现代应用数学丛书

广义函数

〔日〕岩村　联 著

上海科学技术出版社

现代应用数学丛书

广义函数

〔日〕岩村　联　著
楊　永　芳　譯
关　肇　直　校

上海科学技术出版社

內 容 提 要

本书是日本岩波书店出版的現代应用数学丛书之一的中譯本。全书共分五章，第一章介紹广义函数的概念，第二章介紹拓扑結构，第三章叙述卷积和基本解，最后两章为核广义函数及广义函数的富里埃級数和富里埃变换。全书扼要地按照Schwartz的方法介紹了广义函数的基本理論，可供高等学校数学系和物理系师生、研究工作者作参考。

現代应用数学丛书
广 义 函 数
原书名 超 函 数
原著者 〔日〕岩 村 联
原出版者 岩 波 书 店
譯 者 楊 永 芳
校 者 关 肇 直
*
上海科学技术出版社出版
（上海瑞金二路450号）
上海市书刊出版业营业許可証出093号
新华书店上海发行所发行 各地新华书店經售
商务印书館上海厂印刷
*
开本 850×1168 1/32 印張 4 30/32 字数 116,000
1961年12月第1版 1961年12月第1次印刷
印数 1—16,500

統一书号：13119·437

出版說明

这一套书是根据日本岩波书店出版的"現代应用数学讲座"翻譯而成。日文原书共15卷60册，分成A、B两組，各編有序号。現在把原来同一題目分成两册或三册的加以合并，整理成42种，不另分組編号，陆續翻譯出版。

这套书涉及的面很广，其內容都和現代科学技术密切有关，有一定参考价值。每一本书收集的資料都比較丰富，而叙述扼要，篇幅不多，有利于讀者以較短时間掌握有关学科的主要內容。虽然，这套书的某些观点不尽适合于我国的情况，但其方法可供参考。因此，翻譯出版这一套书，对我国学术界是有所助益的。

由于日文原书是1957年起以讲座形式陆續出版的，写作时間和篇幅的限制不可避免地会影响原作者对內容的处理，为了尽可能地减少这种影响，我們在每一譯本中，特請譯者或校閱者撰写序或后記，以介紹有关学科的最近发展状况，并对全书內容作一些評价，提出一些看法，結合我国情况补充一些資料文献，在文內过于簡略或不足的地方添加了必要的注釋和改正原书中存在的一些錯誤。希望这些工作能对讀者有所帮助。

承担翻譯和校閱的同志，为提高书籍的质量付出了巨大劳动，在此特致以誠摯的謝意。

欢迎讀者对本书提出批評和意見。

上海科学技术出版社

目　录

第1章　广义函数概念

L. Schwartz在导入广义函数 (distribution) 的概念以后，显著地改进了微分法，这种思想也影响到其他的綫性运算，实际上对分析数学提供了一种有效而富于灵活性的思考方法。本章試由簡例出发导入概念。这些例子是为了适应需要而引进的，并且多少是变了形的东西，希望讀者不要把它看作是概念的本身。

§1　泛函的微分法[一維]

微分运算改进的关鍵在于分部积分。暂且把函数了解为实变数x的复值函数，对于連續性与可微性，如不特别申明，都指的是在全区間 $-\infty<x<\infty$ 上的性质。特别，命φ一般表示如下的函数：

$$\text{具有連續的微商 } \varphi', \tag{1.1}$$

$$\text{集 } \{x;\ \varphi(x)\neq 0\} \text{ 有界。} \tag{1.2}$$

記号$\{x;\ \cdots\}$表示"满足条件…之x的全体"。又，空集也看做是有界的，因此恒等于0的函数也是上述φ中之一。

如果函数f也有連續微商f'，就得到分部积分

$$\int f'(x)\varphi(x)dx=f(x)\varphi(x)-\int f(x)\varphi'(x)dx,$$

在远处$f(x)\varphi(x)$消失，于是

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)dx=-\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi'(x)dx. \tag{1.3}$$

其次，命f是一般的連續函数。即对各个实数x确定了与复数$f(x)$的一种对应$x\Rightarrow f(x)$，現在进而考虑用L_f所表示的下列对应：

$$\varphi\Rightarrow L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx. \tag{1.4}$$

与各个 φ 对应的是有限的积分值 $L_f(\varphi)$.

