华东地区高等农林水院校
教学管理研究会《概率论与数理统计》编写组

高等农林院校通用教材

概率论与数理统计

上海交通大学出版社

高等农林水院校通用教材

概率论与数理统计

华东地区高等农林水
院校教学管理研究会
《概率论与数理统计》编写组　编

上 海 交 通 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书是华东地区高等农林水院校教学管理研究会组织编写的数学通用教材之一——《概率论与数理统计》。

概率论部分包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律及中心极限定理等五章；数理统计部分包括数理统计的基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、一元线性回归分析等五章。每章附有一定数量的习题，书末附有参考答案。本书还有一个附录，介绍了国际通用的统计分析软件 SAS/STAT。

本书除适合用作农、林、水产院校本科生及部分专业研究生的教材外，也可供其他各类专业学生及广大科技工作者参考使用。

概率论与数理统计

上海交通大学出版社出版发行

上海市番禺路 877 号　邮政编码 200030

电话　64281208　传真　64683798

全国新华书店经销

常熟文化印刷厂·印刷

开本:850×1168(mm)1/32　印张:10　字数:257 千字

版次:1998 年 6 月　第 1 版

印次:1998 年 8 月　第 1 次　印数:1—7000

ISBN 7-313-01984-X/O·135

定价：12.50 元

《概率论与数理统计》编写组成员名单

主　　编　刘宗杰(南京林业大学)
副 主 编　徐凤君(南京农业大学)
　　　　　毕守东(安徽农业大学)
　　　　　蒋兴国(扬州大学农学院)
参编人员　汪宏喜(安徽农业大学)
　　　　　周　宏(南京农业大学)
　　　　　高天青(上海水产大学)
　　　　　蒋华松(南京林业大学)
主　　审　孙讷正(山东大学)

序

在世界新技术革命浪潮的推动下，农业科技的发展日新月异。数学在农业科学技术的发展过程中，已成为不可缺少的重要工具：数量遗传、病虫害预测、灾害性天气预报、产量预测、土壤调查和土地规划、技术经济分析、农林水科学试验所得数据的统计分析等诸多领域都离不开数学。

在人类文明即将跨入21世纪之际，国家教委提出了高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革的计划，华东地区高等农林水院校积极投入了这项宏大的教改工程，南京农业大学、安徽农业大学、南京林业大学、上海水产大学等校承担了国家教委"高等教育面向21世纪教学内容和课程体系改革"的研究项目。随着教育研究与教学改革的深入开展，我们组织了华东地区部分高等农林水院校的专家教授编写《高等数学》、《线性代数》、《概率论与数理统计》这三门课程的系列教材，以进一步促进华东地区数学教学改革的进程。

华东地区高等农、林、水院校教学管理研究会历来重视数学课程的教学改革，有关院校团结协作，经常组织开展数学教学的研究工作，取得了较为显著的成绩。在"华东地区高等农林水院校数学系列课程教材建设与改革研讨会"的讨论基础上，我们组织编写这套系列教材，也是想以数学教学改革为突破口，推动华东地区高等农林水院校基础学科的教学改革，使在面向21世纪教学内容与课程体系改革的进程中，教学质量与水平能上一个新的台阶。

华东地区高等农林水院校　教学管理研究会

蒋宝庆（理事长）　苏惠民（副理事长兼秘书长）　徐宏稳（副理事长）

1997年10月1日

前　　言

本书是华东地区高等农林水产院校教学管理研究会统一组织编写的概率论与数理统计教材。

全书分概率论与数理统计两部分，两部分并重，篇幅相当。其中概率论部分包括随机事件及其概率、随机变量及其分布、多维随机变量及其分布、随机变量的数字特征、大数定律与中心极限定理等五章；数理统计部分包括数理统计的若干基本概念、参数估计、假设检验、方差分析、一元回归分析等五章。每章配有适量的习题，书末附有答案。

