LISANSHUXUE

离散数学

杨凤杰 姜云飞 刘叙华 编著

吉林大学
出版社

高职数学

吉林大学出版社教材基金赞助

离 散 数 学

杨凤杰　姜云飞　刘叙华　编著

吉 林 大 学 出 版 社

内 容 提 要

本书全面地介绍了有关离散数学的基础知识，内容包括(1)集合论，(2)数理逻辑，(3)图论，(4)数论，(5)群、环、域，(6)格与布尔代数。

本书既注重基础知识的介绍，又注重对学生能力的培养。为了开拓学生思维能力，本书每节后面精选了一些习题。通过这些习题，还可以使学生更好地理解所学的知识，为今后的课程打下良好的基础。另外，为了使读者掌握更多的相关知识，书后列出一些参考书目，供有余力的读者参阅。

本书可作为高等院校计算机系各专业离散数学课程的教材和参考书，也可以供其它专业学生及从事计算机工作的有关人员阅读。

离 散 数 学

杨凤杰　姜云飞　刘叙华　编著

责任编辑、责任校对：杨鲲　　封面设计：孙　群

吉林大学出版社出版　　吉林大学出版社发行

（长春市东中华路 37 号）　　吉林工业大学印刷厂印刷

开本：787×1092 毫米　1/32　1998 年 5 月第 1 版

印张：9.25　　1998 年 5 月第 1 次印刷

字数：227 千字　　印数：1—1500 册

ISBN 7-5601-2124-1/O・232　　定价：11.00 元

前　言

离散数学虽然是近几十年来产生的一门新课，但是就其数学内容来说却不是新的，有些内容甚至是很古典的。这些古典的数学，在强大的计算机科学的刺激下，获得了新的生命和新的自身价值。

离散数学是一门计算机科学的专业理论基础课，共包含以下八章内容：

第一章介绍集合，包含映射和关系等基础知识。

第二章和第三章属于数理逻辑部分，这两章主要介绍命题逻辑和一阶逻辑的基本知识，我们的注意力不在于数理逻辑这门科学本身所着重的问题，而在于将数理逻辑做为一种数学工具，应用在计算机科学上所应掌握的必备知识。

第四章介绍图论方面的基本知识。

第五章介绍整数的理论。

第六章、第七章属于近世代数的群环域部分。

第七章的多项式部分是为介绍有限域作准备的。

第八章介绍布尔代数和格论方面的基础知识。

鉴于学生学习本课时，是初次接触较抽象的数学，所以我们一直坚持让教材尽量容易懂和少而精，避免内容庞杂和名词罗列。我们的目的是只讲授各个内容的最基本的知识，为学生今后进一步学习打下基础。因此，学生在学习本课时，除了记住并理解基本的概念和知识外，更重要的是培养自己的数学思维能力。希望读者在读本书时，在众多的概念中要找到最重要的，在众多的定理中要找到最根本的，将这些少量的概念和定理能够透彻地理解，自如地运用，就达到了基本掌握离散数学的目的。很显然，要想在计算机科学的某个领域深造下去，还必须去读离散数学中相应内容的更深的论著。

在本书出版过程中得到吉林大学教学科、吉林大学出版社的帮助和大力支持，作者在此向他们表示衷心的感谢！

由于作者水平有限，书中难免有不妥或错误之处，恳请读者指正。

作　者

1998.2于长春

目　　录

第一章 集 合

§1 基本概念

集合是数学中最基本的概念，1874 年德国著名数学家 Cantor(1845－1918)发表了一篇题为《关于所有实代数数所成集合的一个性质》的论文，开创了现代集合论的研究，在 Cantor 创立集合论的时候，有一个既基本又明显的问题却一直困惑着数学家们，那就是什么是集合？对于这个问题，没有一个严格的定义。Cantor 曾给集合下过定义，大体上是说：一条性质决定一个集合，所有满足此性质的个体称为该集合的元素。在此基础上，Cantor 建立了集合论体系，即朴素的集合论体系。对于 Cantor 的集合论体系，在 1902 年 Russell 发现了悖论，即著名的 Russell 悖论。为了避免悖论和推动集合论的发展，人们逐渐地建立起公理集合论体系，本书讲述的内容属于朴素集合论，它关于集合的定义是用描述性语言给出的：

定义 当我们讨论某一类对象的时候，就把这一类对象的整体称为集合。

通常用大写的英文字母表示集合的名称。

定义 集合中的对象称为*元素*。

通常用小写的英文字母表示元素。

定义 设 A 为集合，a 是集合 A 中元素，则记为 $a\in A$，读做 *a 属于 A*；若 a 不是集合 A 中的元素，则记以 $a\notin A$，读做 *a 不属于 A*。

