有限单元法
结构分析及程序

中国建筑工业出版社

有限单元法
结构分析及程序

[日]三本木茂夫　吉村信敏　著
北方交通大学铁道建筑系
《有限单元法结构分析及程序》翻译组　译

中国建筑工业出版社

本书是一本介绍使用电子计算机进行结构分析计算的讲座教材。包括：有限单元法的基本原理和FORTRAN语言程序设计两部分内容。书中对有限单元法作了通俗的讲述，通过桁架、刚架、平面应力、平面应变问题等许多实例，对程序设计作了较详细的解说。

本书可供结构工程技术人员和有关高等院校师生参考。

三本木茂夫　吉村信敏　著
有限要素法による構造解析プログラム
培风馆
1970

*

有限单元法结构分析及程序

北方交通大学铁道建筑系
《有限单元法结构分析及程序》翻译组　译

*

中国建筑工业出版社出版(北京西郊百万庄)
新华书店北京发行所发行　各地新华书店經售
中国建筑工业出版社印刷厂印刷

*

开本：787×1092 毫米 1/32 印张：9 1/4 字数：208 千字
1975年12月第一版　　1975年12月第一次印刷
印数：1—18,840 册　　定价：0.66 元
统一书号：15040·3264

译 者 的 话

在毛主席无产阶级革命路线指引下，随着我国社会主义建设的蓬勃发展，在生产技术和科学研究等各个部门，正日益广泛地使用电子数字计算机。在工程设计中，有限单元法已成为结构分析的一个有力工具。对于初学者来说，如何把有限单元法与电算程序联系起来，编出算法语言程序以进行工程结构的计算，是一个需要解决的问题。

本书是一本以有限单元法基本原理进行结构分析及程序设计的讲座教材，是结构技术人员了解程序设计、使用电子计算机进行结构计算的入门读物。书中对有限单元法的基本概念作了通俗的讲解，并通过桁架、刚架、平面应力、平面应变问题等许多实例，对程序设计作了较详细的解说。通过实例，把有限单元法和程序设计紧密联系起来，便于读者掌握编写程序的要领。由于书中所介绍的只是初级的、小规模的程序，因此，直接用于解决实际工程问题尚有一定局限性。

本书使用的算法语言是 FORTRAN (FORmula TRANslator，公式翻译）语言。它是国际上广泛使用的算法语言之一，适用于科技计算。目前国内一些单位已用这种语言作为编写程序和交流算法的工具。就算法语言来说，种类很多，但构造原理基本上是相同的，了解了 FORTRAN 语言程序，其他的语言程序也是不难编写的。

遵照毛主席“洋为中用”的教导，我们将本书翻译出

来，供读者参考。同时，我们对原书中的前言、后记、日文名词索引以及个别不必要的语句作了删略。由于我们水平所限，缺乏实践经验，因之翻译中定有不少缺点、错误，恳请读者批评指正。

目　录

第 一 章

有限单元法的概念

1-1 有限单元法的基本原理和杆系结构分析

有限单元法是一种不仅可以分析杆系结构，甚至可以分析板、壳等连续弹性体的一般结构分析方法。这里，取杆系结构为例，说明有限单元法的基本原理。

有限单元法是把要分析的结构物，作为有限个简单形状单元（或杆件）的组合体来考虑。这是有限单元法这个名称的由来。杆系结构（桁架和刚架）系由有限个梁、柱杆件结合成的平面结构或空间结构，因此把梁和柱当作有限个单元是很自然的。如图 1-1 所示的平面桁架是由 7 个桁架杆件（图中①～⑦号）所组成，假如 1 个桁架杆件作为一个有限单元，该桁架可认为是由 7 个有限单元所组成的。