刘宗杰教授（南京林业大学）任本书主编，徐凤君副教授（南京农业大学）、毕守东副教授（安徽农业大学）及蒋兴国讲师（扬州大学农学院）任副主编。

博士生导师、山东大学孙讷正教授任本书主审。

本书参编人员有南京林业大学刘宗杰（第一及第六章）、蒋华松（附录）、南京农业大学徐凤君（第二章）、周宏（第八章）、安徽农业大学毕守东（第三章）、汪宏喜（第七章）、上海水产大学高天青（第九及第十章）、扬州大学农学院蒋兴国（第四及第五章）。全书正文及附录由刘宗杰统稿后编定，习题部分由徐凤君统稿编定。

本书编写的主导思想是：

(1) 所选内容是概率论与数理统计中最基本的理论与方法，通过适当的删、增，使本书能用作农、林、水产院校各专业本科生及部分专业研究生的教材，也可供其他各类院校学生及广大科技工作者参考使用。

(2) 由于学生是初次接触随机性数学，要使他们在短短的几十学时内对概率论及数理统计的基本思想、基础理论有清晰透彻的理解，确实是一件比较困难的事情。与《高等教学》、《线性代数》

等其他数学课程相比，除了教师在课堂教学中的透彻剖析与讲解之外，本课程更依赖于学生对概率论与数理统计基本思想、基础理论的反复咀嚼体会，对其基本概念的反复推敲。因而学生手头就更需要有一本易于阅读和理解的教材。所以本书在编写时，特别重视对概率论及数理统计基本思想及基础理论的剖析与阐释，并力求做到语言准确（避免歧义）、通俗（避免艰涩）、行文通畅，以使学生通过本教材的阅读，比较容易地适应随机性数学的学习。

本书有一个附录，介绍了 SAS/STAT 软件，以使学生了解如何使用这一软件在微机上求解数理统计问题。考虑到所培养的是面向 21 世纪的人才，我们认为，通过适当途径让学生学会使用这一有权威性的统计软件是完全必要的。

由于编写时间仓促，又限于编者水平，缺点与错误在所难免，如蒙指正，不胜感谢。

刘宗杰

1997 年 8 月 31 日于南京林业大学

目　　录

第一章　随机事件及其概率 ………………………………… 1
§1.1　随机现象及其统计规律 ……………………………… 1
§1.2　随机事件，事件的关系及运算 ………………………… 2
§1.3　事件的概率 …………………………………………… 8
§1.4　古典概型与几何概型 ………………………………… 13
§1.5　条件概率与乘法定理 ………………………………… 19
§1.6　全概率公式与贝叶斯公式 …………………………… 22
§1.7　事件的独立性 ………………………………………… 25
§1.8　n 重独立重复试验，伯努里概型 ……………………… 27
习题一 …………………………………………………… 30
第二章　随机变量及其分布 …………………………………… 32
§2.1　随机变量的概念 ……………………………………… 32
§2.2　随机变量的分布函数 ………………………………… 35
§2.3　离散型随机变量及其分布列 ………………………… 37
§2.4　若干常见的离散型随机变量的分布列 ……………… 39
§2.5　连续型随机变量及其概率密度 ……………………… 46
§2.6　若干常见的连续型随机变量的概率密度 …………… 49
§2.7　随机变量的函数的分布 ……………………………… 58
习题二 …………………………………………………… 62
第三章　多维随机变量及其分布 ……………………………… 65
§3.1　二维随机变量及其分布函数 ………………………… 65
§3.2　二维离散型随机变量及其分布列 …………………… 67
§3.3　二维连续型随机变量及其概率密度 ………………… 69
§3.4　边缘分布 ……………………………………………… 74
§3.5　随机变量的独立性 …………………………………… 78

§3.6　二维随机变量函数的分布 …… 82
§3.7　数理统计中的某些常用分布 …… 87
习题三 …… 92
第四章　随机变量的数字特征 …… 95
§4.1　数学期望 …… 95
§4.2　方差 …… 105
§4.3　协方差与相关系数 …… 110
§4.4　矩、偏斜系数与峰突系数 …… 118
习题四 …… 119
第五章　大数定律与中心极限定理 …… 123
§5.1　契比雪夫不等式 …… 123
§5.2　大数定律 …… 125
§5.3　中心极限定理 …… 130
习题五 …… 135
第六章　数理统计的若干基本概念 …… 136
§6.1　总体与样本 …… 136
§6.2　理论分布函数与经验分布函数 …… 138
§6.3　统计量的概念 …… 140
§6.4　抽样分布 …… 142
习题六 …… 146
第七章　参数估计 …… 148
§7.1　点估计的矩法 …… 148
§7.2　极大似然估计法 …… 152
§7.3　估计量的评价标准 …… 159
§7.4　参数的区间估计 …… 164
习题七 …… 172
第八章　假设检验 …… 175
§8.1　假设检验的基本思想 …… 175
§8.2　单个正态总体的参数检验 …… 179
§8.3　两个正态总体的参数检验 …… 188

