高等数学

〈化工类型专业部分〉

高等学校教学用书

高等数学

GAODENG SHUXUE

（化工类型专业部分）

高等数学教科书編审委員会編

人民教育出版社

本书是由天津大学等27所高等工业院校集体编写的（由天津大学主编），它是适应教学改革后新形势的产物，是各校教师力图在高等工业学校的数学教学上插毛澤东思想红旗，貫彻多快好省精神的初步集中表现，本书的主要特点是：1）在学习毛澤东思想的基础上力求貫彻辩証唯物主义精神和理論联系实际的原則；2）尽量結合专业需要，增加新的內容；3）絕大部分內容都是从实例出发，并着眼于解决实际問題。为便于教师和学生使用本书，另外配合本书編有“高等数学教材使用說明书（化工类型专业部分）”，除說明各章节的目的要求等以外，还附有大型作业，以便培养学生解决实际問題的能力。

本书內容包括数理方程，概率与数理統計初步，經驗公式，算图，复变函数共五章，可供高等工业院校化工类型专业的学生使用。

簡装本說明

目前 850×1168 毫米規格紙張較少，本书暂以 787×1092 毫米規格紙張印刷，定价相应减少 20%。希鉴諒。

高等数学

（化工类型专业部分）

高等数学教科书編审委員会編

人民教育出版社出版（高等学校教学用书編辑部 北京景武門內承恩寺7号）

（北京市书刊出版业营业許可証出字第2号）

京华印书局印装

北京科技发行所发行

各地新华书店經售

統一书号 13010·828 开本 787×1092 1/32 印張 8 1/16 插頁 1

字数 204,000 印数 00001—25,000 定价（6）¥0.70

1960年10月第1版 1960年10月北京第1次印刷

目　录

第一章　数理方程

数理方程的研究对象是工程技术、物理、力学及尖端科学中所提出的数学物理問題，它是解决生产实际問題的强有力工具之一。当我們所研究的自然現象是用多变量函数描述时，我們就遇到这种方程。如何求这种方程的解是本章的目的，但实际上我們所关心的并不是方程的通解；因为数理方程的研究是与各种物理过程紧密地联系着，同时只有一个方程还不足以唯一地确定这个物理过程，而必須添加某些附加条件，因此我們的目的是要求出数理方程在适合某种附加条件下的特解。我們称这些附加条件为定解条件，而由此所組成的問題叫作定解問題。本章只研究含一个未知函数的二阶綫性偏微分方程，特別是工程中常用的几个最重要而且最簡单的方程——波动方程，热傳导方程和拉普拉斯方程。

§1.1　波动方程

1. 弦振动方程　我們研究弦的微小横振动的最簡单的問題。考虑拉紧在两点間的一条弦，在静止状态下位于 x 軸上；在时間 $t=0$ 时弦离开了平衡位置而开始振动。为了使問題簡化，我們認为弦的振动只是使弦上每一点沿垂直于 x 軸的方向运动(即横振动)，而且在任何时刻，弦的振动永远位于包含 x 軸的同一平面上。在这个平面上取直角坐标系 xOu，則 u 表示离开平衡位置时弦的位移。在振动过程中，位移 u 是弦上点的横坐标 x 和时間 t 的函数：$u=u(x,t)$。現在来求函数 $u(x,t)$ 所滿足的微分方程。設弦上作用有垂直于 x 軸的外力，且把对于按单位长度計算的外力即外力密度記为 $F(x,t)$。同时由于弦很細小，因此重力和空气阻力相当小，和張力外力比較起来，可以忽略不計，