例如，所有自然数做成一个集合 A，所有多项式做成一个集合 B。

我们可以说，$3\in A$，$ax+b\in B$，$0.5\notin A$。

在集合论中，元素，集合及属于这三个概念是最基本的概念，其它概念都是由它们定义出来的。一个集合中的元素是各不相同的(无重复性)，另外，集合中的元素没有先后次序(无次序性)，$\{a,b\}$和$\{b,a\}$是同一集合。

集合一般有两种表示方法：

1. 列举法：列出集合中的全体元素，元素之间用逗号分开，然后用花括号括起来。

例如，设 A 是以 a,b,c,d 为元素的集合，则可表示为 $A=\{a,b,c,d\}$。

2. 描述法：用集合中元素所满足的性质表示集合。

例如，在直角坐标系中，以原点为圆心的单位圆圆周上所有点作成的集合 S 可表示如下：

$$S=\{(x,y)\mid x^2+y^2=1\}。$$

以上两种表示方法可以互相转化，例如，$\{x\mid x\text{ 是正整数}\}=\{1,2,\cdots,n,\cdots\}$。

定义 有限个元素做成的集合称为*有穷集*，无限个元素做成的集合称为*无穷集*，不含元素的集合称为*空集*，记为 ϕ。例如，$\phi\in\{\phi\}$，$\phi\notin\phi$。

定义 当 A,B 两个集合的元素完全一样时，则称集合 A,B *相等*，记为 $A=B$。

定义 设 A,B 是两个集合，若 A 的元素都是 B 的元素，则称 B *包含* A 或称 A 是 B 的*子集*，记为 $A\subseteq B$，若 $A\subseteq B$，且 $A\neq B$，则称 A 是 B 的*真子集*，记为 $A\subset B$。

例如，$\{1,2,3\}\subseteq\{1,2,3,4\}$，

$\{1,2,3\}\subset\{1,2,3,4\}$，

$\{1,2,3,4\}\subseteq\{1,2,3,4\}$

显然，对于任意两个集合 A、B，$A=B$ 的充要条件是 $A\subseteq B$ 且 $B\subseteq A$。这也是证明两个集合相等常用的方法。另外由定义可以看出空集是一切集合的子集且空集是唯一的。

定义 设 E 为一给定集合，如果限定所讨论的集合都是 E 的子集，则称 E 为全域集合，简称全集。这是一个相对性概念。

定义 设 A 是集合，A 的所有子集做成的集合称为 A 的幂集，记为 $\rho(A)$ 或 2^A。

例如，若 $A=\{a\}$，则 $\rho(A)=\{\phi,\{a\}\}$；$\rho(\phi)=\{\phi\}$。

显然，若 A 为有穷集，元素数为 n，则 2^A 的元素数为

$$C_n^0+C_n^1+\cdots+C_n^n=2^n$$

下面介绍集合中的几种运算：

差集：设 A，B 是两个集合，属于集合 A 而不属于集合 B 的所有元素组成的集合，称为 A 与 B 的差集，记为 $A-B$，即 $A-B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\notin B\}$。

直乘积：设 A，B 是两个集合，所有序偶 (x,y) 做成的集合（其中 x 是 A 中的元素，y 是 B 中的元素），称为 A，B 的直乘积，记为 $A\times B$，即 $A\times B=\{(x,y)\mid x\in A \text{ 且 } y\in B\}$。

并集：设 A，B 是两个集合，所有属于 A 或属于 B 的元素做成的集合，称为 A 和 B 的并集，记为 $A\cup B$，即 $A\cup B=\{x\mid x\in A \text{ 或 } x\in B\}$。

交集：设 A，B 是两个集合，由既属于 A 又属于 B 的元素做成的集合，称为 A 和 B 的交集，记为 $A\cap B$，即 $A\cap B=\{x\mid x\in A \text{ 且 } x\in B\}$。

余集：设 A 是一个集合，全集 E 与 A 的差集称为 A 的余集，记为 $\sim A$，即 $\sim A=\{x\mid x\in E \text{ 且 } x\notin A\}$。

不难证明，对于任意集合 A，B，C 有如下算律：

1. 等幂律：$A\cap A=A$，$A\cup A=A$。
2. 交换律：$A\cap B=B\cap A$，$A\cup B=B\cup A$。
3. 结合律：$(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$，$(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$。
4. 分配律：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$，
   $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$。
5. 吸收律：$A\cap(A\cup B)=A$，$A\cup(A\cap B)=A$。
6. 互补律：$A\cap\sim A=\phi$，$A\cup\sim A=E$。
7. De Morgan 律：$\sim(A\cap B)=\sim A\cup\sim B$，$\sim(A\cup B)=\sim A\cap\sim B$。
8. 同一律：$E\cap A=A$，$\phi\cup A=A$。
9. 零一律：$\phi\cap A=\phi$，$E\cup A=E$。
10. 双重否定律：$\sim\sim A=A$。

