法的来源、使用条件和计算步骤，并对各种方法的优缺点进行了比较，因此特别适用于非数学专业的读者。在内容上，它不仅包括了传统的有限差方法和有限元方法，而且还介绍了新发展起来的配置方法和边界元方法。本书的其它特点请读者参考原出版者对本书的介绍。凡读过本书的中国访问学者和研究生都感到受益非浅。这就促使我们想把本书译成中文，以帮助国内的大学生、研究生和科学工作者也能在自己的学习和工作中用上偏微分方程数值解法这个有力的工具。这一想法得到煤炭工业出版社同志的大力支持。

本书的前四章由陆祥璇译出，李竞生译第五章，孙讷正译第六章。全书由孙讷正总校。山东大学数学系的研究生曹圣山、姜雷、张在利、穆永科、赵卫东阅读了译稿并协助做了一些校对工

作。在校对过程中发现原书有许多刊误，在译文中已作了订正。

我们要感谢本书的作者平德尔教授。当他得知本书将被译成中文时，感到由衷的高兴，并立刻给我们寄来了他为中译本写的序言。我们还要感谢加州大学洛杉矶分校土木工程系系主任叶文工教授，他热情鼓励我们翻译这本书并给我们提供了良好的工作环境。

由于在翻译过程中译者和校者陆续回国，因而翻译本书的时间比较匆忙，译文一定有不少疏漏不当之处，敬请读者批评指正。

校 译 者

1985年10月

Preface to the Chinese edition of NUMERICAL SOLUTION OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS IN SCIENCE AND ENGINEERING

The past two decades have seen numerical methods evolve from a relatively unobtrusive mathematical curiosity to an important scientific and engineering instrument. Numerical methods now permeate virtually every aspect of quantitative analysis. It is difficult to conceive of modern scientific research without this very important mathematical tool.

While numerical methods have been available for a very long time, it was the advent of the digital computer that brought them to the attention of the scientific and engineering communities. Computational sophistication and mathematical ingenuity formed a natural partnership. This alliance completely changed the relevance and accessibility of these important mathematical techniques. Analysts who sought practically useful solutions to partial differential equations found that they could obtain them quickly and easily. Moreover, they discovered that problems that were very difficult to solve using classical applied mathematics, such as those described by non-linear partial differential equations, could be readily solved using numerical approaches. In many fields the ability to solve very general equations has spawned increased interest in the developmen of more accurate and complete mathematical descriptions of physical systems.

Spurred on by the success of well-established numerical techniques, such as the finite difference methods, numerical analysts sought new numerical approaches. A new flexibility was discovered in the finite element method. Whereas classical finite difference methods are based on discretization into rectangular subdomains, classical finite elements are formulated on triangular subspaces. Irregular geometries could be accommodated using the triangular element and, of consideradle importance in many problems, the discretized domain could be distorted as the numerical simulation progressed. The search for more robust and computationally efficient techniques continues. The boundary element method and the collocation finite element method are two recent additions to our array of computational tools.

When I learned that this book was to be translated into Chinese I was pleased by the prospect of assisting Chinese scientists and engineers in their desire to bring the advantages of modern technology to the Chinese people. I find it particularly satisfying to think that this book might, in some small way, assist the Chinese speaking people in achieving this goal.

George F. Pinder

May 14, 1984

科学和工程中的偏微分方程数值解法

（本书作者为中译本写的序言）

在过去的二十年里，数值方法已经从一个不太引人注目的数学分支发展成为解决科学和工程问题的重要工具。目前，数值方法事实上已经渗透到定量分析的各个方面。很难设想从事现代科学研究能够缺少这一非常重要的数学工具。

虽然数值方法的应用已有很长的历史。但只是在数字计算机出现以后才引起科技界的重视。精确的计算和数学上的创新是天生的一对伙伴，两者的结合完全改变了许多重要的数学方法的地位及其可用性。科研人员现在能够迅速而容易地得到偏微分方程的实用解答。而且，他们发现，过去靠经典的应用数学难以求解的非线性偏微分方程问题，现在用数值方法可以迎刃而解。由于数值方法在许多领域里求解非常一般方程的能力，使得研究人员有兴趣提出对物理系统的更精确和更完整的数学描述。