不同的 f 可由 L_f 来加以区别；詳細地說，設 g 是另一連續函数，

$$\left.\begin{array}{ll}\text{若} & f\neq g[\text{即在某点 } c,\ f(c)\neq g(c)],\\ \text{則} & L_f\neq L_g[\text{对于某 } \varphi,\ L_f(\varphi)\neq L_g(\varphi)].\end{array}\right\}\tag{1.5}$$

若 f, g 是实値函数，由于在 c 的某邻域 $|x-c|<\varepsilon$ 中，$f(x)-g(x)$ 的正負不变，因而可取如下的 φ：

$$\varphi(x)>0\quad(|x-c|<\varepsilon),\quad \varphi(x)=0\quad(|x-c|\geqslant\varepsilon).$$

一般則应把 f, g 分为实部与虚部，分别进行比較即可。

因此，如同点与它的坐标能够互相代用一样，f 与 L_f 也可互相代用或等同視之。在这种意义下，$L_f(\varphi)$ 也可写成 $f(\varphi)$，特别当 f' 連續时，(1.3) 又可写成

$$f'(\varphi)=-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx.\tag{1.6}$$

对一般的 f，此式右端的积分[有限]也能确定。因之，就一般的 f 来說，能够把对应

$$\varphi\Rightarrow-\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi'(x)dx$$

理解为新的'微系数' f' 的定义。

继續这样思考，我們就可以为圓滿地定义任意連續函数 f 的高阶微系数 $f^{(p)}$ 創造条件；为了防止混乱起見，玆約定，所謂可微与微商都指的是原来微分法中所說的那种意义。

首先，只考虑参与对应 L_f 的 φ 是无限回可微[从而各阶微商都連續]而且滿足条件 (1.2) 的函数，这样的 φ 的全体記为 $(\mathfrak{D})$. 对于这样的函数，(1.5) 也成立：在証明中，作为 φ 的实例，考虑实变数 t 的无限回可微函数

$$\kappa_\varepsilon(t)=\begin{cases}\exp(1/(t-\varepsilon^2)) & (t<\varepsilon^2),\\ 0 & (t\geqslant\varepsilon^2),\end{cases}\tag{1.7}$$

将 t 代以 $(x-c)^2$，就得到 $\varphi(x)=\kappa_\varepsilon((x-c)^2)$. 与前同样，連續函数 f 与对应 L_f 可以互相代用。

函数族$(\mathfrak{D})$关于普通的微分运算"封閉"，即

$$\text{对任意的 } \varphi\in(\mathfrak{D}),\ \varphi'\in(\mathfrak{D}) \tag{1.8}$$

[从而 $\varphi'',\varphi''',\cdots\in(\mathfrak{D})$]。因之，(1.6) 又可写成 $f'(\varphi)=-f(\varphi')$。更一般地，如 S 是'$(\mathfrak{D})$ 上的泛函'，也就是說，对于各个 $\varphi\in(\mathfrak{D})$，可决定一个复数 $S(\varphi)$ 与之成单一对应 $\varphi\Rightarrow S(\varphi)$，这时，如下的对应 S' 叫做 S 的微系数或**微商泛函**：

$$\varphi\Rightarrow S'(\varphi)=-S(\varphi'). \tag{1.9}$$

从 (1.8) 可知 S' 也是$(\mathfrak{D})$上的泛函，因而这个微分运算可以重复任意回数。逐次微系数 $S^{(0)}=S$, $S^{(1)}=S'$, $S^{(2)}=S''$, $\cdots$，根据 (1.9)，依次可写成

$$S^{(p)}(\varphi)=(-1)^p S(\varphi^{(p)})\quad [p=0,1,2,\cdots]. \tag{1.10}$$

注意 1.1 微商 f' 虽不連續，但如最初的分部积分存在，那么 (1.3)，即

$$\int_{-\infty}^{\infty} f'(x)\varphi(x)\,dx=f'(\varphi) \tag{1.11}$$

必然成立。这是与 $f(\varphi)$ 的定义同形的式子。然而，即使 f 可微，分部积分也不必存在，即使有有限的左端，(1.11) 也不能保証。这种'病态的'的实例姑且从略。

