非完整动力学研究

梅凤翔 著

北京工业学院出版社

内 容 简 介

本书主要写我国近年在非完整系统动力学方面的一些研究成果，包括历史与现状的研究、若干基本概念的研究、新型方程和新型算子的研究、积分方法的研究以及若干专门问题的研究。

本书可作为高等院校力学、数学、物理教师、力学工作者和研究生的参考书。

Capsule summary

The book summarizes our achievements in scientific research on the non-holonomic dynamics. The book consist of the researches on the history and present, the fundamental conceptions, the new equations and new operators, the methods of integration, and some special problems of the non-holonomic dynamics.

The book can be used as a referece material for the teachers of mechanics, mathematics and physics of Colleges and universities, as well as the workers of mechanics and graduate-students.

非完整动力学研究

梅凤翔 著

*

北京工业学院出版社出版

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

国防科工委印刷厂印刷

*

850×1168毫米 32开本 11·125印张 289千字

1987 年12月第一版 1987 年12月第一次印刷

印数：1—2,500 册

统一书号：13434·82 压膜平装定价：2.50元

精装 定价：5.50元

前　言

1985年5月北京工业学院出版社曾出版拙著《非完整系统力学基础》。那本书的确是“基础”，因考虑到教学需要，公式推导就显得有些冗长，也大致做到面面俱到。

本书侧重总结我国近年在非完整动力学方面的研究成果。主要取材于作者及其同事近年发表的或即将发表的论文，以及在学术会议上宣读的论文。有些内容是第一次发表于本书。除非必要，已在“基础”中叙述的部分都没有写进去。本书可作为“基础”的补充与提高。

全书共有五章。第一章包括分析力学的近代发展与非完整力学的历史和现状研究，列举了我国研究者的七十多篇文献。第二章包括实位移处于虚位移中的充要条件、*Четаев*定义的推广以及交换关系等基本概念的研究。第三章研究*Volterra*方程、*Appell*方程、若干高阶方程和新型算子理论。第四章研究非完整动力学方程的若干积分方法，包括利用能量积分和循环积分降阶方程、*Lagrange*力学逆问题、*Noether*定理的推广、*Levi-Civita*定理的推广以及第一积分的某些性质等。第五章是非完整动力学的若干专门问题，包括非*Четаев*型约束系统动力学、非完整系统的打击问题、变质量非完整系统的广义能量积分和广义*Noether*定理、相对论中变质量问题的*Jourdain*原理和*Nielsen*方程、约束依赖于质量变化过程的系统动力学以及弱变质量系统的小振动等。

本书成稿过程中曾得到北京工业学院应用力学系分析力学教研室同志们的关心和支持。研究生张军、赵跃宇、刘端、唐传龙和罗勇曾阅读初稿并提出宝贵意见。作者对他们表示谢意。

目 录

第一章　非完整系统动力学的历史与现状研究

§1.1　分析力学的近代发展

1788年伟大科学家 *Lagrange.J.L* 发表名著《分析力学》。*Lagrange*以及后来的 *Hamilton*、*Jacobi*、*Poincaré*、*Ляпунов* 等人的著作是那样完美，以致使众多聪明的后人觉得再也没有什么本质的东西可以补充到有限自由度动力系统中去了。上一世纪末出现的经典非完整系统分析力学无疑是将 *Lagrange* 的成果推进了一大步，而近二十年兴起的近代分析力学使 *Lagrange* 和*Hamilton*的理论更加完美[1]。

在这一节里，我们就近代分析力学和经典分析力学的近代发展进行一些研究和讨论。

1．近代分析力学

分析力学近代发展的重要表现在于它的现代化。近二十年来，分析力学发生了根本变化，促进这种变化的主要因素有两个。一个是微分几何的进步，用以得到更几何更本质的观点。这种观点充满物理学（如规范场论），特别是力学。另一因素是数学分析以及流形上泛函分析的近代发展。

Lagrange 的分析力学重分析而轻几何。而今，近代微分几何的发展使得*Lagrange*力学和*Hamilton*力学更加清晰、更加美妙。近代分析力学的代表作有三本书或称三本“圣经”：*Godbillon. C*的 *Gèometrie différentielle et mècanique analytique*（1969，微分几何和分析力学）［另一说法是 *Souriau. J. M* 的