在一些行之有效的数值方法，诸如有限差分法获得成功的推动下，数值分析家又着手探索新的数值方法。他们发现有限元方法是一种适应性更强的方法。经典的有限差分法建立在矩形子域离散化的基础上，而经典有限元则是在三角形子空间中构造公式的。使用三角形单元可以较好地适应不规则的几何图形，而且在模拟演变型的过程时，被离散的区域可以不断改变形状，这一点在很多问题中是相当重要的。寻求更完善、计算效率更高的计算方法的工作仍然在进行中，边界元方法和配置有限元方法就是最近补充进来的两种新算法。

我很高兴得悉本书即将被译成中文，希望它的出版能够帮助中国科学家和工程师们把现代技术成果带给中国人民。如果本书能对实现这一目标有所帮助的话，我将感到由衷的高兴。

George F. Pinder

一九八四年五月十四日

作者簡介

利奥·拉皮德斯（**Leon Lapidus**）在1977年5月去世时是普林斯顿大学化学工程系教授。他在获得明尼苏达大学化学工程博士学位后，于1951年进入普林斯顿大学任教。1968年起担任化学工程系系主任，直到去世。

拉皮德斯博士在普林斯顿大学讲授的第一门课程是数值方法，以后一直致力于把数值分析和计算机技术应用于化学工程问题。他在这个领域里的著作包括5本书和发表在科学杂志上的大约135篇论文。这些著作对于工程师，特别是化学工程师处理问题的方式已经产生重要的影响。拉皮德斯博士还自著或与他人合著了4本主要的教科书，与N.R.阿蒙生（N.R.Amundson）合作完成了化学反应器理论的最后编辑工作。

拉皮德斯博士是许多学术奖的获得者。他曾获得专业进展奖和美国化学工程师学会的威廉.H.沃克勒(William H.Walkier)奖。1976年，他被选入国家工程研究院。

乔治·弗·平德尔(**George F.Pinder**)是普林斯顿大学土木工程系教授兼系主任。他从1972年以来就在该校任教。在进入普林斯顿大学任职以前,平德尔博士是美国地质调查局的水文研究专家。他是《地表水及地下水的有限元模拟》一书的作者之一、《水资源进展》杂志的编辑及《应用数学模型》、《流体中的数值方法》和《工程软件进展》三种杂志的编委会成员。平德尔博士是美国地球物理协会霍顿(Hoton)奖和美国地质学家梅茨（O.E.Meinzes）奖的获得者。他在依利诺斯大学获得地质学博士学位。

美国出版社对本书的介绍

科学和工程中的大多数实际问题在数学上是由偏微分方程描述的。由于在研究这类问题时广泛地使用了电子计算机，所以对于从事研究工作的科学家和工程师来说，数值方法已经成为一种越来越重要的工具。

这本教科书兼参考书介绍了含有偏微分方程的各种科学和工程问题是如何用数值方法求解的，它对目前使用的所有主要的数值系统——有限差分，有限元，配置和边界元提供了一本唯一实用和统一的教程。

本书按照偏微分方程的类型——抛物型、椭圆型、双曲型进行安排，每一类型构成单独的一章。在前三章中介绍基本的数值系统。为了解释各种方法的基本特点，书中使用了大量的数值例子。另外还详细地分析了在双曲型方程的模拟中可能遇到的各种类型的误差。

由于本书是为从事不同学科的科学家和工程师写的一本教程，因此，书中没有只针对某一特殊领域的任何专用记号或术语。

“科学和工程中的偏微分方程数值解法”既可作为大学高年级学生和研究生的一本综合性的，易读的教科书，又可作为科学家和工程师的一本基本工作参考书。本书对于研究固体力学、流体力学、结构和热流问题的土木、力学和航空工程师以及研究质量传递、多相流、化学反应器和流体动力学的化学和石油工程师特别有用。本书为应用数学家提供了一本把数值方法应用于求解数学物理方程的实用指南。同时，对于计算机科学家和从事数值仿真的研究人员，它是一本简明的参考书。