例如，我们来证明：$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

任取 $a\in A\cap(B\cup C)$，即 $a\in A$ 且 $a\in B\cup C$，亦即 $a\in A$ 且 $a\in B$ 或 $a\in C$，于是 $a\in A\cap B$ 或者 $a\in A\cap C$，故 $a\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$。即证得：

$$A\cap(B\cup C)\subseteq(A\cap B)\cup(A\cap C)$$

任取 $b\in(A\cap B)\cup(A\cap C)$，即 $b\in A\cap B$ 或者 $b\in A\cap C$，亦即 $b\in A$ 且 $b\in B$，或者 $b\in A$ 且 $b\in C$。总之 $b\in A$，且 $b\in B$ 或者 $b\in C$，即 $b\in A$ 且 $b\in B\cup C$，故 $b\in A\cap(B\cup C)$。即证得：

$$(A\cap B)\cup(A\cap C)\subseteq A\cap(B\cup C)$$

所以，$A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$。

其余算律可类似证明。

习 题

1. 设 $S=\{2,a,\{3\},4\}$，$R=\{\{a\},1,3,4\}$指出下面的写法哪些是对的，哪些是错的：

$\{a\}\in S$，$\{a\}\in R$，$\{a,4,\{3\}\}\subseteq S$，$\{\{a\},1,3,4\}\subset R$，$R=S$，$\{a\}\subseteq S$，$\{a\}\subseteq R$，$\phi\subseteq R$，$\phi\subseteq\{\{a\}\}\subseteq R\subseteq E$，$\{\phi\}\subseteq S$，$\phi\in R$，$\phi\subseteq\{\{3\},4\}$。

2. 写出下面集合的幂集合。

$\{a,\{b\}\}$，$\{1,\phi\}$，$\{X,Y,Z\}$。

3. 对任意集合 A,B，证明：

$\rho(A)\cup\rho(B)\subseteq\rho(A\cup B)$

$\rho(A)\cap\rho(B)=\rho(A\cap B)$

举例说明：$\rho(A)\cup\rho(B)\neq\rho(A\cup B)$。

§2 关 系

在日常生活中，象在数学中一样，关系的概念是一个基本概念。例如，在人群中有朋友关系，父子关系，同学关系等等；在数学中有相等关系，整除关系，小于关系，大于关系等等。不难看出，每一种关系都描述了某一集合中两个元素之间的一种特征，而这种特征也可以用一个集合描述出来。

定义 设 A,B 是两个集合，集合 $A\times B$ 的子集 R 称为 A,B 上的*二元关系*，当 $A=B$ 时，R 称为 A 上的二元关系，简称*关系*。对于 $a\in A,b\in B$，若 $(a,b)\in R$，则称 a,b 有关系 R，记为 aRb；若 $(a,b)\notin R$，则称 a,b 没有关系 R。

例如，自然数之间的大于关系$=\{(x,y)\mid x,y$ 是自然数并且 $x>y\}$

人群中的父子关系$=\{(x,y)\mid x,y$ 是人并且 x 是 y 的父亲$\}$

关系是一种特殊的集合，所以集合中的有关概念及运算在此仍然成立。

定义 设 A,B 是两个集合，R 为 A,B 上的二元关系。若 $R=\phi$，则称 R 为*空关系*；若 $R=A\times B$，则 R 称为*全关系*。

定义 设 A 为任意集合，I_A 是 A 上的二元关系，并且满足 $I_A=\{(a,a)\mid a\in A\}$，则称 I_A 为 A 上的*恒等关系*。

例如，设集合 $A=\{1,2\}$，

集合 A 上的全关系$=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$；

$I_A=\{(1,1),(2,2)\}$。

又如，设集合 $A=\{2,3,4,5\}$，集合 A 上的关系 R，S 分别为

$R=\{(a,b)\mid a,b$ 均是 A 中元素，且 a 整除 $b\}$，

$S=\{(a,b)\mid a,b$ 均是 A 中元素，且 $b=2a\}$，则

$R=\{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,4)\}$，

$S=\{(2,4)\}$，

$R\cap S=\{(2,4)\}=S$，

$R\cup S=\{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5),(2,4)\}=R$，

$R-S=\{(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$。

由定义容易证明：

若 R,S 是集合 A,B 上的两个二元关系，则 R,S 的交，并，差，余仍是 A,B 上的二元关系。

下面我们把二元关系推广到 n 元关系。

定义 设 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 为任意 n 个集合，则 $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ 的任意子集 R 称为 $A_1,A_2,\cdots,A_n$ 上的一个 *n 元关系*。当 $A=A_1=A_2=\cdots=A_n$ 时，R 称为 A 上的 n 元关系。