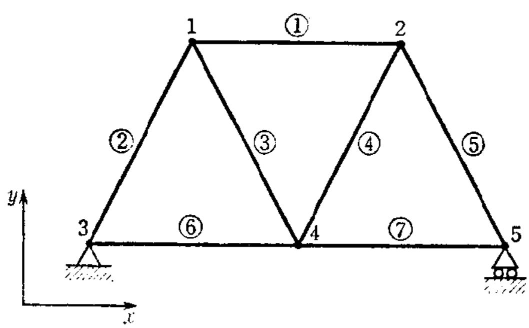

图 1-1　平面桁架（由 7 个有限单元所组成）

然而，结构受外力作用产生变形，杆件（即有限单元）也产生变形。但在有限单元法里，考虑在有限单元上选定若干个点（**节点**），假定以这些点的位移（**节点位移**）确定各有限单元的变形状态。也就是说，根据这些节点的位移来表示出结构的变形状态。

在以梁或柱作为一个有限单元的情况下，自然地把杆件的两端作为单元变形状态的定义点。因此，桁架杆件和刚架杆件的节点便是所谓杆件的端点。这样，节点位移就是杆件端点的线位移和转角。换句话说，在有限单元法里，桁架杆件和刚架杆件的变形状态，就是假定以杆件端点的线位移和转角表示的❶。

假若单独考虑各个杆件的话，节点就是杆件的两端；但如果从结构整体来考虑，杆系结构的节点就是杆件的联结处。以图 1-1 所示的平面桁架为例，该结构有五个节点（图中编号 1～5），节点位移为各个节点的 x 和 y 方向的线位移。也就是说，这个桁架的变形状态可由5×2＝10个节点位移来表示（图 1-2）。设 u 为 x 方向的线位移，v 为 y 方向的线位移，下角字表示节点号数（**节点号**）。

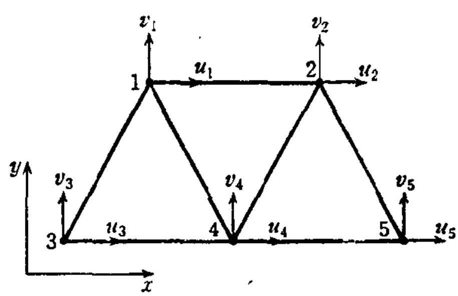

图 1-2　10个节点位移

❶ 证明参考3-2-3节。

比方说，当图1-2所示的桁架，如图1-3那样变形时，其10个节点位移就成为：

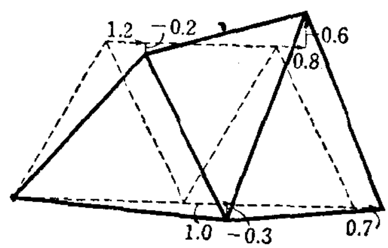

图 1-3 变形

$$u_1=1.2,\ u_2=0.8,\ u_3=0,\ u_4=1.0,\ u_5=0.7$$
$$v_1=-0.2,\ v_2=0.6,\ v_3=0,\ v_4=-0.3,\ v_5=0$$

用这10个量表示桁架的变形状态。

另一方面，在杆件（有限单元）里有内力（力和弯矩）作用，有限单元法假定这些内力一律通过各节点进行传递。这样，有限单元上作用的力和弯矩（内力）就可用节点上的力和弯矩来表示。也就是说，结构的内力状态，可以假定由节点上的力和弯矩（**节点力**）来表示。这个假设，对于杆系结构是很容易理解的。杆系结构上作用的力和弯矩必然通过杆件连接处（节点），由一个杆件（有限单元）传递到其他杆件（有限单元），假如给出杆件两端（节点）的力和弯矩，该杆件（有限单元）内的力和弯矩分布也就可以算出。

再一方面，有限单元法里，外力也是假定通过节点传到结构上的。因为内力是假定通过节点传递的，如果外力不按同样的假定，在考虑力和弯矩平衡时就不方便了。可是，根据这个假定，不仅无法处理分布荷载，就是在梁的中部有集