此时弦上各点只受張力及外力的作用。由于我們只研究弦的微小横振动，因此可以認为在整个振动过程中弦上各点的張力T不变，卽

$$T=T_0=\text{常数}$$

另外我們用$\alpha(x)$表示弦上各点的切綫与x軸所作成的銳角，由x軸沿α角轉到切綫，若为逆时針方向則α为正，若为順时針方向則α为負(图 1.1)。

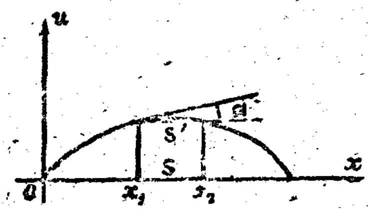

图 1.1

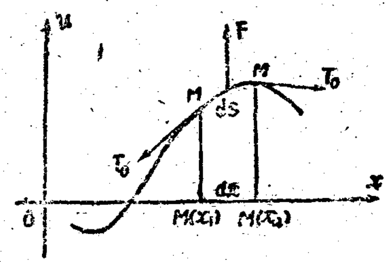

图 1.2

現在我們来建立弦的振动方程。在弦上取微小一段，称为元素。在靜止状态下它的位置是$M(x_1)M(x_2)(x_1\leqslant x\leqslant x_2, x_2-x_1=dx)$，在时刻$t$，它的位置是$MM'$。在$MM'$上的作用力如下：外力$F(x,t)$，在$M'$点的張力$T_0$，它的方向沿着弦在$M'$点的切綫方向；在$M$点的張力$T_0$，它的方向与弦在$M$点的切綫方向相反(图 1.2)。因此作用在$M'$及$M$点的張力$T_0$在$u$軸上的投影分別为$T_0\sin\alpha(x_2)$和$-T_0\sin\alpha(x_1)$，从而元素$MM'$上所受的合力沿$u$軸的投影为

$$T_0\sin\alpha(x_2)-T_0\sin\alpha(x_1)+F(x,t)dx$$

由于弦的形变很小，故弦上各点的切綫斜率$\mathrm{tg}\alpha=\dfrac{\partial u}{\partial x}$相当小，因此$\dfrac{\partial u}{\partial x}$的平方与单位1比較起来可以忽略不計，因此有

$$\sin\alpha=\frac{\mathrm{tg}\alpha}{\sqrt{1+\mathrm{tg}^2\alpha}}=\frac{\dfrac{\partial u}{\partial x}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)^2}}\approx\frac{\partial u}{\partial x}$$

所以上式可以写为

$$T_0\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right]+F(x,t)dx,$$

方括号内的量，表示当 x 增加了 dx 时，函数 $\frac{\partial u}{\partial x}$ 的增量。应用微分中值定理有

$$T_0\left[\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_2}-\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=x_1}\right]+F(x,t)\,dx=T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\xi}dx+F(x,t)dx$$

其中 ξ 在 x_1 与 x_2 之間。如果用 ρ 表示弦的綫密度，則这段元素的质量为 $\rho ds\approx\rho dx$；于是根据牛頓第二定律，这段元素的质量 ρdx 与加速度的乘积必等于元素 MM' 上所受力的代数和。又由于元素 MM' 相当小，所以其上各点的加速度相差无几。設以 ξ 点的加速度作为它的代表，同时对外力 $F(x,t)$ 也作同样的处理。由此得到

$$\rho\cdot dx\cdot\left.\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right|_{x=\xi}=T_0\left.\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right|_{x=\xi}dx+F(x,t)\Big|_{x=\xi}dx$$

在以上等式中，消去 dx，并且令 $a^2=\frac{T_0}{\rho}$，$f(x,t)=\frac{F(x,t)}{\rho}$。又由于 x_1 是任取的，所以当 $\Delta x\to 0$ 时取极限，我們得到描述弦的振动的偏微分方程为：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t) \tag{1.1}$$

这种振动称为强迫振动。当外力消失，即 $F(x,t)=0$，得到弦的自由振动方程：

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{1.2}$$

当我們研究薄膜的自由振动和声波电磁波的振动时，分别可以得到二維与三維振动方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right).$$

以上所推导的方程中含有两个自变量 (x,t) 或两个以上的自变量 (x,y,t) (x,y,z,t) 以及未知函数 u 和 u 对自变量的二阶偏导数，而且对于 u 及其偏导数而言都是一次的；这种方程叫作二阶綫性偏微分方程。一般言之，自变量 x,y 未知函数 $u(x,y)$ 与它的一阶及二阶偏导数之間的关系式：

$$F\left(x, y, u, \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)=0$$

叫作含两个自变量的二阶偏微分方程。假設一个方程对于函数 u 及其一二阶偏导数而言都是一次的，即

$$a_{11}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+a_{12}\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}+a_{22}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+b_1\frac{\partial u}{\partial x}+b_2\frac{\partial u}{\partial y}+cu+f=0$$