例 1.1 $f(x)=\max(x,0)$ 的微商是'Heaviside 函数' $Y(x)$：

$$Y(x)=0\quad(x<0),\qquad Y(x)=1\quad(x>0); \tag{1.12}$$

这个 f 的微商泛函也記为 Y. 由上列注意的前半段，即知

$$Y(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} Y(x)\varphi(x)\,dx=\int_0^{\infty}\varphi(x)\,dx. \tag{1.13}$$

Y 的微商泛函叫做 Dirac 拟函数 δ. 从而

$$\delta(\varphi)=Y'(\varphi)=-\int_0^{\infty}\varphi'(x)\,dx=\varphi(0).$$

最后的等号可用 (1.2) 导出。依据 (1.10)，

$$\delta^{(p)}(\varphi)=(-1)^p\delta(\varphi^{(p)})=(-1)^p\varphi^{(p)}(0). \tag{1.14}$$

f 的二阶以上的微商 $f^{(p+2)}(x)$ 虽皆相同 [在 $x=0$ 不作定义，在 $x\neq0$ 为 0]，但微商泛函 $f^{(p+2)}=\delta^{(p)}$——詳細地說，就是 $L_f^{(p+2)}$——則皆相异。(1.14) 可

以看做是常用的‘奇妙’公式

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta^{(p)}(x)\varphi(x)dx=(-1)^p\varphi^{(p)}(0) \tag{1.14'}$$

在某种程度上的[注意(1.2)之限制]合理化；实际上，$\delta^{(p)}(x)$并沒有什么独立的意义，但(1.14')的左端可解釋为$\delta^{(p)}(\varphi)$的便宜的表达式[与$f(\varphi)$同形]。关于$\delta^{(p)}(\varphi)$，依照后面的一般理論，可以撤消(1.2)的限制。

§2 多变数的情形

关于多变数的連續函数f：

$$f(x)=f(x_1, \cdots, x_n) \quad [-\infty<x_i<\infty],$$

也可考虑前述的对应

$$L_f:\ \varphi\Rightarrow L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\varphi(x)dx; \tag{2.1}$$

dx是微体积$dx_1\cdots dx_n$的略号。参与这种对应的φ設为**无限回連續可微**，其意义是，它和所有的逐次偏微商全都連續，并設$\{x;\ \varphi(x)\neq 0\}$有界，这样的φ的全体記作$(\mathfrak{D})$，或$(\mathfrak{D})_x$，或$(\mathfrak{D})_X$。如果需要，則用下标表明函数族或泛函族之基础的变数范圍，例如上面的X就是x所在变化的n維 Euclid 空間R^n。

为了再一次的导出(1.5)的証明，利用(1.7)，置

$$\varphi(x)=\kappa_\varepsilon(|x-c|^2)=\kappa_\varepsilon(\sum(x_i-c_i)^2)$$

即可；这里$x-c$是向量記法

$$x-c=(x_1-c_1, \cdots, x_n-c_n),$$

$|x|$是向量$x=(x_1, \cdots, x_n)$的长：

$$|x|^2=x_1^2+\cdots+x_n^2,\quad |x|\geqslant 0.$$

今后把R^n也視为实系数向量空間。

与前相同，可把X上[‘上’指全范圍]的連續函数f与$(\mathfrak{D})$上的泛函L_f等同起来。又对$(\mathfrak{D})$的泛函S，可定义同属于$(\mathfrak{D})$的泛函

$$\frac{\partial S}{\partial x_i}:\ \varphi \Rightarrow \frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi) \doteq -S\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}\right), \tag{2.2}$$

称之为 S 的(偏)微系数或微商泛函等。这是在連續函数范圍内的微分运算的扩充。就是説：有連續微商 $g=\partial f/\partial x_i$ 时，則有 $L_g=\partial L_f/\partial x_i$，因之，鉴于上面的約定，$g$ 与微商泛函 $\partial f/\partial x_i$"一致"。