中荷载也是无法处理的。因此，在这种情况下，可根据材料力学的知识，考虑在节点上放置等于实际作用的力和弯矩的等效节点力和节点弯矩❶。

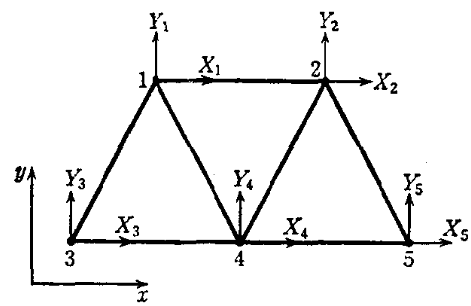

图 1-4　10个节点力

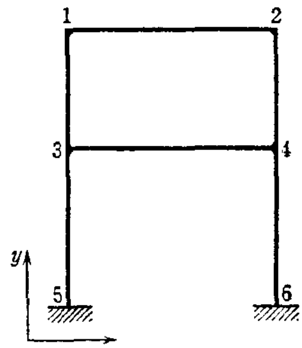

图 1-5　平面刚架

图 1-1 所示的平面桁架，每个节点上的节点力为 x 和 y 方向的两个力。也就是说，这个桁架的内力状态，可由5×2=10 个节点力（见图 1-4）来表明。X 为 x 方向的力，Y 为 y 方向的力，下角字为节点号。

现在研究另一例，如图 1-5 所示的平面刚架。可以看出这个结构是由 6 个有限单元所组成。对于平面刚架单元来说，其节点位移除了 x、y 方向的线位移 u、v 之外，还必须考虑转角 θ，所以一个节点上有 3 个节点位移（图1-6)。由于这个结构有 6 个节点，故该平面刚架的变形状态是以 6×3=18个节点位移来表示。其次，再看看节点力，对平面刚架单元来说，该节点力除了 x、y 方向的力 X、Y 之外，还要考虑弯矩 M（图1-7）。因此该平面刚架的内力状态就可以由6×3=18个节点力来表示。

❶ 在4-4-2节详细讲述。

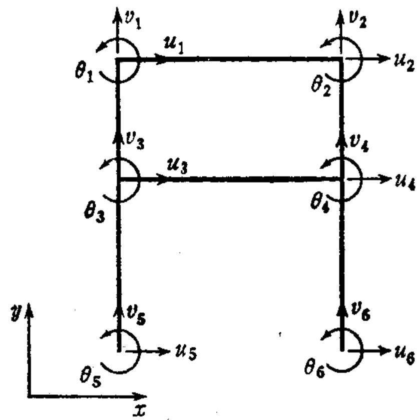

图 1-6　18个节点位移

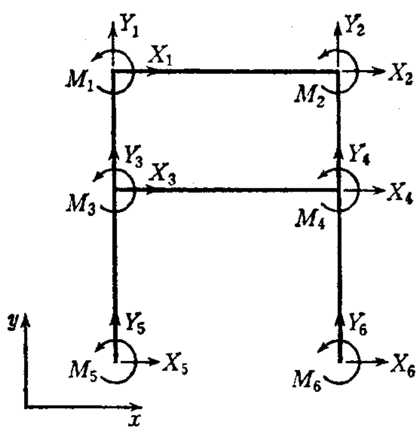

图 1-7　18个节点力

这里希望注意：所谓节点力，往往会认为只是作用在节点上的力，但是**在有限单元法里所谓的节点力，还包含有弯矩，具有广义的意思。同样，在有限单元法里所谓的节点位移也包含有转角。**

由于在结构上所考虑的节点数是有限的，而各节点上的

节点力和节点位移数也是有限的（平面桁架时为2，平面刚架时为3），结果是以有限个节点位移和节点力来表示结构的变形状态和内力状态。换句话说，有限单元法是以有限个自由度的体系来代替结构。如图1-1所示的平面桁架，是由具有10个自由度的体系所代替；图1-5的平面刚架，是由具有18个自由度的体系所代替。

这里，着重从桁架的任一节点来研究一下桁架结构。以图1-8为例，4根桁架杆件(单元)$a(i\text{-}j)$、$b(i\text{-}k)$、$c(i\text{-}l)$、$d(i\text{-}m)$汇交在结合点（节点）i上（j、k、l、m是单元a、b、c、d的i节点外的另一节点）。这里我们从节点i把4个单元截开来研究。设u_i^a、v_i^a为单元a在节点i处的x、y方向的位移。同样，u_i^b、v_i^b，u_i^c、v_i^c，u_i^d、v_i^d分别为杆件b、c、d在节点i处的x、y方向的位移（见图1-9）。可是，因为四根桁架单元a、b、c、d在节点i是结合在一起的，很明显，下式应该成立：