其中 $a_{11}, a_{12}, a_{22}, b_1, b_2, c, f$ 只是 x, y 的函数，那么它就叫作二阶綫性偏微分方程。假設 $f(x,y)\equiv 0$，則它叫作齐次的，否則叫作非齐次的。

当解偏微分方程，即求所給方程的一切解时，与常微分方程一样，我們会得到无穷多个。在常微分方程的通解中含有任意常数，对于不同的常数值得到不同的解。通过几个特殊形状的偏微分方程可以看到，偏微分方程的通解中含有任意函数。例如研究二阶綫性偏微分方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}=0$$

把它写成形状 $\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)=0$，由此看出 $\frac{\partial u}{\partial y}$ 与 x 无关，从而可以假設它是 y 的任意函数：

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\varphi(y)$$

把上式对 y 积分，并注意到积分常数对于 y 来說不变，这就是說，它可以是 x 的任意函数，于是我們得到

$$u=\int \varphi(y)\,dy+f(x)=f(x)+\psi(y)$$

其中 $f(x)$ 是 x 的任意函数，$\psi(y)$ 是 $\varphi(y)$ 的原函数，因此也是 y 的任意

函数。即方程$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}=0$的通解$u(x,y)$依赖于两个任意函数。

再研究波动方程：$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

令$\xi=x-at$，$\eta=x+at$，可以将其化为方程

$$\frac{\partial^2 u}{\partial\xi\partial\eta}=0$$

由上所知其解为$u=f(\xi)+\psi(\eta)$。回到原来变量x,t，得到波动方程的通解为

$$u=f(x-at)+\psi(x+at)$$

其中f,ψ是任意函数。

由以上两个特殊形式的方程，我們看出，偏微分方程的通解中含有任意函数。但是一般言之，对于給定的偏微分方程，我們往往很难求出它的通解，而且将实际的数学物理問題轉化为解偏微分方程的問題时，都是要求我們求出满足某个方程及一定附加条件的特解。

II. 边值条件和初始条件 当用数学来描述物理过程时，首先必須列出足以唯一地确定物理过程的条件。由于偏微分方程有无穷多个解，因此在将物理問題化为偏微分方程时，为了唯一地确定这个物理过程，必須对于該方程添加某些附加条件，这些附加条件决定于具体的物理問題。例如，对于弦振动問題，无論弦的端点是怎样的，而且也不管在$t=0$时弦的振动情况如何，所导出的方程完全是一样的，但由物理观点来看，不同的端点約束条件，不同的初始情况，弦的振动过程也不一样，因此为了完全确定具体的振动过程，必須知道弦的端点情况及开始振动情况。若研究两端固定的弦$(0\leqslant x\leqslant l)$的横振动，这时函数$u(x,t)$除了满足振动方程外，还必須满足条件

$$u(x,t)|_{x=0}=0,\quad u(x,t)|_{x=l}=0$$

假設弦的两端不固定，而各以一定的規律运动；則此时弦的两端的縱坐标应該是时間t的已知函数：

$$u(x,t)\big|_{x=0}=\varphi_1(t),\quad u(x,t)\big|_{x=l}=\varphi_2(t).$$

又若弦的一端 $x=0$ 为自由端，则在 $x=0$ 处張力 T 在 u 方向的分量 $T\dfrac{\partial u}{\partial x}$ 为零，故有 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0$。以上各条件用来描述弦的端点的情况，我們称它們为边値条件。当然仍有其他形式的边値条件，这里不詳細論述。

另外再給出弦在初始时刻 $t=0$ 时的状态，也就是当 $t=0$ 时，弦上各点的位置及初速度，显然它們都是 x 的函数：

$$u(x,t)\bigg|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x).$$

这两个条件給出了位移 u 和速度 $\dfrac{\partial u}{\partial t}$ 在初始瞬时的値，称为初始条件。边値条件与初始条件統称为定解条件。方程与定解条件組成定解問題，例如

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}\\ u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0\\ u\bigg|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