§8.4　正态概率纸检验与偏峰态检验 …………………… 195
§8.5　χ^2 拟合优度检验………………………………………… 200
习题八………………………………………………………… 205
第九章　方差分析……………………………………………… 208
§9.1　单因素试验的方差分析 ……………………………… 208
§9.2　无交互作用的双因素试验的方差分析 ………… 219
§9.3　一般情形下的双因素试验的方差分析 ………… 228
习题九………………………………………………………… 234
第十章　一元回归分析………………………………………… 237
§10.1　线性相关关系的估计问题…………………………… 238
§10.2　线性相关关系的检验………………………………… 244
§10.3　预测与控制……………………………………………… 249
§10.4　利用线性相关关系研究非线性相关关系……… 255
习题十………………………………………………………… 261
附录　SAS/STAT 简介 …………………………………… 263
习题答案…………………………………………………………… 281
附表………………………………………………………………… 292

第一章 随机事件及其概率

§1.1 随机现象及其统计规律

人们在各种实践活动中，会遇到两类现象：**确定性现象**与**随机现象**。

在一个大气压下，将一壶水加热到 100℃，水必沸腾。这是确定性现象。

若抛掷一枚均匀的硬币，则其结果有国徽朝上及国徽朝下两种可能。这样，国徽朝上(同样地，国徽朝下)便是一种有可能出现，但未必一定出现的现象。在一定条件下有可能出现、但未必一定出现的现象称为**随机现象**。

设在一个罐中装有五个球，其中两个是红球，两个是蓝球，一个是黄球。若从罐中任取一球，那末，取得红球、取得蓝球及取得黄球便都是随机现象。

我们把一组条件的实现称为**试验**。这样，在一个大气压下把水加热到 100℃ 便是一个试验；抛掷一枚均匀的硬币是一个试验；在上面所描述的罐中任取一球也是一个试验。

如果试验的结果完全由试验的条件所确定，则称之为确定性试验。在一个大气压下将水加热到 100℃ 便是一个确定性试验。

如果一个试验符合下述条件：

(1) 可以重复进行任意多次；

(2) 试验的结果有多种可能性；

(3) 在试验之前知道一切有可能出现的结果，但却无法断定试验后的具体结果，便称这一试验为**随机试验**。

对于一个随机试验来说，每次试验的结果虽然具有不确定性，

无规律可言，但若将试验重复进行大量次数，并记录下各次试验的结果，就会发现其中存在着规律性。例如，若抛掷一枚均匀的硬币大量次数，就会发现国徽朝上的次数约占试验总次数的 1/2。又如，重复进行上面描述的罐中取球试验大量次（从罐中任取一球之后，记录其颜色，再放回罐中，作下一次试验），就会发现红球出现的次数及蓝球出现的次数约各占试验总次数的 2/5，而黄球出现的次数则约占试验总次数的 1/5。

随机现象在大量次试验中所表现出来的规律性，称为随机现象的**统计规律性**。

事实上，随机现象的统计规律是事物本质特性的一种反映。例如，在大量次投币试验中，国徽朝上的次数约占试验总次数的 1/2，正是硬币均匀性的一种反映。在上述的大量次罐中取球试验中，红球、蓝球和黄球出现的次数各约占试验总次数的 2/5、2/5 和 1/5，正是罐中各色球之个数间比例关系的一种反映。这样，我们便可通过研究随机现象的统计规律来揭示事物的本质特性。事实上，这种方法已成为多门学科的重要支柱。例如物理学中的统计力学、生物学中的数量遗传学等学科，就是在这个基础上建立和发展起来的。