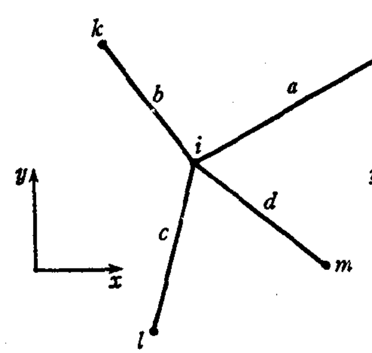

图 1-8 汇交于节点i的4个桁架单元a、b、c、d

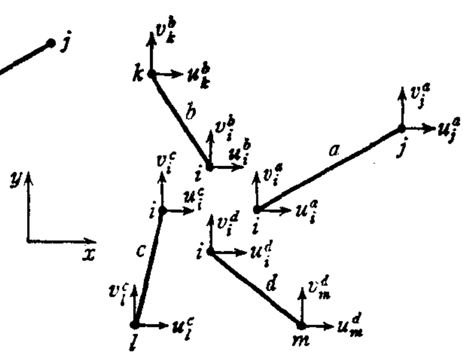

图 1-9 汇交于节点i各单元a、b、c、d的节点位移

$$\left.\begin{aligned}u_i^a=u_i^b=u_i^c=u_i^d\\v_i^a=v_i^b=v_i^c=v_i^d\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}1)$$

如把上式推广到一般情况重说一遍，就得出结论：对汇交于某一节点的所有单元来讲，该节点的节点位移是相同的。这就是弹性理论中所谓的**变形谐调条件**。

其次，再来讨论作用在节点 i 上的作用力。X_i^a、Y_i^a分别表示作用于杆件 a 节点 i 上的 x 、y 方向的力（内力）。X_i^b、Y_i^b，X_i^c、Y_i^c，X_i^d、Y_i^d 分别表示作用于杆件 b、c、d 节点 i 处的 x 、y 方向的力（见图1-10）。可是就节点 i 来看，由于这些内力的总和（F_{xi}、F_{yi}）应该与作用在该节点上的外力平衡，所以下式成立：

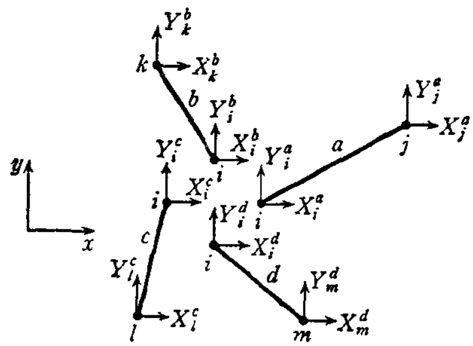

图 1-10　汇交于节点 i 各单元 a、b、c、d 的节点力

$$\left.\begin{aligned}X_i^a+X_i^b+X_i^c+X_i^d=F_{xi}=P_{xi}\\Y_i^a+Y_i^b+Y_i^c+Y_i^d=F_{yi}=P_{yi}\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}2)$$

就是说，在节点上应满足平衡条件，这就是弹性理论中所谓的**平衡条件**。

这里，还假定各单元上的节点力是节点位移的函数，因而 X_i^a、X_i^b……Y_i^d 应该有下列关系：

$$
\left.\begin{aligned}
X_i^a&=f_a(u_i^a,\ v_i^a,\ u_j^a,\ v_j^a)\\
Y_i^a&=g_a(u_i^a,\ v_i^a,\ u_j^a,\ v_j^a)\\
X_i^b&=f_b(u_i^b,\ v_i^b,\ u_k^b,\ v_k^b)\\
Y_i^b&=g_b(u_i^b,\ v_i^b,\ u_k^b,\ v_k^b)\\
X_i^c&=f_c(u_i^c,\ v_i^c,\ u_l^c,\ v_l^c)\\
Y_i^c&=g_c(u_i^c,\ v_i^c,\ u_l^c,\ v_l^c)\\
X_i^d&=f_d(u_i^d,\ v_i^d,\ u_m^d,\ v_m^d)\\
Y_i^d&=g_d(u_i^d,\ v_i^d,\ u_m^d,\ v_m^d)
\end{aligned}\right\}\qquad (1\text{-}3)
$$