卽为一个定解問題。我們的目的是在于如何求出滿足方程及定解条件的特解。

III. 富里哀解法 富里哀方法也称为分离变量法，它是求偏微分方程滿足一定条件的特解的重要方法之一。現在以研究两端固定的弦的自由振动，卽求問題

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} & (1.3)\\ u\big|_{x=0}=0,\quad u\big|_{x=l}=0 & (1.4)\\ u\bigg|_{t=0}=\varphi(x),\quad \left.\dfrac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x) & (1.5)\end{cases}$$

的解为例，来說明这个方法。

首先通过物理現象来启发我們找出解决問題的方法。物体在振动时往往会发出频率高低不同的声音，显然这些具有一定频率的振动的数学表达式郎为波动方程的解，而这些表达式往往是时間 t 的周期函数。容易知道，物体在振动时有着一个不随时間改变的振形，同时振动的振幅又是 t 的周期函数。由此得知，波动方程具有形如

$$u(x,t)=X(x)\sin(\omega t+\delta)$$

的解，其中 $X(x)$ 代表振形，而 $\sin(\omega t+\delta)$ 代表频率为 ω 的周期振动。但实际情况往往比較复杂，一个物体的振动現象常常是由各种频率不同的振动組合而成，由此事实启发我們去研究波动方程形如

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

的解。富里哀方法的实质就是求以上定解問題的特解，这个特解可以写成两个函数的乘积，其中一个函数只依賴于 t，另一个函数只依賴于 x，从而将問題轉化为求常微分方程的解。郎令

$$u(x,t)=X(x)T(t) \tag{1.6}$$

并且确定函数 $X(x)$、$T(t)$，使得函数 $u(x,t)$ 满足方程(1.3)及附加条件(1.4)、(1.5)。为此将(1.6)代入方程(1.3)，得

$$X(x)T''(t)=a^2X''(x)T(t)$$

或

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}$$

以上等式左边的函数只依賴于 t，右边只依賴于 x；在这种情形下只有当左右两边既不依賴于 t 又不依賴于 x 时，才可能相等。这就是說，两边都等于同一常量，郎

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\frac{X''(x)}{X(x)}=\lambda$$

現在来确定常量 λ

(i)設 $\lambda>0$, 令 $\lambda=m^2$, 得到函数 $X(x)$ 所滿足的方程:

$$X''(x)-m^2X(x)=0 \tag{1.7}$$

它是一个常系数二阶綫性齐次微分方程。再利用边值条件(1.4):

$$u(x,t)|_{x=0}=X(x)T(t)|_{x=0}=0$$

$$u(x,t)|_{x=l}=X(x)T(t)|_{x=l}=0$$

因为 $T(t)$ 与变量 x 无关, 故以上条件化为

$$X(0)=X(l)=0.$$

即問題化为解常微分方程的边值問題:

$$\begin{cases} X''(x)-m^2X(x)=0 \\ X(0)=0 \\ X(l)=0 \end{cases}$$

方程(1.7)的特征方程为 $r^2-m^2=0$, 故得 $r=\pm m$; 因此(1.7)的解为

$$X(x)=c_1e^{mx}+c_2e^{-mx}$$

由于 $X(0)=0$, 得到

$$c_1+c_2=0$$

又由于 $X(l)=0$, 得到

$$c_1e^{ml}+c_2e^{-ml}=0$$

由此定出 $c_1=c_2=0$, 即 $X(x)\equiv0$; 从而 $u(x,t)\equiv0$。我們不研究这个解。

(ii)設 $\lambda=0$, 則得函数 $X(x)$ 所滿足的方程

$$X''(x)=0$$

其解为

$$X(x)=c_1x+c_2$$

由于 $X(0)=0$, 得到 $c_2=0$。又由于 $X(l)=0$, 得到 $c_1l=0$, 所以 $c_1=0$。即仍有 $X(x)\equiv0$。

(iii)設 $\lambda<0$, 令 $\lambda=-m^2$, 得到函数 $X(x)$ 所滿足的方程:

$$X''(x)+m^2X(x)=0.$$

其特征方程为 $r^2+m^2=0$，即 $r=\pm mi$；由此得到

$$X(x)=c_1\cos mx+c_2\sin mx$$

利用 $X(0)=0$ 得 $c_1=0$，又 $X(l)=0$ 得 $c_2\sin ml=0$。若 $c_2=0$ 则又有 $X(x)\equiv 0$；故 $c_2\neq 0$，因此只有 $\sin ml=0$，从而

$$ml=n\pi \quad ,\ n=0,\pm 1,\pm 2,\cdots$$

即

$$m=\frac{n\pi}{l} \qquad n=0,\ \pm 1,\pm 2,\cdots$$

但当 $n=0$ 时，$m=0$，由此又得到 $X(x)\equiv 0$；故 $n\neq 0$。又当 n 取負値和 n 取正値时，解 $c_2\sin\frac{n\pi}{l}x$ 只差一个正負号，但由于 c_2 为任意常数，因此这两个解实质上是相同的；我們只取 n 为正整数即可。即当 $\lambda=-m^2=-\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2$ 时，方程(1.7)有非零解

$$X(x)=c_2\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad n=1,2,3,\cdots$$

λ 叫作方程(1.7)的固有值，而 $X(x)$ 叫作固有函数。

现在再确定函数 $T(t)$。$T(t)$ 满足方程：

$$\frac{T''(t)}{a^2T(t)}=\lambda=-\frac{n^2\pi^2}{l^2}$$

即

$$T''(t)+\frac{a^2n^2\pi^2}{l^2}T(t)=0$$

由此得到

$$T(t)=c_3\cos\frac{an\pi}{l}t+c_4\sin\frac{an\pi}{l}t$$

代入(1.6)式得到

$$u(x,t)=\left(A\cos\frac{an\pi}{l}t+B\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中 $A=c_2c_3$, $B=c_2c_4$, 皆为任意常数。对于不同的 n 任意常数 A、B 也取不同的值，为此以 A_n、B_n 表示；其所对应的解用 $u_n(x,t)$ 表示，于是我們得到无穷多个解

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x,$$

$$n=1,2,3,\cdots.$$

所有这些解满足方程(1.3)及边値条件(1.4)；又由于方程(1.3)为綫性齐次的，則这些解的和仍满足方程(1.3)及边値条件(1.4)。即当級数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

收斂，且可以逐项对 t 和 x 微分两次时，其和仍满足方程(1.3)及边値条件(1.4)，我們用 $u(x,t)$ 表示它：

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (1.8)$$

最后是要确定任意常数 A_n、B_n 的値，使其满足初始条件(1.5)。由于

$$u(x,t)\big|_{t=0}=\varphi(x)$$

得
$$\varphi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

再由
$$\left.\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\right|_{t=0}=\psi(x)$$

得
$$\psi(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{an\pi}{l}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x$$

所得到的級数恰为給定函数 $\varphi(x)$、$\psi(x)$ 在区間 $[0,l]$ 上的正弦級数，而常数 A_n、$\frac{an\pi}{l}B_n$ 恰为其正弦級数的系数。利用欧拉-富里衮公式，得到

$$A_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

$$B_n=\frac{2}{an\pi}\int_0^l \psi(x)\sin\frac{n\pi}{l}x dx$$

将以上結果代入(1.8)式中,卽可得到滿足方程(1.3)及附加条件(1.4)、(1.5)的特解。

IV. 解的物理意义 公式(1.8)給出函数 $u(x, t)$ 的級数形式:

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

引用調和振动:

$$A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t=N_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\delta_n\right)$$

其中 N_n 为振幅, δ_n 为初相。$u_n(x, t)$ 可以写成

$$u_n(x,t)=\left(A_n\cos\frac{an\pi}{l}t+B_n\sin\frac{an\pi}{l}t\right)\sin\frac{n\pi}{l}x=$$

$$=N_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\delta_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