今后我们研究的都是二元关系，并且是同一集合上的二元关系。

定义 集合 A 上的关系 R 称为有*反身性*，如果对每个 $x\in A$，都有 xRx。

例如，数的相等关系，集合的子集关系具有反身性。父子关系，数的小于关系不具有反身性。

定义 集合 A 上的关系 R 称为有*对称性*，如果 xRy，则 yRx，其中 x,y 是 A 中的元素。

例如，同学关系，三角形相似关系具有对称性。集合上子集关系，数的小于关系不具有对称性。

定义 集合 A 上的关系 R 称为有*反对称性*，如果若有 xRy,yRx，就有 $x=y$，其中 x,y 是 A 中的元素。

例如，集合上子集关系，数的小于等于关系等具有反对称性。三角形相似不具有反对称性。

定义 集合 A 上的关系 R 称为有*传递性*，如果若有 xRy,yRz，就有 xRz，其中 x,y 是 A 中的元素。

例如，数的小于关系，集合的子集关系等具有传递性。平面上直线的垂直关系不具有传递性。

由定义可以看出：

(1) 不是对称的，并非是反对称的。也就是说，对于某种关系，可能既不是对称关系，又不是反对称关系。例如，集合 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $R=\{(1,2),(1,3),(3,1)\}$，R 既不是 A 上的对称关系，又不是 A 上的反对称关系。

(2) 对于某种关系，可能既是对称的，又是反对称的。例如，当集合 $A=\{1,2,3\}$，A 上的关系 $R=\{(1,1),(2,2),(3,3)\}$，这时 R 既是 A 上的对称关系，又是 A 上的反对称关系。

当 A 是有限集合时，关系除了用集合表示外，还可以用矩阵和图形来表示，这样做不仅直观，形象，更有利于对关系的研究，也便于计算机的存储。

定义 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，R 是 A 上的关系，称 n 阶方阵 $M_R=[r_{ij}]$ 为 R 的*关系矩阵*，其中

$$r_{ij}=\begin{cases}1, & \text{当 } a_iRa_j\\ 0, & \text{当 } a_i \text{ 与 } a_j \text{ 没有关系}\end{cases}$$

例如，设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是 A 上的一个关系，$R=\{(1,1),(1,2),(2,3),(2,4),(3,1),(3,3),(3,4),(4,2)\}$，则

$$M_R=\begin{bmatrix}1&1&0&0\\0&0&1&1\\1&0&1&1\\0&1&0&0\end{bmatrix}$$

定义 设 $A=\{a_1,a_2,\cdots,a_n\}$，R 是 A 上的一个关系，用 n 个点表示元素 $a_1,a_2,\cdots,a_n$，这些点称为*结点*。如果 a_iRa_j，那么由结点 a_i 到结点 a_j 作一条有向弧，箭头指向 a_j，这样的图形称为

R 的关系图。从结点 a_i 到结点 a_i 的有向弧称为自回路。

上例中的关系 R 的关系图如图 1.2.1 所示。

一般地，用关系矩阵与关系图来判断一个关系 R 是否是反身的，对称的，反对称的，传递的，有如下规律：

(1) 若关系 R 具有反身性，当且仅当在关系矩阵中，主对角线上元素全为 1。在关系图中每个结点都有一条自回路。

(2) 若关系 R 具有对称性，当且仅当关系矩阵是对称矩阵。在关系图中，若两个结点间存在有向弧，必是成对的。

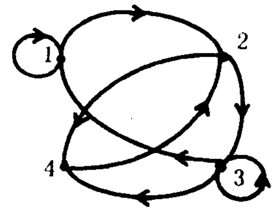

图 1.2.1

(3) 若关系 R 具有反对称性，当且仅当关系矩阵中以主对角线对称的元素不能同时为 1，(可以同时为 0)，而主对角线上的元素可以是 1 或者 0。在关系图中两个结点间的有向弧不可能成对出现，结点可以有自回路。

(4) 若关系 R 具有传递性，关系矩阵没有明显特征。关系图的特点是：任意两个结点 a，b 间若通过一条以上的弧能连结起来的话，则必有一条从 a 到 b 的弧。

定义　设 R 是集合 A 上的一个关系，令

$$R^{-1} = \{(y,x) \mid x \in A, y \in A, \text{并且有 } xRy\}$$

则称关系 R^{-1} 为关系 R 的逆。

例如，小于关系的逆关系是大于关系，相等关系的逆关系仍是相等关系。

命题　对任意关系 R，$R=R^{-1}$ 的充要条件是 R 具有对称性。

证明：必要性，对任意 xRy，因为 $R=R^{-1}$，所以 $xR^{-1}y$，由定义有 yRx，故 R 具有对称性。

充分性，对任意 xRy，因为 R 具有对称性，所以 yRx，由定义有 $xR^{-1}y$，所以 $R \subseteq R^{-1}$。

同理，$R^{-1} \subseteq R$。故 $R=R^{-1}$。

定义　设 R，S 是集合 A 上的两个关系，令

$$R \cdot S = \{(x,y) \mid x \in A, y \in A \text{ 并且有一个 } z \in A \text{ 使得 } xRz, zSy\}$$