这样的扩充关系又可用于其他的函数运算，例如，对于 $(\mathfrak{D})$ 上的泛函 S，T 以及复值常数 a，把 $(\mathfrak{D})$ 上的泛函

$$\varphi \Rightarrow S(\varphi)+T(\varphi), \quad \varphi \Rightarrow a\cdot S(\varphi) \tag{2.3}$$

依次定义为 $S+T$，aS。显見

$$\frac{\partial (S+T)}{\partial x_i}=\frac{\partial S}{\partial x_i}+\frac{\partial T}{\partial x_i}, \qquad \frac{\partial (aS)}{\partial x_i}=a\,\frac{\partial S}{\partial x_i}. \tag{2.4}$$

注意 2.1 不一定限于 $(\mathfrak{D})$ 上的泛函，一般泛函的和，定数倍积皆可仿此定义。

注意 2.2 固然可以把泛函 $\varphi \Rightarrow S(\varphi)T(\varphi)$ 称为乘积 ST，但它不是函数乘积 fg: $x\Rightarrow f(x)g(x)$ 的扩充。因此只好放弃关于一般乘积 ST 的定义。这也是种种优点中的一个不足之处。

把 $\partial S/\partial x_i$ 再就 x_j 微分之，則有

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi)=-\frac{\partial S}{\partial x_i}\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right)=S\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \varphi}{\partial x_j}\right). \tag{2.5}$$

第三端括弧内，因为是連續的，故能变更微分順序。这种順序变更可推用到第一端，于是

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}(\varphi)=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}(\varphi), \quad \frac{\partial}{\partial x_j}\frac{\partial S}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial S}{\partial x_j}. \tag{2.6}$$

这种新的微分运算可以无条件地更换順序。再者，关于'阶数' $\|p\|=p_1+\cdots+p_n$ 的逐次微分运算 D^p:

$$\left.\begin{array}{l} D^p=\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)^{p_1}\cdots\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)^{p_n}, \ \begin{array}{l} p=(p_1,\cdots,p_n), \\ \text{各 } p_i \text{ 皆是整数 } \geqslant 0 \end{array} \\ \left[(\partial/\partial x_i)^0 \text{ 是恒等运算：} (\partial/\partial x_i)^0 S=S\right] \end{array}\right\} \tag{2.7}$$

仿照(2.6)同样可得

$$D^pS(\varphi)=(-1)^{\|p\|}S(D^p\varphi). \tag{2.8}$$

为了在处理上更圓滿起見，把泛函的种类加以适当限制。首先注意，函数族$(\mathfrak{D})$对于通常的加法以及复数倍积这两种运算封閉，从而它是复系数的[无限維]向量空間。今后所考慮的函数族，泛函族也多是同样意义的向量空間，恒等于0的函数或泛函乃是其中的'原点'0。

現在，設所考慮的泛函S为向量空間$(\mathfrak{D})$上的'綫性'泛函，其意义是：对任意的φ，$\psi\in(\mathfrak{D})$与任意的系数a，有

$$S(\varphi+\psi)=S(\varphi)+S(\psi), \tag{2.9}$$

$$S(a\varphi)=aS(\varphi) \quad [\text{从而 } S(0)=0]. \tag{2.9'}$$

这个限制对于以上所有的論証并不发生任何障碍；实际上，L_f本身就是綫性的，而綫性泛函的微系数，和以及复数倍积也都是綫性的。

注意 2.3 把φ,ψ等限制为实値函数$\in(\mathfrak{D})$就够了；記其全体为$(\mathfrak{R}\mathfrak{D})$。这时(2.9′)的系数$a$当然限于实数，但$S(\varphi)$仍設为复数。把一般的$\varphi\in(\mathfrak{D})$分为实部$\mathfrak{R}\varphi$与虚部$\mathfrak{J}\varphi$：

$$\varphi(x)=\mathfrak{R}\varphi(x)+\sqrt{-1}\,\mathfrak{J}\varphi(x),$$

则$\mathfrak{R}\varphi$以及$\mathfrak{J}\varphi$全都属于$(\mathfrak{R}\mathfrak{D})$，因而$(\mathfrak{D})$上的$S$由$(\mathfrak{R}\mathfrak{D})$上的値所决定：