Structure des systèmes dynamiques（1970，动力系统的结构）]；*Арнольд.В.И* 的 *Математические методы классической механики*（1974，经典力学的数学方法）；*Abraram.R* 和 *Marsden.J.E* 的*Foundations of mechanics*（1978，1980，力学基础）。

近代分析力学的主要内容有以下三个方面：

（1）流形与Lagrange力学 *Lagrange* 力学用位形空间描述力学系统的运动。力学系统的位形空间具有微分流形结构，其同胚群作用在此结构上。*Lagrange* 力学的基本概念和定理相对此群是不变的。

一个 *Lagrange* 力学系统用一流形（位形空间）和在流形切丛上的函数（*Lagrange* 函数）给出。

所有使 *Lagrange* 函数不变的位形空间的单参数同胚群定义一守恒律（即运动方程的第一积分）。

（2）辛流形与Hamilton力学 没有微分形式就不能说明 *Hamilton* 力学。微分形式的信息包括外积、外微分、积分和 *Stokes*公式。

流形上的辛结构是一闭的、非蜕化的微分2-形式。力学系统的相空间具有自然辛结构。

在辛流形上，如同在*Riemann*流形上，在矢量场和1-形式之间存在自然同构。辛流形上一个矢量场对应一个函数的微分，称为*Hamilton*矢量场。流形上一个矢量场确定一相流，即单参数同胚群。辛流形上*Hamilton*矢量场保持相空间的辛结构。

流形上的矢量场形成*Lie*代数。辛流形上的*Hamilton*矢量场也形成*Lie*代数。此类代数中的运算称之为*Poisson* 括号[2]。

（3）KAM定理 六十年代初，*Колмогоров.А.Н.*，*Арнольд.В.И*和*Moser.J*三人对近乎可积*Hamilton* 系统解的性质给出一些重要结论，称之为 *KAM* 定理。现就两自由度系统作大略说明。

设有一个两自由度可积的$Hamilton$系统，当系统的 $Hamilton$ 函数有较小变化（扰动）时，我们就称之为近乎可积系统。按照分析力学的方法，可将方程用两个作用量变量 J_1, J_2 和两个相应的角变量 θ_1，θ_2 表示，由于存在 $Hamilton$ 函数作为第一积分，可以只考虑三个变量 J_1, θ_1, θ_2。进而，对于原来未受扰动的可积情形，可选取适当的变换使 $J_1=\text{const}$，于是解的形式为 $\theta_1=\theta_1(t)$，$\theta_2=\theta_2(t)$，轨线总位于一个环面上。此环面称为不变环面，它们与 $\theta_2=\text{const}$ 相截得一族同心圆。对一特定的轨线，它在 $\theta_2=\text{const}$ 上的历次截点全在同一圆上。这些截点或者组成有限点的点集（当旋转数为有理数时），或者布满圆圈（当旋转数为无理数时）。当系统从可积情形受到扰动变为近乎可积时，这些同心圆圈将变形。KAM 定理指出，由于面积的保守性，如出现双曲点，双曲点的个数将与椭圆点个数一样多，个数与相应有理旋转分数表示时的分母相适应。于是在每一双曲点附近形成 *Poincaré* 栅栏和相应的浑沌河。这种浑沌河在外面是为"陆地"包住的。这种浑沌河网络有无穷多个，而每一个河中的"岛"放大看时又重复这种结构。这种层次也有无穷多。在陆地上的闭轨道相当于三维空间 $(J_1, \theta_1, \theta_2)$ 的一个环面，称为KAM环面。KAM定理适用于近乎可积系统。如果偏离很大，定理不再成立，KAM 环面破裂，外层有浑沌海，有些浑沌河与海相连起来[3]。

近代分析力学也可以叫作"几何动力学"，系指用近代微分几何（如流形、微分流形、辛流形等）观点研究分析力学的原理和方法。1982年6月在意大利都灵召开的"分析力学近代发展"讨论会上，许多力学家、数学家和物理学家介绍了他们在几何动力学方面的研究成果。法国人在用近代微分几何方法研究天体力学、刚体力学、动力系统的结构等方面取得重要进展；意大利人在分析力学的辛关系上贡献突出[4]。近年，我国力学家也十分重视几何动力学和其他数学方法的研究工作。值得庆贺的是我国有

一些年轻的力学工作者已经在几何动力学的研究工作上迈出了可喜的一步。1986 年 6 月由中国力学学会召开的“近代数学与力学”讨论会上所反映的情况表明，我国对近代分析力学的研究兴趣大大提高了。我们希望今后在完整系统和非完整系统的几何动力学研究方向上不断深入下去并取得更大成果。