概率论就是研究随机现象之统计规律的一门数学学科。数理统计则以概率论为基础，研究如何根据大量次试验所得到的数据，推断事物本质特性的各种数学方法。

由于概率论和数理统计中所讨论的试验都是随机试验，所以在本书中，随机试验就简称为试验。

§1.2 随机事件，事件的关系及运算

设 $\mathscr{E}$ 是一个随机试验，A 是 $\mathscr{E}$ 试验中可能出现、但未必一定出现的结果，则称 A 是试验 $\mathscr{E}$ 的一个**随机事件**。

设 $\mathscr{E}$ 是抛掷一枚均匀硬币的试验，那末“国徽出现”、“国徽不出现”便都是 $\mathscr{E}$ 的随机事件。若 $\mathscr{E}$ 是上节所描述的罐中取球试验，

那末“取得红球”、“取得蓝球”及“取得黄球”都是 $\mathscr{E}$ 的随机事件。

随机事件也简称为**事件**，通常用大写的拉丁字母 $A, B, C, \cdots$（可带有下标）表示。

设 $\mathscr{E}$ 是一个随机试验，我们称每次试验后必定出现的事件为 $\mathscr{E}$ 的**必然事件**，称每次试验后必不出现的事件为 $\mathscr{E}$ 的**不可能事件**，分别记为 U 和 V。

例如，设 $\mathscr{E}$ 是抛掷一颗骰子的试验，那末“出现的点数$\leqslant 6$”便是 $\mathscr{E}$ 的必然事件，“出现的点数>6”便是 $\mathscr{E}$ 的不可能事件。

为了方便起见，今后我们把必然事件 U 及不可能事件 V 当作两个特殊的随机事件。

下面，我们来介绍事件间的关系及运算。

(1) 设 A、B 都是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，如果 A 实现时 B 就实现（亦即：若 B 不实现，A 就不实现），便说事件 $\boldsymbol{A}$ **含于** $\boldsymbol{B}$，或事件 $\boldsymbol{B}$ **包含** $\boldsymbol{A}$，记作

$$A \subset B, \text{或 } B \supset A。$$

例如，设 $\mathscr{E}$ 是抛掷一颗均匀的骰子的试验，A 表示所得点数$\leqslant 2$的事件，B 表示所得点数$\leqslant 4$ 事件，则有 $A \subset B$。

设 A 是试验 $\mathscr{E}$ 的任一事件，由于 A 实现时 U 必实现，故有 $A \subset U$；又由于 A 不实现时 V 也不实现，故有 $V \subset A$。这样，对于 $\mathscr{E}$ 的任一事件 A 必有

$$V \subset A \subset U。 \tag{1-1}$$

(2) 设 A、B 是试验 $\mathscr{E}$ 的两个事件，如果它们既满足 $A \subset B$，又满足 $B \subset A$，便说 A 与 B **相等**，记为 $A = B$。

(3) 设 A 是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，那末“A 不实现”也是 $\mathscr{E}$ 的事件，称为 A 的**对立事件**，记为 $\bar{A}$。

按照对立事件的定义，明显地有

$$\bar{\bar{A}} = A, \tag{1-2}$$

及

$$\bar{V} = U, \bar{U} = V。 \tag{1-3}$$

(4) 设 A、B 都是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，如果在每次试验中 A、B 都不能同时实现，则说 A、B **互不相容**。

显然，若两个事件互相对立，它们必互不相容；但是两个互不相容的事件却未必互相对立。例如，对于上节所描述的罐中取球试验来说，取得红球和取得蓝球是两个互不相容的事件，但却不是互相对立的事件。

两个事件互不相容的概念可以推广到多个乃至可列无穷多个事件上去：如果这些事件中的任意两个都是互不相容的，便说这些事件是两两互不相容的。

(5) 设 A 是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，$A \neq V$，如果对于 $\mathscr{E}$ 的任何一个事件 B，只要 $B \neq V$ 且 $B \subset A$，便有 $B = A$，便说 A 是 $\mathscr{E}$ 的**基本事件**。换言之，如果在 $\mathscr{E}$ 的所有事件中，除了不可能事件之外，没有比 A “更小”的事件含于 A，A 便是 $\mathscr{E}$ 的基本事件。