$$S(\varphi)=S(\mathfrak{R}\varphi)+\sqrt{-1}\,S(\mathfrak{J}\varphi).$$

反之，給定$(\mathfrak{R}\mathfrak{D})$上的[实系数]綫性的$S$时，借助此式把$S$扩展到$(\mathfrak{D})$上，则新的$S$在$(\mathfrak{D})$上成为[复系数的]綫性泛函。事实上，从$(\mathfrak{R}\mathfrak{D})$上的(2.9)立即得到$(\mathfrak{D})$上的(2.9)。又$(\mathfrak{D})$上的(2.9′)当$a$是实数或$\sqrt{-1}$时极其明显，从而就一般的$a$說来，分成实部与虚部以后也就容易驗証。

在次节虽然还要补充限制，但目前先考察一下綫性定义式(2.9)，(2.9′)所起的一些作用。命α为$X=R^n$上的C^∞級函数，即无限回連續可微函数。与$\varphi\in(\mathfrak{D})$同样，$\alpha\varphi$也是C^∞級的，又因$\{x;\ \varphi(x)\neq0\}$包含着$\{x;\ \alpha(x)\varphi(x)\neq0\}$，所以后者也是有界集。从而$\alpha\varphi\in(\mathfrak{D})$。如使$S(\alpha\varphi)$对应于$\varphi$，新的綫性泛函就确定了；并以$\alpha S$表示之。

$$\alpha S: \ \varphi \Rightarrow \alpha S(\varphi) = S(\alpha\varphi). \tag{2.10}$$

这个定义作如下的解释比較适当：因为 $\alpha L_f = L_{\alpha f}$，所以乘积 αS 是乘积 αf 的‘扩充’，特别当 $\alpha = a = \text{const}$ 时，αS 与 (2.3) 的 aS 一致[(2.9′)]。

为了避免与此乘积混淆起見，引入在綫性泛函时常使用的記号 $\langle S, \varphi\rangle$：

$$\langle S, \varphi\rangle = S(\varphi). \tag{2.11}$$

现在試把以上各公式用这一記法改写一下。

若把 $\partial/\partial x_i$ 用右肩的 $'$ 表示，則 α' 也是 C^∞ 級的，再把 $(\alpha\varphi)' = \alpha'\varphi + \alpha\varphi'$ 代入(2.9)，卽得

$$\langle S, (\alpha\varphi)'\rangle = \langle S, \alpha'\varphi\rangle + \langle S, \alpha\varphi'\rangle.$$

按照定义把各項依次变形，最后移項卽得

$$-\langle S', \alpha\varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle + \langle \alpha S, \varphi'\rangle,$$

$$-\langle \alpha S', \varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle - \langle (\alpha S)', \varphi\rangle,$$

$$\langle (\alpha S)', \varphi\rangle = \langle \alpha' S, \varphi\rangle + \langle \alpha S', \varphi\rangle.$$

最終，按照泛函和的定义，得到

$$(\alpha S)' = \alpha' S + \alpha S' \quad [' \text{ 是 } \partial/\partial x_i]. \tag{2.12}$$

反复利用 (2.12)，就得到下面的 Leibniz 公式：如同(2.7)那样，考虑以整数 $q_i \geqslant 0$ 为分量的向量 $q = (q_1, \cdots, q_n)$，将 $D^p S$ 写作 $S^{(p)}$，則有

$$(\alpha S)^{(p)} = \sum_{q \leqslant p} C_q{}^p \alpha^{(p-q)} S^{(q)}. \tag{2.13}$$

右端是由 q 变化所产生的和，而且

$$\left.\begin{aligned} & q \leqslant p, \text{ 卽对于所有分量有条件 } q_i \leqslant p_i, \\ & C_q{}^p = \prod_{i=1}^{n} \frac{p_i!}{q_i!\,(p_i - q_i)!} [\text{多項式系数}]. \end{aligned}\right\} \tag{2.14}$$