称为关系 R 和 S 的乘积。简记为 RS。

例如，$A=\{1,2,3,4\}$，

$R=\{(2,1),(2,3),(4,3)\}$，

$S=\{(1,2),(2,1),(2,4),(4,4)\}$

则 $RS=\{(2,2)\}$，$SR=\{(1,1),(1,3),(2,3),(4,3)\}$。由此可以看出关系乘法不满足交换律。

又如，关系的乘法满足结合律，请读者自己证明。

定理 1　集合 A 上的关系 R 具有传递性的充要条件是 $RR \subseteq R$(RR 可简记为 R^2)。

证明：必要性，任取 $(x,y) \in R^2$，于是存在 $z \in A$，使得

$$xRz, zRy$$

因为 R 有传递性，所以有 xRy。即 $(x,y) \in R$，故 $R^2 \subseteq R$。

充分性，任取 xRy，yRz，根据关系的乘积定义有 xR^2z，因为 $R^2 \subseteq R$，所以 xRz，即 R 具有传递性。

在日常生活中和在数学中，我们常常碰到对一些对象进行分类的问题。例如，对一些几何图形，我们可以使用面积之间的相等关系将这些几何图形分类，即面积相等的几何图形算做一

类，这种分类使得每个几何图形都必定属于某类，并且不同类之间没有公共元素。又如，在人群中，我们可以用同性关系将人群分类，即同性别的人算做一类。这种分类也使得每一个人都必定属于某类，并且不同类之间没有公共元素。因此，任意一个分类总是在某一观点下把一些元素看作是同样的，并且希望每一个元素在这种分类法下都必定属于而且仅仅属于某一类。具有这种功能的分类方法，在数学上就叫做一个等价关系，其严格定义如下：

定义 设 A 是一个非空集合，$\cong$是 A 上的一个关系。如果$\cong$具有反身性，对称性，传递性，则称$\cong$是一个*等价关系*。

例如，上面提到的几何图形的面积之间的相等关系，人群中的同性关系都是等价关系。

又如，设 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，则 R 就是一个等价关系。

定义 设 A 是一个非空集合，$\cong$是 A 上的等价关系。A 的一个非空子集 M 叫做一个*等价类*，如果

1) 若 $a\in M$，$b\in M$，则 $a\cong b$。

2) 若 $a\in M$，$b\notin M$，则 $(a,b)\notin\cong$；或者

若 $a\in M$，$a\cong b$，则 $b\in M$。

换句话说，如果 M 中任意两个元素等价，而 M 中任意元素与 M 外任意元素不等价，则 M 就是一个等价类。

例如，上面提到的所有面积相等的几何图形就组成一个等价类(在面积相等关系下)，所有男人就组成一个等价类(在同性关系下)。

又如，设 $A=\{1,2,3\}$，$R=\{(1,1),(2,2),(3,3),(1,2),(2,1)\}$，则存在两个等价类 $M_1=\{1,2\}$，$M_2=\{3\}$。

定理 2 设$\cong$是集合 A 上的等价关系，于是等价类是存在的。

证明：任取 $a\in A$，令

$$M=\{x\mid x\in A \text{ 并且 } x\cong a\}$$

显然，M 非空。

任取 $x_1\in M$，$x_2\in M$，由于 $x_1\cong a$，$x_2\cong a$，而$\cong$具有对称性，传递性，所以 $x_1\cong x_2$。

任取 $x_1\in M$，若 $x_1\cong y$，则由于 $x_1\cong a$，所以 $y\cong a$，故 $y\in M$。

因此，M 是一个等价类。

定理 3 设$\cong$是集合 A 上的等价关系，M_1，M_2，…，是 A 中所有等价类。于是

$$A=M_1\cup M_2\cup\cdots$$

并且 $M_i\cap M_j=\phi(i\neq j)$。亦即，集合 A 上的等价关系把 A 分成了互不相交的等价类。

证明：任取 M_i，M_j，$i\neq j$。若有 $x\in M_i\cap M_j$，则任取 $a\in M_i$，$b\in M_j$，都有 $a\cong x$，$b\cong x$，故 $a\cong b$，所以 $M_i=M_j$，矛盾。