序　言

本书是为选修我们的数值方法课程的大学生和研究生而写的。它汇集了目前在求解科学和工程问题中经常遇到的各类偏微分方程时所用的数值方法中的最主要部分。由于选修我们课程的学生有着各不相同的背景及不同的兴趣，所以我们尽量设法避免使用那些会使学生感到困扰的名称或术语。此外，根据学生的需要，我们不仅编入了经典（和非纯经典）的有限差分方法，而且也编入了有限元、配置和边界元方法。在介绍了各种数值系统后，对每一种方程类型-抛物型、椭圆型和双曲型又各辟一章，对其中的每一章内容则是按数值方法提出的。因此，读者既可按方程类型阅读，也可按所用的数值方法阅读。

利奥·拉皮德斯（Leon Lapidus）在写了本书中大部分关于有限差分的内容后，于1977年5月5日在普林斯顿大学化学工程系他的办公室里突然去世。在完成本书手稿过程中，我一直试图使他的工作保持完整。我也沿用了他所用的术语和写作风格。

本书稿所以能顺利完成，在很大程度上是由于许多人努力的结果。他们中有的人花费很多时间对本书初稿进行了阅读、评论和修改，有的人帮助校对了最后的书稿。在这里特别要提出的有艾伦(M.B.Allen)、阿蒙生(N.R.Amundson)、塞利亚(M.Celia)和汤（D.H.Tang）。他们阅读了全部原稿，艾伯里奥拉(L.Abriola)、盖伊（V.V.Nguyen）和佩奇（R.Page），他们帮助校对了印刷清样。拉皮德斯夫人在整个准备过程中，特别在最后的出版阶段给予了大力协助。我也要感谢汉尼根（Dorothy Hann-

igan）女士，她在非常困难的条件下完成了一份出色的打字稿。最后，我还要向我妻子菲莉斯（Phyllis）表示感谢，她的鼓励和提供的环境对我完成本书是非常重要的。

乔治·弗·平德尔

1981年11月于新泽西州普林斯顿

目 录

第一章

基本概念

本章将详细地介绍偏微分方程的许多概念和特点。对于常用的记号和偏微分方程的分类方法将结合解析解和数值解的某些性质一起讨论。

1.0 记　号

考察一个偏微分方程，设自变量为x、y、z，……因变量为u、v、w，……，则直接的函数关系常写成

$$(1.0.1) \qquad u = u(x, y, z)$$

在此特定情况下，上式指定u为自变量x、y、z的函数。各阶偏导数常用下列记号表示：

$$(1.0.2) \quad u_x = \frac{\partial u}{\partial x}; \quad u_y = \frac{\partial u}{\partial y}; \quad u_{xx} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}; \quad u_{xy} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \quad \cdots$$