如下所説，能够局部地，就是以 X 中的开集 Ω 代替 X，来定义与前見各种概念相当的概念。命 f 为 Ω 上的連續函数。当

$x\in\Omega$ 趋近于 Ω 的边界时，也可能 $|f(x)|\to\infty$。尽管如此，为使有限积分

$$L_f(\varphi)=\int_\Omega f(x)\varphi(x)dx \tag{2.15}$$

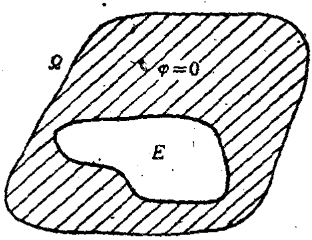

图 2.1

确定，只要集

$$E=\{x;\ \varphi(x)\neq 0\}$$

的閉包 $\bar{E}$ 含于 Ω 内就行；$\bar{E}$ 是用 E 的点可能任意逼近的点［E 本身的点也包含在内］的全体，从而这是包含 E 的最小閉集。对于任意連續函数 φ，上述 E 的閉包叫做 φ 的**支集**(carrier, support)，記作 $\mathrm{Car}(\varphi)$。

例如对于 $\varphi=\kappa_\varepsilon$[(1.7)]，$E$ 是半无限开区間 $t<\varepsilon^2$，$\mathrm{Car}(\varphi)$ 是区間 $t\leqslant\varepsilon^2$。

于是，設使 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 含于 Ω 内的函数 $\varphi\in(\mathfrak{D})$ 的全体为 $(\mathfrak{D})_\Omega$：

$$(\mathfrak{D})_\Omega=\{\varphi;\ \varphi\in(\mathfrak{D}),\ \mathrm{Car}(\varphi)\subset\Omega\},$$

以此代替 $(\mathfrak{D})$。$\Omega=X$ 时，函数族 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 不外就是 $(\mathfrak{D})$。这还能表达如下。首先，对于在 X 内的有界閉集 K，置

$$(\mathfrak{D}_K)=\{\varphi;\ \varphi\ 是在\ X\ 上\ C^\infty\ 級,\ \mathrm{Car}(\varphi)\subset K\}. \tag{2.16}$$

对于在 Ω 内所有 K 的 $(\mathfrak{D}_K)$ 的并集正是 $(\mathfrak{D})_\Omega$：

$$(\mathfrak{D})_\Omega=\bigcup_{K\subset\Omega}(\mathfrak{D}_K). \tag{2.17}$$

$(\mathfrak{D}_K)$ 和 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 都是复系数的向量空間，而且关于微分运算封閉。这是因为，$\mathrm{Car}(a\varphi+b\psi)$ 含于 $\mathrm{Car}(\varphi)$ 及 $\mathrm{Car}(\psi)$ 的并集 $\mathrm{Car}(\varphi)\cup\mathrm{Car}(\psi)$ 之内，而且 $\mathrm{Car}(D^p\varphi)\subset\mathrm{Car}(\varphi)$。

与前同样，可把 Ω 上的連續函数 f 与 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函 L_f［(2.15)］等同看待。又对 $(\mathfrak{D})_\Omega$ 上的綫性泛函，可以定义同前的各种运算。至于乘积 αS 的問題，可参看 §3 末尾。

§3 广义函数

为了能灵活运用分析数学的基本方法'轉向极限'，还需要在泛函的假設条件中补充按照适当收斂 $\varphi_j \to \varphi$ 的連續性 $S(\varphi_j) \to S(\varphi)$。首先要抉擇适当的收斂。譬如仅仅假設 $\varphi_j \in (\mathfrak{D})$ 在各点 x 单純地收斂于 $\varphi \in (\mathfrak{D})[\varphi_j(x) \to \varphi(x)]$ 的話，就連 $f(\varphi_j) \to f(\varphi)$ 也不能保証。另外虽取較强的一致收斂 $\|\varphi_j - \varphi\|_\infty \to 0$，結果也是同样[如下列的反例]。这里的記号 $\|g\|_\infty$ 表示遍历一切 x 的 $|g(x)|$ 的上确界：

$$\|g\|_\infty = \sup_x |g(x)|. \tag{3.1}$$

例 3.1 取原点以外的点 $a \in X$，置

$$\psi_a(x) = \kappa_\varepsilon(|x-a|^2)/|a| \quad [\text{参照}(1.7), \varepsilon \text{ 固定}],$$

則 $\psi_a \in (\mathfrak{D})$，且当 $|a| \to \infty$ 时一致地 $\psi_a \to 0$. 然而，对于 $f(x) = |x|^2$ 却有 $f(\psi_a) \to \infty \ (|a| \to \infty)$.