例如第 4 式，关于作用在杆件 b 节点 i 的 y 方向力 Y_i，是以杆件 b 的节点 i、k 在 x、y 方向的位移 u_i^b、v_i^b、u_k^b、v_k^b的函数来表示的。

将上式代入式（1-2）（平衡方程式），则得出下式：

$$
\left.\begin{aligned}
P_{xi}=&f_a(u_i^a,v_i^a,u_j^a,v_j^a)+f_b(u_i^b,v_i^b,u_k^b,v_k^b)\\
&+f_c(u_i^c,v_i^c,u_l^c,v_l^c)+f_d(u_i^d,v_i^d,u_m^d,v_m^d)\\
P_{yi}=&g_a(u_i^a,v_i^c,u_j^a,v_j^a)+g_b(u_i^b,v_i^b,u_k^b,v_k^b)\\
&+g_c(u_i^c,v_i^c,u_l^c,v_l^c)+g_d(u_i^d,v_i^d,u_m^d,v_m^d)
\end{aligned}\right\}\qquad (1\text{-}4)
$$

上式是以汇交于节点 i 的各单元节点位移表示的节点 i 的平衡方程式。

可是，按以前所讲述的变形谐调条件，可得出：

$$u_i^a=u_i^b=u_i^c=u_i^d=u_i$$

$$v_i^a=v_i^b=v_i^c=v_i^d=v_i$$

$$u_j^a=u_j,\quad v_j^a=v_j,\quad u_k^b=u_k,\quad v_k^b=v_k$$

$$u_l^c=u_l,\quad v_l^c=v_l,\quad u_m^d=u_m,\quad v_m^d=v_m$$

结果，式（1-4）可改用下面的式子表示，即作用在节点 i 的外力，以汇交于该节点上的各单元的节点（包括节点 i 外侧的另一节点）的位移来表示。

$$\left.\begin{aligned}P_{xi}=F_i(u_i,\ v_i,\ u_j,\ v_j,\ u_k,\ v_k,\ u_l,\ v_l,\ u_m,\ v_m)\\P_{yi}=G_i(u_i,\ v_i,\ u_j,\ v_j,\ u_k,\ v_k,\ u_l,\ v_l,\ u_m,\ v_m)\end{aligned}\right\}\qquad(1\text{-}5)$$

同样，可做出其他节点的方程式，这些方程式都是以节点位移为未知数的联立方程式，方程组的元数等于结构的自由度。因而，列出图 1-1 的平面桁架各节点的平衡方程式，应该是十元的联立方程式。

至此，各单元的节点力和节点位移的关系可表示为式（1-3）那样普遍形式，倘若该式是一次式，并对各节点相继列出象式（1-5）那样的方程式，即是以节点位移为未知数的联立一次方程式。如求解该联立方程式可得出节点位移，按以前的假定，即确定出各单元（杆件）的变形状态，并能够很容易的计算出单元的应力和应变。这就是有限单元法的原理。

总之，假若能找出以节点位移一次式表示的各单元节点力，以后就可以应用变形谐调条件和平衡条件，作出以节点位移为未知数的联立一次方程式，因为解联立方程式是件容易事情，所以有限单元法的关键，当然**就在于如何把节点力用节点位移的一次式表示**。

如上所述，联立方程式的元数等于所分析结构物的自由度数目，因此，即使简单的结构也有几十元，稍微复杂的要有几百元、几千元，实际上用手算解联立方程式是不可能的，如用电子计算机就可在短时间内解出。这就是有限单元法以使用电子计算机为前提的最大理由。

1-2 推广到分析连续体

对于杆系结构，把梁和柱当作有限单元，把有限单元的联结处当作节点，这些从直观就能够理解，认为力和弯矩通