2. 经典分析力学的理论与应用

分析力学近代发展的另一方面是经典理论与应用的发展。下面就 *Lagrange* 力学逆问题、相对运动动力学、非完整动力学的两个基本问题、*Vacco* 动力学、单面约束系统动力学以及分析力学与其他分支的交缘等问题作一讨论。

(1) *Lagrange* 力学逆问题 众所周知，对完整保守系统，只要造出 *Lagrange* 函数 L($L=T-V$, T 为系统的动能，V为势能)，就可列写出系统的运动微分方程

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1.1)$$

其中q_s为系统的广义坐标。方程(1.1.1)的显式

$$\sum_{s=1}^{n}A_{ks}\ddot{q}_s+B_k=0 \quad (k=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1.2)$$

为一个二阶常微分方程组。由(1.1.1)至(1.1.2)可称为*Lagrange*力学的正问题。所谓 *Lagrange* 力学逆问题是指对给定的一个二阶常微分方程组(1.1.2)或更一般的

$$F_s(q,\dot{q},\ddot{q},t)=0 \quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1.3)$$

欲构造一个函数L使(1.1.2)或(1.1.3)可写成形式(1.1.1)。自然，此时的 L 一般说来已不再是动能与势能之差，而且逆问题的解也不是唯一的。

Lagrange 力学逆问题的研究可追溯到 *Helmholtz* 时代(1887)。如果方程(1.1.3)的左边函数F满足*Helmholtz*条件

$$\left.\begin{aligned}&\frac{\partial F_s}{\partial \ddot{q}_k}=\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}_s},\ \frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}+\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}=\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_s}{\partial \ddot{q}_k}+\frac{\partial F_k}{\partial \ddot{q}_s}\right)\\&\frac{\partial F_s}{\partial q_k}-\frac{\partial F_k}{\partial q_s}=\frac{1}{2}\ \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial F_s}{\partial \dot{q}_k}-\frac{\partial F_k}{\partial \dot{q}_s}\right)\end{aligned}\right\}$$

$$(s,k=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.4}$$

那么可按一定规则构造出 L 来。

Lagrange 力学逆问题首先在物理学界受到重视。近十几年来取得一系列重要成果，如构造 L 的 *Engels* 方法、*Santilli* 方法[5]等。

Lagrange 力学的一系列积分理论，如循环积分、正则方程、*Hamilton-Jacobi*方法等都基于方程(1.1.1)，而实际问题中遇到的作用力却大多是非有势力。因此，克服这种局限性的办法之一就是寻求构造一个新的 *Lagrange* 函数使一般非有势力的 *Lagrange* 方程转化为等效的方程 (1.1.1)。至于非完整系统动力学的积分理论也大多与*Lagrange*力学逆问题相关[6]。

(2)相对运动动力学 随着近代科学技术的发展，对复杂力学系统的动力学研究变得越来越重要。这些复杂系统的运动包括载体的运动以及被载系统相对于载体的运动，例如，考虑到地球自转时刚体的定点转动、带旋转飞轮的刚体运动、旋转软轴的平衡、人造卫星以及机器人的运动等。

用分析力学的理论与方法研究复杂系统的相对运动动力学，不仅可在表现形式上达到统一，而且系统越复杂越显示其优越性。本世纪初，*Whittaker* 研究了受匀速转动约束的完整系统的 *Lagrange*方程[7]；六十年代，*Лурье.А.И* 研究了完整系统的一般相对运动动力学[8]。这些研究可以推广到非完整系统[6]、变质量系统以及其他各种专门问题。

(3)非完整系统动力学的两个基本问题 文献[9]已对非完整系统力学作了较全面的介绍，这里仅就一阶非线性非完整约束的物理实现以及 *Appell-Четаев*定义的适用性问题作一讨论。

1）一阶非线性非完整约束的物理实现问题　一阶线性非完整约束一般可以被动地实现，而且靠接触、靠摩擦来实现。例如，平面上球的纯滚动、冰刀的运动等。而一阶非线性非完整约束和高阶非完整约束的实现问题却是个近代问题。

目前已知的非线性非完整约束的著名例子主要有四个：*Appell-Hamel* 椅子轮[10]、*Добронравов* 例[11]、导向陀螺例[12]和 *Новоселов*例[13]。