在这个例子中，各 ψ_a 属于某 $(\mathfrak{D}_K)$ [K 是有界閉集]，但不等于說一切 ψ_a 屬于某同一的 $(\mathfrak{D}_K)$. 特別要注意'各个'与'一切'的区別。若一切 φ，φ_j 都屬于某同一 $(\mathfrak{D}_K)$ 的話，根据

$$|f(\varphi_j) - f(\varphi)| = \left|\int_K f(x)(\varphi_j(x) - \varphi(x))\,dx\right| \leqslant a \cdot \|\varphi_j - \varphi\|_\infty,$$

$$a = \int_K |f(x)|\,dx = \text{const} < \infty,$$

从一致收斂 $\varphi_j \to \varphi$ 可得 $f(\varphi_j) \to f(\varphi)$. 这就是說，

$$\text{在各}(\mathfrak{D}_K)\text{上，泛函 } f = L_f \text{ 对于一致收斂連續。} \tag{3.2}$$

然而这个連續性未必能傳递給微商泛函 $D^p f$：参看例 1.1。为了弥补这个缺点，定义比一致收斂更强的，在 $(\mathfrak{D}_K)$ 上的固有收斂 $\varphi_j \to \varphi$：那就是各阶微商[連 0 阶的也在內]的一致收斂，这样等于假設了

$$\text{对于各 } D^p, \ \|D^p \varphi_j - D^p \varphi\|_\infty \to 0. \tag{3.3}$$

$\varphi_j \in (\mathfrak{D}_K)$ 在这种意义下收斂于 $\varphi \in (\mathfrak{D}_K)$ 的事实，可写作 φ_j

$\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$。

注意 3.1 如果更强地，要求收斂(3.3)对于一切 p 都是一致的，也就是說，对于所有 p 的上确界

$$\varepsilon_j=\sup_p\|D^p\varphi_j-D^p\varphi\|_\infty=\sup_{p,x}|D^p\varphi_j(x)-D^p\varphi(x)|$$

都 $\to 0$，这样作将是不现实的。因为如 $\varepsilon_j<\infty$ 的話，就能有 $\varphi_j=\varphi$。例如就一維空間$[X=R^1]$来說，$\psi=\varphi_j-\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ 对于 K 以外的点 a，ψ 与它的逐次微系数同时为 0，因而 $|\psi(x)|\leqslant\varepsilon_j|x-a|^p/p!\to 0\ (p\to\infty)$，于是 $\psi(x)=0$。

当 $\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$ 时，自然还有

(i) 一致地 $\varphi_j\to\varphi$　[作为 $p=(0,\cdots,0)$ 的情形]，

(ii) $\varphi'_j\to\varphi'$ in$(\mathfrak{D}_K)$　[$'$表示 $\partial/\partial x_i$]。

从而在$(\mathfrak{D}_K)$上，关于固有收斂还有这样的性质：

(i) 泛函 $f=L_f$ 連續，

又据对应 $\varphi\Rightarrow\varphi'$ 的連續性(ii)便有

(ii) 泛函 S 連續时，S' 也連續：

詳細地說，通过規定 S' 的图式(schema)

$$\varphi\Rightarrow\varphi'\Rightarrow S(\varphi')\Rightarrow -S(\varphi')=S'(\varphi),$$

[注意各阶段的連續性！]由 $\varphi_j\to\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$ 可导致 $S'(\varphi_j)\to S'(\varphi)$❶。