任取 $a\in A$，令

$$M=\{x\mid x\in A \text{ 并且 } x\cong a\}$$

由定理 1 知，M 是等价类，故有 k，使得 $M=M_k$。因为 $a\in M$，所以 $a\in M_1\cup M_2\cup\cdots\cup M_k\cup\cdots$。故 $A\subseteq M_1\cup M_2\cup\cdots$。另外显然有 $M_1\cup M_2\cup\cdots\subseteq A$。

故 $A=M_1\cup M_2\cup\cdots$。

下面我们讨论另一种重要的关系——部分序关系。

定义 设 R 是集合 A 上的一个关系。如果 R 具有反身性、反对称性、传递性，则称 R 为一个*部分序关系*(*或称半序关系*)。集合 A 在部分序关系 R 下做成一个*部分序集*(*或半序集*)，记

作(A,R)。

显然,一个部分序集的子集仍为部分序集。

例如,集合中的子集关系就是一个部分序关系,由一些集合做为元素而做成的集合,在集合的子集关系下是一个部分序集。

通常,将部分序关系 R 写做$\leq$,读做"小于或等于"。

又如,设集合 $A=\{1,2,3\}$,R 是 A 上的二元关系,$R=\{(1,1),(1,2),(1,3),(2,2),(2,3),(3,3)\}$,由于 R 具有反身性,反对称性,传递性,故 R 是部分序关系。

定义 一个部分序集$(A,\leq)$说是一个*序集*,如果对 A 中任意两个元素 a,b,必有 $a\leq b$ 或者 $b\leq a$。序集有时也称为*链*。

显然,序集的子集仍为序集。

例如,数的集合在数的大小关系下做成一个序集。

下面我们来介绍部分序集中一些特殊元素。

设$(A,\leq)$是一个部分序集,如果 A 中有一个元素 a,对于所有的 $x\in A$,都有 $x\leq a(a\leq x)$,则称 a 为集合 A 的*最大(最小)元素*。

A 中元素 a 说是一个*极大(极小)元素*,如果除 a 之外,A 中没有元素 x,使得 $a\leq x(x\leq a)$。

对于 A 的子集 M,A 中元素 a 称为子集 M 的一个*上界(下界)*,如果对 M 中任意元素 m,都有 $m\leq a(a\leq m)$。M 的上界(下界)未必在 M 中,甚至 M 未必有上界(下界)。

对于 A 的子集 M,A 中元素 a 称为子集 M 的*最小上界(或称上确界)*,如果 a 是 M 的一个上界,并且对 M 的任意一个上界 x,都有 $a\leq x$。

同理,可定义 M 的*最大下界(或称下确界)*。

一个部分序集,可以用所谓 Hasse 图直观地表示出来。Hasse 图的画法如下:以平面上的点代表部分序集中的元素。

1) 由于关系$\leq$是反身的,所以在原关系图中每个结点上都有自回路,为了作图方便,省略每个结点上的自回路。

2) 由于关系$\leq$是反对称的,在原关系图中如果结点 a 与 $b(a\neq b)$之间有弧,一定是单向的,我们规定,如果 $a\leq b$,就把 b 画在 a 的上方,也就是把原关系图中结点的位置做适当调整,使得所有的弧的方向都是向上的,这样可以略去弧上的箭头。

3) 由于关系$\leq$是传递的,若 $a\leq b,b\leq c$,则 $a\leq c$,即从 a 到 b 有一条弧,从 b 到 c 也有一条弧,我们规定,省略掉从 a 到 c 的一条弧。也就是说,若某两结点之间有一连串带箭头的头尾相接的弧连接,那么就省略掉这两结点间的一条弧。

例如,设集合 A 上具有整除关系$|$,试对(1)$A=\{1,2,3,4,5,6\}$,(2)$A=\{2,3,6,12,24,36\}$分别画出部分序集$(A,|)$的 Hasse 图。

解 先写出整除关系$|$:

(1)$|=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(1,6),(2,2),(2,4),(2,6),(3,3),(3,6),(4,4),(5,5),(6,6)\}$

(2)$|=\{(2,2),(2,6),(2,12),(2,24),(2,36),(3,3),(3,6),(3,12),(3,24),(3,36),(6,6),(6,12),(6,24),(6,36),(12,12),(12,24),(12,36),(24,24),(36,36)\}$