Appell-Hamel 椅子轮的例子已为众多研究者所接受。*Delassus* 证明，所有非线性非完整约束都可以用线性非完整约束来实现；而*Неймарк*和*Фуфаев*认为，*Appell* 想像的机构在极限过程中发生微分方程组的降阶，导致蜕化系统的运动本质上不同于极限运动，因此，*Appell-Hamel*例的实现不能成立[14]。

Добронравов 例和导向陀螺例都是人为的、主动的要实现的约束，不是被动实现的。

*Новоселов*例十分有趣。这是一个质量变化引起运动学变化而产生的非线性非完整约束。设在固定水平面oxy上滚动的匀质球的质量变化规律为

$$m=m_0(1-\beta s) \tag{1.1.5}$$

其中m_0,β为常数，s为球与平面接触点走过的弧长。设球心坐标为x,y,z，密度为γ，则

$$\left.\begin{aligned} &m=\frac{4}{3}\pi\gamma z^3\\ &\dot{m}=4\pi\gamma z^2\dot{z}=-m_0\beta\dot{s}\\ &\dot{s}^2=\dot{x}^2+\dot{y}^2 \end{aligned}\right\} \tag{1.1.6}$$

因此有

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=\frac{16\pi^2\gamma^2}{m_0^2\beta^2}z^4\dot{z}^2 \tag{1.1.7}$$

公式(1.1.7)就是一个一阶非线性非完整约束。

最近，有人用近代数学方法证明，非线性非完整约束不能靠

接触、靠摩擦来实现[15]。当然，主动地实现，例如，靠伺服系统总可以实现随便怎样的非线性非完整约束。

2）*Appell-Четаев*定义的适用性问题　对形如

$$f_\beta(q_s,\dot{q}_s,t)=0 \tag{1.1.8}$$

的非线性非完整约束，*Appell*和*Четаев*给出的虚位移方程为

$$\sum_{s=1}^{n}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\delta q_s=0 \tag{1.1.9}$$

这个定义（或称条件）对线性非完整约束自动成立。正因如此，*Appell-Четаев*定义被广泛采用。然而，正如*Четаев*本人所说，这个定义不是唯一的办法，还可以有其他办法。因此，有人认为，*Appell-Четаев*定义是一种强加的条件。

虽然还没有人明确提出*Appell-Четаев*定义的适用性问题，但人们在研究非线性非完整系统动力学时，总是事先小心地表明"研究*Четаев*型非线性非完整约束"。

伺服约束的虚位移方程可以不满足(1.1.9)，或称非*Четаев*型的。问题在于，是否存在非伺服约束而不满足(1.1.9)?这是值得探讨的问题。

上述两个问题都是非线性所带来的困难。

(4)*Vacco*动力学　*Vacco*动力学(*Vacco*为意大利词，有"没事闲待着"之意，很费解）是苏联莫斯科大学*Козлов*近年提出的研究不可积分约束系统动力学的一种新的数学模型、新的方法[16−18]。他认为不可积分约束应分为两类：一类是传统的非完整约束，另一类是*Vacco*约束。

*Козлов*采用半固定端变分，在此变分下变更运动满足约束方程，运动方程总可以写成*Hamilton*形式。如果系统受有形如(1.1.8)的非完整约束，且力是有势的，则*Vacco*动力学的*Lagrange*方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)-\sum_{\beta=1}^{g}\dot{\lambda}_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}$$

$$(s=1,2,\cdots,n) \tag{1.1.10}$$

其中λ_β为不定乘子。实际上，*Vacco* 动力学方程(1.1.10)是作用积分$\int_{t_0}^{t_1} L dt$在条件(1.1.8)下取驻值的*Lagrange* 问题的 *Euler*方程。

传统Четаев型非完整系统的动力学方程为

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_s}-\frac{\partial L}{\partial q_s}=\sum_{\beta=1}^{g}\mu_\beta\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\quad (s=1,2,\cdots,n) \qquad (1.1.11)$$

其中μ_β为不定乘子。

一般说来，*Vacco* 动力学方程(1.1.10)与传统方程(1.1.11)是不等价的。但这并不意味着两组方程(1.1.10)和(1.1.11)没有共同解。两方程组有共同解的充要条件是[6]

$$\sum_{s=1}^{n}\sum_{\beta=1}^{g}\lambda_\beta\left(\frac{\partial f_\beta}{\partial q_s}-\frac{d}{dt}\frac{\partial f_\beta}{\partial \dot{q}_s}\right)\delta q_s=0 \qquad (1.1.12)$$