利用（1.0.1）和（1.0.2）的定义，我们就可把偏微分方程表示成一般形式

$$(1.0.3) \qquad F(x, y, u, u_x, u_y, u_{xx}, u_{yy}, u_{xy} \cdots\cdots) = 0$$

这里F是上述各个量的函数，且其中至少有一个偏导数。

下面是偏微分方程的一些例子：

$$u_{xx} + u_{yy} = 0$$

$$u_x = u + x^2 + y^2$$

$$u_{xxx} = u_{yy} + u^2$$

$$(u_x)^2 + (u_y)^2 = \exp(u)$$

偏微分方程的阶数由方程中的最高阶导数来确定，于是

$$u_x - bu_y = 0$$

是一阶的，

$$u_{xx}+u_y=0$$

是二阶的，

$$u_{xxxx}+u_{yyyy}=0$$

是四阶的。当遇到几个互相依赖的偏微分方程时，先把所有方程合并成一个单一方程再确定其阶数。例如，下列方程系中虽然每个都只含有一阶导数，但它仍然是二阶的，即

(1.0.4a) $$u_x+v_y=u_z$$

(1.0.4b) $$u=w_x$$

(1.0.4c) $$v=w_y$$

可改写为

(1.0.5) $$w_{xx}+w_{yy}=w_{xz}$$

当把（1.0.4）写成（1.0.5）的形式时，就能看出它是二阶的。

在求解偏微分方程时，方程的线性性质起着特别重要的作用。例如，考虑一阶方程

(1.0.6) $$a(\cdot)u_x+b(\cdot)u_y=c(\cdot)$$

上式的线性程度是根据系数$a(\cdot)$，$b(\cdot)$，$c(\cdot)$的函数关系来确定的。对于（1.0.6），若所有系数均为常数或只是自变量的函数〔$(\cdot)\equiv(x,\ y)$〕，则此偏微分方程是线性的，若上述系数又是因变量的函数〔$(\cdot)\equiv(x,y,u)$〕，则它是拟线性的；若上述系数是一阶导数的函数〔$(\cdot)\equiv(x,y,u,u_x,u_y)$〕，则它是非线性的。因此，下列偏微分方程可按此原则加以分类：

$$u_x+bu_y=0 \qquad \text{（线性）}$$

$$u_x+uu_y=x^2 \qquad \text{（拟线性）}$$

$$u_x+(u_y)^2=0 \qquad \text{（非线性）}$$

一般说来，当一个n阶偏微分方程的系数依赖于n阶导数时，此方程是非线性的；当系数依赖于m阶导数，而$m<n$时，它就是拟线性的。方程的线性性质极为重要，因为对于线性和拟线性偏微分方程，它们的许多解析性质已被了解，而对于非线性偏微分方程则必须逐个地去研究它。

偏微分方程的解析解是一个函数，可写为

$$u=u(x,y)$$

当把它代回到原方程时就使方程成为恒等式，当然，在讨论偏微分方程的解时必须考虑适当的附加初始条件和边界条件。例如，在一根两端绝热的有限长均质杆中，瞬态温度分布由下列方程系表示：

$$u_x=u_{yy},\qquad x>0,\ 0<y<1\qquad \text{（偏微分方程）}$$

$$u(0,y)=f(y),\qquad x=0,\ 0<y<1\qquad \text{（初始条件）}$$

$$u(x,0)=\phi(x),\qquad y=0,\ x\geqslant 0$$

$$u(x,1)=\theta(x),\qquad y=1,\ x\geqslant 0\qquad \text{（边界条件）}$$

这一组方程通常引出一个适定问题。几乎所有的现实问题均为适定的，即其解是唯一的且连续地依赖于初始条件和边界条件（见Hadamard，1923）。换言之，对于一个适定问题，可认为附加条件的微小扰动只使解产生微小的变化。

在此，把偏微分方程和常微分方程解的性质作一简单的比较是有益的。一阶常微分方程的一般形式为

$$\frac{du}{dx}=f(x,u)$$

其中f是x和u的函数。在常微分方程情形下，给定一个(x,u)就得到一个唯一确定的$\frac{du}{dx}$值，与此不同，在一阶偏微分方程中给定一个(x,y,u)只能得到一个联系u_x和u_y的关系式而不能唯一地确定它们中的每一个。在二阶常微分方程情形下，其解规定了平面解曲线上的一个点和一条切线；与此不同，与常微分方程相联系的点、平面或切线的概念对于偏微分方程则应扩展为曲线，三维空间和切平面。换句话说，对于一个常微分方程，在二维空间里有许多条解曲线，它们必须通过一个点，而对于一个偏微分方程，在三维空间里有许多个解曲面，它们必须通过一条曲线或一条直线。造成这些差别的直接原因当然是由于偏微分方程比常微分方程中自变量的数目有了增加。