(1)与(2)的 Hasse 图分别由图 1.2.2 与图 1.2.3 表示。

图 1.2.3 所代表的部分序集中无最大元素、最小元素。但是有极大、极小元素。24,36 是极

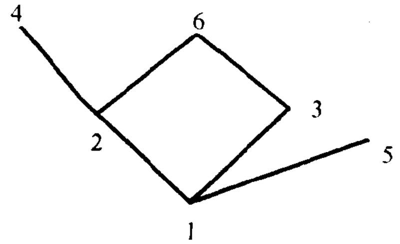

图 1.2.2

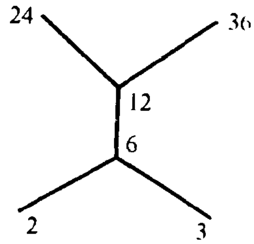

图 1.2.3

大元素，2，3 是极小元素。对于子集{2，3}，6 是其最小上界，但是，此子集无下界，当然更没有最大下界。

定义 设 R 是集合 A 上的二元关系，R 的反身（对称，传递）闭包为满足下列条件的关系 R'：

（1）R'是反身的（对称的，传递的）；

（2）$R\subseteq R'$；

（3）若 R''是反身的（对称的，传递的），且有 $R\subseteq R''$，则必有 $R'\subseteq R''$。

R 的反身闭包记作 $r(R)$，对称闭包记作 $s(R)$，传递闭包记作 $t(R)$。

下面给出求这几种闭包的定理，关于它们的证明部分请读者自己给出。

定理 4 设 R 是集合 A 上的二元关系，I_A 是集合 A 上的恒等关系，则 $r(R)=R\cup I_A$。

定理 5 设 R 是集合 A 上的二元关系，则 $s(R)=R\cup R^{-1}$。

定理 6 设 R 是集合 A 上的二元关系，则 $t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup\cdots$。

推论 设 R 是有限集合 A 上的二元关系，A 的元数为 n，则有 $t(R)=R\cup R^2\cup\cdots\cup R^n$。

例如，设集合 $A=\{1,2,3,4\}$，R 是集合 A 上的关系，$R=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,4)\}$，求 $r(R)$，$s(R)$，$t(R)$。

解 $I_A=\{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4)\}$

$R^{-1}=\{(2,1),(1,2),(3,2),(4,3)\}$

$R^2=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4)\}$

$R^3=\{(1,2),(1,4),(2,1),(2,3)\}$

$R^4=\{(1,1),(1,3),(2,2),(2,4)\}$

$r(R)=R\cup I_A=\{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2),(2,3),(3,3),(3,4),(4,4)\}$

$s(R)=R\cup R^{-1}=\{(1,2),(2,1),(2,3),(3,2),(3,4),(4,3)\}$

$t(R)=R\cup R^2\cup R^3\cup R^4=\{(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(2,1),(2,2),(2,3),(2,4),(3,4)\}$

习 题

1. 设 R、S 是集合 A 上的两个关系，试证明下列等式：

$(RS)^{-1}=S^{-1}R^{-1}$

$(R^{-1})^{-1}=R$

$(R\cup S)^{-1}=R^{-1}\cup S^{-1}$

$(R\cap S)^{-1}=R^{-1}\cap S^{-1}$

2. 设 R 是集合 A 上的关系。令

$$R^{+}=\{(x,y)\mid x\in A,y\in A\text{ 并且存在 }n>0,\text{使得 }xR^{n}y\}$$

证明 R^{+}是 R 的传递闭包。

3. 若非空关系 R 是不反身的，是对称的，试证明 R 不是传递的。

4. 若集合 A 上的关系是对称的，反对称的，试指明关系 R 的结构。

5. 设 R 是非空集合 A 上的关系，如果

1) 对任意 $a\in A$，都有 aRa。

2) 若 aRb，aRc，则 bRc。

证明：R 是等价关系。

6. 有人说："等价关系中的反身性可以不要，因为反身性可以从对称性和传递性推出：由对称性，从 $a\cong b$ 可得 $b\cong a$，再由传递性得 $a\cong a$"。你的意见呢？

7. 若集合 A 上的关系 R，S 具有对称性，证明：RS 具有对称性的充要条件为 $RS=SR$。

8. 若 R 是等价关系，试证明 R^{-1}也是等价关系。

§3 映 射

映射是数学上一个基本概念，也是一种特殊的二元关系。

定义 设 A 和 B 是两个任意非空集合，σ 是 A，B 上的一个二元关系，若对于每一个 $a\in A$，都有唯一的 $b\in B$，使 $(a,b)\in\sigma$，则称关系 σ 为从 A 到 B 的映射，记作 $\sigma:A\to B$。

对于 $(a,b)\in\sigma$，称 a 为原象，称 b 为 a 的象，记作 $\sigma(a)=b$。集合 A 称为映射 σ 的定义域。

设 $\sigma(A)=\{b\mid\sigma(a)=b,\text{对所有的 }a\in A\}$，称为 σ 的值域，或象的集合。

映射与一般的关系有如下的重要区别：

映射对于集合 A 中的每一个元素都有象且象唯一，而关系没有这一严格规定。

定义 设 σ 和 τ 是从集合 A 到 B 的两个映射，若对于所有的 $a\in A$，都有 $\sigma(a)=\tau(a)$，则称映射 σ 和 τ 相等，记作 $\sigma=\tau$。