当然，仅对极个别的非完整系统，条件(1.1.12)才成立。

Козлов 认为，无论在有限自由度力学中，还是在连续介质力学中，都不排除可能有多种模型。*Vacco* 动力学与传统非完整系统动力学就具有不同的模式。首先，对于完整系统这两个模型是一致的，而对不可积分约束系统两者相距甚远。其次，在 *Vacco* 动力学中具有所谓“弱确定性”——力学系统的运动单值地由它在某固定时刻的状态确定，而传统非完整系统动力学有“强确定性”——运动被系统在每一时刻的状态确定。

文献[19]中所论及的一整套理论与结果同 *Vacco* 动力学相近。

(5)单面约束系统动力学 人们研究分析力学大多以双面约束为前提。实际上，单面约束比双面约束更为普遍，研究起来也更为困难。一球沿一粗糙平面纯滚动，另一与前一粗糙平面相垂直的平面对球来说便是一个简单的单面完整约束；球沿粗糙平面在某固定方向又滚又滑（限制滑动发生在一个方向上）乃是一个简单的单面非完整约束。研究又滚又滑比研究纯滚动更为普遍，

也更为困难。在工程实际中，如带滚轮系统的送输机械，往往不是每个轮子都作纯滚动，总是有些轮子又滚又滑的。系统在有限空间中的运动、带滚轮系统又滚又滑的运动、机器人绕过障碍的运动等，都必须用单面约束系统动力学来研究。

过去，人们对单面约束系统静力学，如单面约束系统的虚位移原理[20]，有些了解。近年，对单面约束系统动力学的研究兴趣大大提高并取得了一些进展[21,22]。

(6)分析力学与其他分支的交缘 分析力学在与其他力学分支和技术共同发展中得以应用与发展。下面所述六个方面值得我们注意与重视。

1）分析力学与刚体力学 分析力学作为一种方法应用于邻近分支，近年出现诸如刚体分析力学、多刚体系统分析动力学、陀螺系统分析动力学、变质量体分析力学等。

2）分析力学与机器人动力学 目前迅速发展的机器人动力学广泛应用分析力学中的*Lagrange* 方程、*Appell* 方程、*Gauss* 原理等，而在机器人动力学中有可能实现高阶非完整约束。

3）分析力学与宇航力学 苏联人造地球卫星联盟4号与联盟5号对接问题中，要求两卫星以同样角速度转动，否则就会使联结件发生扭转而破坏。这样一个技术问题需要用非完整动力学来研究。

4）分析力学与滚轮系统的线路稳定性 滚轮系统（自行车、摩托车、汽车、火车车厢、飞机起落架等）一般都是非完整系统。自行车向右倾斜时，需向右转动手把才不致摔倒。这一日常现象可用滚轮系统的线路稳定性理论给以解释。即使轮胎制造得非常好、在极平坦的路面上行驶，汽车在一定速度范围内也会失去稳定、失去控制。这一技术问题不能用随机干扰解释，但可用非完整系统的线路稳定性理论加以说明。

5）分析力学与计算力学 电子计算机进入分析力学的问题值得重视。微分变分原理和积分变分原理应用于工程近似计算的

研究工作已经开始并逐步深入。

6）*分析力学与工程力学系统* 近代的动力机、运输机及发动机等一类机器，不论原动力是机械的，还是电力的，它们大多数都可构成所谓工程力学系统。三十年代 *Kron* 对旋转电机的研究，五十年代近藤一夫等对旋转水力机以及实际力学系统中各种复杂性质的研究都相当出色[23]。今后，对复杂工程力学系统的理论背景进行深入探讨将是十分有意义的工作。

Ишлинский 的下面两句话是正确的。"力学是大科学的组成部分，它在直接保证加速科学技术进步的科学中占有中心位置之一"。"在利用物理学、数学分析和计算技术方法的基础上来处理工程问题的科学基础方面，力学起主要作用"。分析力学作为整个力学的基础和新学科的生长点之一，应该在理论与实际两个方面不断向前发展。

参 考 文 献

[1] 梅凤翔，分析力学的近代发展，力学与实践，第9卷第1期，1987年， p10–15.

[2] Arnold. V.I., Mathematical methods of classical mechanics, S–V, 1978.