$(\mathfrak{D})$上的綫性泛函，如果在任何$(\mathfrak{D}_K)$上[并且按照那上面的固有收斂]也連續的話，就叫做**广义函数**[詳細地說，$X=R^n$ 上的广义函数]；要注意这里应考虑 X 上的一切有界閉集 K。X 上的連續函数[看作 $f=L_f$]也是广义函数，广义函数的微系数，复数倍积以及和都仍是广义函数；复数倍积的連續性可以按照图式 $\varphi\Rightarrow S(\varphi)\Rightarrow a\cdot S(\varphi)$ 而归結到式中各阶段的連續性，关于和的連續性也是一样的。X 上的 C^∞ 級函数 α 与广义函数 S 的乘积 αS [参看(2.10)]仍是广义函数。

---

❶ 此处原书誤为 $S(\varphi)$。——校者注

驗証时，只要闡明图式 $\varphi\Rightarrow\alpha\varphi\Rightarrow S(\alpha\varphi)=\alpha S(\varphi)$ 第一段 $\varphi\Rightarrow\alpha\varphi$ 的連續性即可。設 $\varphi_j\to\varphi$ in$(\mathfrak{D}_K)$. 这时 $\alpha\varphi_j\in(\mathfrak{D}_K)$, $\alpha\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$. 又从

$$\|\alpha\varphi_j-\alpha\varphi\|_\infty\leqslant(\max_{x\in K}|\alpha(x)|)\cdot\|\varphi_j-\varphi\|_\infty\to 0$$

可知，一致地 $\alpha\varphi_j\to\alpha$. 同理，

$$D^p(\alpha\varphi_j)=\sum_{q\leqslant p}C_q{}^p\alpha^{(p-q)}\varphi_j^{(q)}\quad[\text{参看}(2.13)]$$

的右端各項一致收斂于 $D^p(\alpha\varphi)$ 的相应項，从而一致地 $D^p(\alpha\varphi_j)\to D^p(\alpha\varphi)$. 故 $\alpha\varphi_j\to\alpha\varphi$ in $(\mathfrak{D}_K)$.

例 3.2 由 X 的定点 a 所确定的泛函

$$\delta_a:\ \delta_a(\varphi)=\varphi(a)\quad[\varphi\in(\mathfrak{D})],$$
$$\delta_a^{(p)}=D^p\delta_a:\ \delta_a^{(p)}(\varphi)=(-1)^{|p|}\varphi^{(p)}(a)$$

是广义函数，按照 §6 所述的一般理論，δ_a 可以了解为‘置于点 a 的单位质量’。特别 $\delta=\delta_0$ 时称为 Dirac 拟函数。已給若干个点 a，假設这些点对于 X 是‘局部’有限的，就是說，对 X 的各点 x，存在着邻域 $U(x)$，每个 $U(x)$ 仅含有限个 a. 这时，对各点 a，若使系数 $c=c_a$ 及微分运算 D^p, $p=p_a$ 与之对应，則由

$$S(\varphi)=\sum_a(-1)^{|p|}c\cdot\varphi^{(p)}(a)$$

可决定一个广义函数 S: 事实上，当 $\varphi\in(\mathfrak{D}_K)$ 时，K 被有限个 $U(x)$ 所复盖，于是，$\sum_a$ 成为有限和 $\sum_{a\in K}$ 了。这个 S 在形式上可写成

$$S=\sum_a c\cdot D^p\delta_a=\sum_a c\cdot\delta_a^{(p)};$$

关于广义函数的无限和等的收斂問題可参看 §11, §12。

例 3.3 設 f 是 $X=R^1$ 上的分区連續函数，即 f 的不連續点 a 是局部有限个，而且具有左右[有限]极限值 $f(a-0)$, $f(a+0)$. 把在共同連續点上成立着 $f(x)=g(x)$ 的分区連續函数看做相等的，并記作 $f=g$. 这时也可把 f 与广义函数

$$L_f:\ L_f(\varphi)=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\varphi(x)\,dx$$

等同起来。若存在分区連續微商 f' 时，根据分部积分，有

$$-L_f(\varphi')=\int_{-\infty}^{\infty}f'(x)\varphi(x)\,dx+\sum_a(f(a+0)-f(a-0))\varphi(a).$$

把广义微商 $(L_f)'$ 写成 f'，把微商——与其相应的广义函数——改写为 $[f']$. 这样，上式就成为