下面介绍几种特殊映射。

定义 设 σ 是从集合 A 到 B 的映射，

(1) 若 $\sigma(A)=B$，则称 σ 为从 A 到 B 的满射；

(2) 若当 $a\neq b$ 时，有 $\sigma(a)\neq\sigma(b)$；或者当 $\sigma(a)=\sigma(b)$ 时必有 $a=b$，则称 σ 为从 A 到 B 的单射，或称一对一映射；

(3) 若 σ 既是满射又是单射，则称 σ 为从 A 到 B 的双射，或称一一对应映射。

例如，

(1) 设 τ 是正整数到整数的映射，$\tau(n)=$小于 n 的完全平方数，则

$$\tau=\{(1,0),(2,1),(3,1),(4,1),(5,2),\cdots\}$$

故 τ 既不是满射，又不是单射，更不是双射。

(2) 设 τ 是实数到实数的映射，$\tau(r)=2r-10$，则 τ 既是满射，又是单射，所以也是双射。

(3) 设 τ 是正整数到实数的映射，$\tau(n)=\lg n$，当 $m\neq n$ 时，显然有 $\lg m\neq\lg n$，故 τ 是单射，又因为 m 在正整数中取值，所以 $\lg m$ 不可能取遍实数，所以 τ 不是满射，当然也不是双射。

定义 设 $\sigma:A\to B$ 是双射，σ 的逆关系称为 σ 的逆映射，记作 $\sigma^{-1}:B\to A$。

显然，σ^{-1}也是双射，并且对任意 $a\in A$，都有 $\sigma^{-1}(\sigma(a))=a$。

定义 设 σ 是集合 A 到集合 B 内的映射，τ 是集合 B 到集合 C 内的映射，则映射 τ 与映射 σ 的*乘积*是一个从 A 到 C 的映射，记作 $\tau\sigma$，即

$$\tau\sigma=\{(a,c)\mid a\in A,c\in C,\text{且存在 } b,b\in B,\text{使得 } b=\sigma(a),c=\tau(b)\},$$

不难证明：映射的乘积满足结合律，但是不满足交换律。

鸽巢原理 如果 m 个鸽子飞进 n 个鸽笼中，则至少有一个鸽笼中有 k 个或 k 个以上个鸽子，其中

$$k=\begin{cases} m/n & \text{如果 } n \text{ 整除 } m \\ [m/n]+1 & \text{否则} \end{cases}$$

例如，试证在 n 个自然数中，总能找到 k 个数($1\leq k\leq n$)，使它们的和被 n 整除。

证明：设这 n 个自然数为 $a_1,\cdots,a_n$，考虑如下一组数：

$b_1=a_1$

$b_2=a_1+a_2$

.

.

.

$b_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$

用 n 去除 $b_1,\cdots,b_n$，设余数分别是 $r_1,\cdots,r_n$，

(1) 若余数有一个是零，则问题已证；

(2) 若 $r_1,\cdots,r_n$ 均不为零，因在 0 与 n 之间不为 0 的数只可能是 $1,2,\cdots,n-1$ 共 $n-1$ 个，所以 $r_1,\cdots,r_n$ 必有两个余数一样，设为 $r_i,r_j,i<j$，则 n 能整除 $b_j-b_i=a_{i+1}+\cdots+a_j$。

定义 如果集合 A 是有穷集或 A 可以与自然数集合 N 建立双射，则称集合 A 是*可数集合*；元素个数不是有限的可数集合称为*可数无穷集合*；若 A 不是可数集合，则称 A 为*不可数集合*。

不难证明，对于可数无穷集合，可以把它的元素编号：

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots$$

例如，所有整数集合是可数集合。

整数与自然数的一一对应关系如下：

x----1	当 $x=0$
x----$2x$	当 $x>0$
x----$2\lvert x\rvert+1$	当 $x<0$

定理 1 可数集合的子集仍为可数集合。

证明：1) 若此可数集合为有穷集，则其子集仍为有穷集，显然是可数集合；

2) 若此可数集合为无穷集，则此集合中的元素可表为

$$a_1,a_2,\cdots,a_n,\cdots \tag{1}$$

它的子集可以这样编号：从左向右看(1)，第一个是子集中元素的记为 a_{i1}，第二个是子集中元素的记为 a_{i2}，…，于是，此子集的元素可表为

$$a_{i1},a_{i2},\cdots,a_{in},\cdots。$$

由定义知，此子集是可数集合。

定理 2 全体实数做成的集合是不可数集合。