[3] 朱照宣，浑沌，北京大学讲义。

[4] Proceedings of the IUTAM–ISIMM Symposium on Modern Developments in Analytical Mechanics, T.I., Academy of Sciences of Turin, Turin, June 7–11, 1982.

[5] Santilli, R.M., Foundations of theoretical mechanics, I, S–V, 1978.

[6] 梅凤翔，非完整系统力学基础，北京工业学院出版社，1985年。

[7] Whittaker. E.T., A treatise on the analytical dynamics of particles and rigid bodies, Combridge, 1904.

[8] Лурье. А.И., Аналитическая механика, М, 1961.

[9] 梅凤翔，非完整系统力学的历史与现状，力学与实践，第1卷第4期，1979年。
[10] Appell. P., Rendel circole mathematic di Palermo, T. 32, 1911.
[11] Добронравов. В.В.. Основы механики неголономных систем, М, Высшая школа, 1970.
[12] Dooren. R.V., Theoretical and Applied Mechanics, Proceedings of the 14th IUTAM congress, Delft, The Netherlands, 30 August–4 September, 1976.
[13] Новоселов. В.С., Вестн. ЛГУ, 1, 1960.
[14] Неймарк. Ю.И, Фуфаев. Н.А., Динамика неголономных систем, М, 1967.
[15] Бренделев. В.Н., Вестн. МГУ, Математика, Механика, 1, 1983.
[16]—[18] Козлов. В.В., Вестн. МГУ, Математика, Механика, 3, 1982；4, 1982；3, 1983.
[19] Edelen. D.G.B., Lagrangian mechanics of nonconservative nonholonomic systems, 1977.
[20] 汪家诉，分析动力学，高等教育出版社，1958年。
[21] Baumgarte, J., ZAMM, 8, 1984.
[22] Иванов. А.П., П.М.М, Т.49, В.5, 1985.
[23] 近藤一夫等著，工程力学系统（刘亦珩译），上海科学技术出版社，1962年。

§1.2 非完整系统力学的历史与现状研究

非完整系统力学是分析力学的一个重要分支，属于一般力学范畴。非完整一词的法文是*non holonome*，在我国也曾译为“非全定”，“不完整”。非完整这个名称最早出现在1894年出版的*Hertz.H*的著作“*Die Prinzipen der Mechanik*”(力学原理)中。

非完整力学系统是指带有不可积分的微分约束的系统。非完整系统与完整系统的原则差别在于，完整系统的运动可用第二类

Lagrange 方程描述，而非完整系统的运动则以更复杂的微分方程组为特征。

非完整力学的历史大致可分为三个时期：萌芽时期（1894年以前）、奠基时期(1894年至1924年)和发展时期（1925年至今）。据不完全统计，1956年以前发表的论文有320篇[1]，1965年以前发表的有515篇[2]。今天，非完整力学可以作为一般力学的一个独立分支来研究[1]。非完整力学在一系列问题上得到重大发展，包括：在真实坐标和准坐标中建立运动方程；方程的积分；微分原理和积分原理的推广；微振动理论与运动稳定性；打击理论；非线性约束研究；张量方法的应用；关于各种类型的刚体滚动问题的解；非完整力学应用于技术、物理和几何等领域，特别是电机、掘进机和解算装置。这些问题的发展极大地丰富了理论力学和一般力学的内容。

在这一节里，我们对非完整力学的发展简史、主要成就、存在的问题以及发展方向等方面进行较为详细的研究。

1. 非完整力学的发展简史

（1）萌芽时期（1894年以前） 1788年法国力学家、数学家 *Lagrange.J.L* 发表名著"*Mécanique Analytique*"（分析力学），从而奠定了分析力学的基础。然而，在*Lagrange*时代，还不知道有独立坐标数目与坐标的独立变分数目不相同的系统——非完整约束系统的存在[3]。*Lagrange* 本人也以为他的方程可以适用于任何系统。直到1894年*Hertz*才第一次把约束和系统分成完整的和非完整的两大类，从此对非完整力学才有了较为系统的研究。

在*Hertz*以前，对非完整力学的研究是很初步的，属于萌芽性质的，主要在于寻求正确的、有效的方法。在萌芽时期的主要代表人物有*Остроградский.М.В*，*Ferrers.M*和*Routh.E*。

1838年，*Остроградский* 在"遵从可变条件系统的瞬时位