试验 $\mathscr{E}$ 的所有基本事件构成的集合称为 $\mathscr{E}$ 的**基本空间**。

例如，设 $\mathscr{E}$ 表示抛掷一颗骰子的试验，ω_i 表示出现点数为 i 的事件，其中 $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$，则每个 ω_i 便都是 $\mathscr{E}$ 的基本事件，集合 $\{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4, \omega_5, \omega_6\}$ 便是 $\mathscr{E}$ 的基本空间。

显然，一个试验的任一非不可能事件必是由基本事件所组成的。例如，在上述抛掷骰子的试验中，“出现的点数为偶数”这一事件便由 $\omega_2, \omega_4, \omega_6$ 这三个基本事件所组成。这样，一个试验的任何一个非不可能事件便必是其基本空间的一个子集。由于必然事件由所有的基本事件所组成，所以从集合论的观点看，必然事件便与基本空间相等，正因为此，我们把基本空间也记为 U。

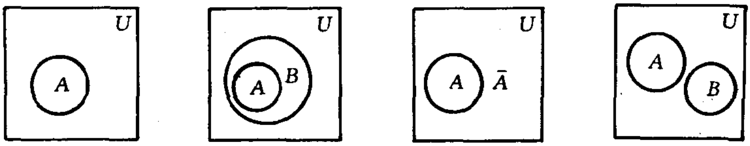
若以图 1-1 中各个方框所界定的点集表示一个试验的基本空间，以框中的点表示这个试验的基本事件，那末，图 1-1 之 a.b.c.d 便分别表示了事件、事件间的包含关系、对立关系及互不相容关系。

(6) 设 A、B 都是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，称“A、B 中至少有一个实现”这一事件为“A 与 B 的**并**”或“A 与 B 的**和**”，记为 $A \cup B$ 或 $A + B$。

根据这一定义，明显有

$$A \cup \bar{A} = U \text{。} \tag{1-4}$$

又若 $A \subset B$，则



a. 事件 A　　b. $A \subset B$　　c. 对立　　d. 互不相容

图 1-1

$$A \cup B = B 。\tag{1-5}$$

两个事件之并的概念可以推广到任意有限多个事件乃至可列无穷多个事件上去:

设 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 是试验 $\mathscr{E}$ 的 n 个事件,称"这些事件中至少有一个实现"的事件为"所有这些事件的并或和",记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,也记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_n$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{n} A_i$ 。

设 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 为试验 $\mathscr{E}$ 的一列事件,称"这列事件中至少有一个实现"的事件为"这列事件的并或和",记为 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_i \cup \cdots$ 或 $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i$,也记为 $A_1 + A_2 + \cdots + A_i + \cdots$ 或 $\sum\limits_{i=1}^{\infty} A_i$ 。

(7) 设 A、B 都是试验 $\mathscr{E}$ 的事件,称"A、B 在一次试验中同时实现"这一事件为"A 与 B 的**交或积**",记为 $A \cap B$, $A \cdot B$ 或 AB。

显然,若 A、B 互不相容,则

$$A \cdot B = V,\tag{1-6}$$

特别地,

$$A \cdot \bar{A} = V。\tag{1-7}$$

又若 $A \subset B$,则

$$A \cdot B = A,\tag{1-8}$$

特别地有

$$A \cdot U = A, \quad A \cdot A = A。\tag{1-9}$$

两个事件之交的概念可以推广到有限多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_n$ 乃至可列无穷多个事件 $A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots$ 上去,分别采用下述两组记号:

$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_n,\ \bigcap_{i=1}^{n}A_i,\ A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_n,\ A_1A_2\cdots A_n;$$

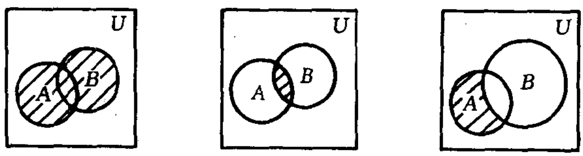
$$A_1\cap A_2\cap\cdots\cap A_i\cap\cdots,\ \bigcap_{i=1}^{\infty}A_i,\ A_1\cdot A_2\cdot\cdots\cdot A_i\cdots,\ A_1A_2\cdots A_i\cdots。$$