当 $t=t_0$ 时 $u_n(x,t_0)=N_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t_0+\delta_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$, 这表示任何一个时刻弦的形状都是一个正弦波。而当 $x=x_0$ 时, $u_n(x_0, t)=$ $=\left(N_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0\right)\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\delta_n\right)$, 这表示弦上每一点作簡諧振动,振幅是 $N_n\sin\frac{n\pi}{l}x_0$, 而頻率 $\omega_n=\frac{an\pi}{l}$。卽 $u_n(x, t)$ 代表一个調和振动,初相为 δ_n, 振幅为 $N_n\sin\frac{n\pi}{l}x$, 它依賴于弦上各点的位置,振动的頻率为 $\omega_n=\frac{an\pi}{l}$。ω_n 的数值只和弦本身的性质有关,和引起振动的因素无关,我們称这种頻率为弦的固有頻率。$N_n\sin\left(\frac{an\pi}{l}t+\delta_n\right)\sin\frac{n\pi}{l}x$ 叫叫第 n 个調和素,它代表一个駐波。在点 $x=0, \frac{l}{n}, \frac{2l}{n}, \cdots, \frac{n-1}{n}l, l$

处，第 n 个調和素的振幅 $N_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ 为零，这种点叫作第 n 个調和素的节点。此外，在点 $x=\frac{l}{2n},\ \frac{3l}{2n},\ \frac{5l}{2n},\cdots,\frac{(2n-1)l}{2n}$ 处，第 n 个調和素的振幅达到最大，这种点叫作第 n 个調和素的波腹。总之，弦的振动可以看成由以上調和振动所集成。在弦的振动过程中，所发出的声音乃是对应于这些駐波的那些单音的迭合。

V. 强迫振动　現在研究两端固定的弦在受外力作用时的强迫振动現象。卽求問題

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}+f(x,t)\\ u\,|_{x=0}=0,\ u\,|_{x=l}=0\\ u\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

的解。由于方程、边値条件及初始条件都是綫性的，故問題的解可由两部分迭加而成。卽令 $u(x,t)=v(x,t)+w(x,t)$，其中 $v(x,t)$ 滿足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 v}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2}+f(x,t) & (1.9)\\ v\,|_{x=0}=0,\quad v\,|_{x=l}=0 & (1.10)\\ v\Big|_{t=0}=0,\ \dfrac{\partial v}{\partial t}\Big|_{t=0}=0 & (1.11)\end{cases}$$

它給出純强迫振动，而函数 $w(x,t)$ 滿足

$$\begin{cases}\dfrac{\partial^2 w}{\partial t^2}=a^2\dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2}\\ w\,|_{x=0}=0,\quad w\,|_{x=l}=0\\ w\Big|_{t=0}=\varphi(x),\ \dfrac{\partial w}{\partial t}\Big|_{t=0}=\psi(x)\end{cases}$$

它給出自由振动。不难驗証 $u=v+w$ 卽为原定解問題的解。物理上，卽将强迫振动看成是由两个振动組成的，其中一个是强迫振动，它只由外力的作用引起，而在初始时刻弦靜止不动。另一个是自由振动，它由

弦的初始颤动引起。

函数 w 的求法已經講过，問題只在于求函数 v，与自由振动的研究方法一样，令

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}X_n(x)T_n(t)$$

由边值条件(1.10)知 $X_n(x)$ 应該滿足条件

$$X_n(0)=X_n(l)=0$$

由Ⅲ段知 $X_n(x)=c_n\sin\frac{n\pi}{l}x$ 可以滿足这个条件，因此我們可取

$$v(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x \qquad (1.12)$$

将級数(1.12)代入方程(1.9)，我們得到

$$\sum_{n=1}^{\infty}T_n''(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=-a^2\sum_{n=1}^{\infty}T_n(t)\left(\frac{n\pi}{l}\right)^2\sin\frac{n\pi}{l}x+f(x,t)$$

即

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}\left\{T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)\right\}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

将函数 $f(x,t)$ 看作 x 的函数，并将其展成以下形状的富里哀級数

$$f(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x$$

其中系数 $f_n(t)$ 由下列公式决定：

$$f_n(t)=\frac{2}{l}\int_0^l f(x,t)\sin\frac{n\pi}{l}x\,dx$$

由此有

$$\sum_{n=1}^{\infty}f_n(t)\sin\frac{n\pi}{l}x=\sum_{n=1}^{\infty}\left[T_n''(t)+\left(\frac{an\pi}{l}\right)^2T_n(t)\right]\sin\frac{n\pi}{l}x$$

从而我們得到确定函数 $T_n(t)$ 的方程