(8) 设 A、B 都是试验 $\mathscr{E}$ 的事件，称"在一次试验中 A 实现而 B 不实现"的事件为"A 与 B 的**差**"，记为 $A-B$。

按这一定义，显然有

$$A-B=A\cdot\bar{B}。\tag{1-10}$$

若以图 1-2 各方框所界定的点集表示一个试验的基本空间，以框中的点表示试验的基本事件，这样，图 1-2 之 a. b. c. 中的阴影部分便分别表示了 $A\cup B$, $A\cap B$ 及 $A-B$。



a. $A\cup B$　　b. $A\cap B$　　c. $A-B$

图 1-2

利用事件间的运算，我们可以把一个较为复杂的事件用较简单的事件表示出来。

例 1-1　设飞机可分为三个部位，当第一部位被击中一弹，或第二部位被击中两弹，或第三部位被击中三弹时，飞机被击落。今有 A、B 两炮同时射击一架敌机，试用两炮击中敌机的不同部位的事件，表示敌机被击落的事件。

解　令 A_0 表示 A 炮未击中敌机的事件，以 A_i 表示 A 炮击中敌机第 i 部位的事件($i=1,2,3$)。令 B_0 表示 B 炮未击中敌机的事件，以 B_i 表示 B 炮击中敌机第 i 部位的事件($i=1,2,3$)。再令 C 表示敌机被击落的事件，则有

$$C=A_0B_1\cup A_1B_0\cup A_1B_1\cup A_1B_2\cup A_1B_3\cup A_2B_1\cup A_2B_2\cup A_3B_1。$$

事件间的关系及运算除满足(1-1)～(1-10)各式之外，还满足下述各项运算规律：

(1) 加法交换律：$A\cup B=B\cup A$；

(2) 乘法交换律：$A\cap B=B\cap A$；

(3) 加法结合律：$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$；

(4) 乘法结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$；

(5) 第一分配律：$A\cdot(B\cup C)=AB\cup AC$；

(6) 第二分配律：$A\cup(B\cdot C)=(A\cup B)\cdot(A\cup C)$；

(7) 第一对偶律：$\overline{A\cup B}=\bar{A}\cap\bar{B}$；

(8) 第二对偶律：$\overline{A\cap B}=\bar{A}\cup\bar{B}$。

其中(1)～(4)各律是显然成立的。至于(5)～(8)各律，我们仅对第二分配律及第一对偶律加以证明，其余两律的证明请读者自行给出。

第二分配律的证明

设左端实现，则 A 与$B\cdot C$ 至少有一个实现。若 A 实现，则右端的 $A\cup B$ 及$A\cup C$ 都实现，从而右端实现。若 $B\cdot C$ 实现，则 B 与C 都实现，从而右端的 $A\cup B$ 及$A\cup C$ 都实现，于是右端实现。这样便得左$\subset$右。

若右端实现，则 $A\cup B$ 及$A\cup C$ 都实现，从而或有 A 实现，或有 B、C 都实现。若 A 实现，则左端实现；若 B、C 都实现，则因 $B\cdot C$ 实现，可知左端实现。这样便得右$\subset$左。

根据左$\subset$右及右$\subset$左，可知第二分配律成立。

第一对偶律的证明

若左端实现，则 $A\cup B$ 不实现，从而 A、B 无一能实现，亦即 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 都实现，于是右端实现。这样便得左$\subset$右。

若右端实现，则 $\bar{A}$、$\bar{B}$ 都实现，即 A、B 都不实现，从而 $A\cup B$ 不实现，于是左端实现。这样便得右$\subset$左。

根据左$\subset$右及右$\subset$左，可知第一对偶律成立。

利用事件的运算规律，可将较复杂的事件间的算式化简。

例 1-2 化简下列各式：(1) $\bar{A}-\bar{B}$；(2) $\overline{\bar{A}\cap\bar{B}}$；(3) $(A-B)\cup AB$；(4) $(A-B)\cdot AC$。

解