GONGCHENGZHONGDE
ZHENDONGWENTI

工程中的振动问题

S.铁摩辛柯 D.H.杨 W.小韦孚 著

胡人礼 译 杜庆莱 校

人民铁道出版社

工程中的振动问题

S. 铁摩辛柯 D. H. 杨 W. 小韦孚 著

胡 人 礼 译

杜 庆 莱 校

人 民 铁 道 出 版 社

1 9 7 8 年 · 北京

内 容 简 介

本书系统地介绍了工程中的振动理论，包括结构振动和机械振动理论，内容还涉及振动理论方面许多新的重要发展。全书共五章和一个附录：第一章具有一个自由度的系统；第二章具有非线性特征的系统；第三章具有两个自由度的系统；第四章具有多个自由度的系统；第五章弹性体的振动；附录计算机程序。

本书可供从事结构振动计算和机械振动计算，以及从事振动理论研究的科技人员的参考。

S.Timoshenko, D.H.Young, W.Weaver, Jr.
VIBRATION PROBLEMS IN
ENGINEERING, 4th ed.
John Wiley & Sons, Inc. 1974

工程中的振动问题
〔美〕S.铁摩辛柯 D.H.杨 W.小韦孚 著
胡人礼 译 杜庆莱 校
人民铁道出版社出版
新华书店北京发行所发行
各地新华书店经售
人民铁道出版社印刷厂印
开本：787×1092 1/16 印张：22.125 字数：555千
1978年8月 第1版 1978年8月 第1次印刷
统一书号：15043·6123 定价：2.05元

目　录

第一章　具有一个自由度的系统

1.1　自由谐和振动

如果静态受载的弹性系统，例如一根梁或一根推进器的轴，以某种方式从其平衡位置受到扰动，那么其变形状态下的内力和内力矩不再与外载相平衡，而将发生振动。一般来说，一个弹性系统可能产生不同图式或方式的振动。例如拉紧的钢丝，由于划分其长度的结点的数目不同，可能按各种形状振动。在最简单的情况下，任一瞬间振动系统的形态可以借一个坐标来确定，这样的情况称为具有一个自由度的系统。

让我们考虑图1.1a中所示的情况，表示一块重量为W(或者更恰当地说其质量为W/g)的块体，用一根线性弹性螺旋弹簧悬挂于一支承处。如果该装置只能使重量W产生竖直位移，而且弹簧的质量与块体的质量相比非常小，那么该系统可以认为具有一个自由度。该系统的形态，可以完全借块体距其平衡位置的平动x来确定。

当该重量起初加到弹簧上时，产生静变位：

$$\delta_{st}=\frac{W}{k} \qquad (a)$$

式中k代表弹簧的长度产生单位变化所需要的力，称为弹簧常数。如果重量以磅计，弹簧的伸长量以英寸计，那么弹簧常数则以磅/英寸为单位来表示。对于由平均线圈直径为D，钢丝直径为d的n个封闭绕缠线圈组成的螺旋弹簧，其弹簧常数可表达为*：

$$k=\frac{Gd^4}{8nD^3} \qquad (b)$$

式中G代表钢丝的弹性剪切模量。

现在使块体自其平衡位置产生位移并放松，从而发生振动。这种仅借弹簧内的弹性力来维持的振动，称为自由振动或固有振动。如果位移x顺向下方向考虑为正，那么相应于块体任一位置处弹簧中的力则为$W+kx$，如图1.1b所示。已知块体的质量为W/g，并以$\ddot{x}$表示其加速度d^2x/dt^2，我们可以应用牛顿第二运动定律得到

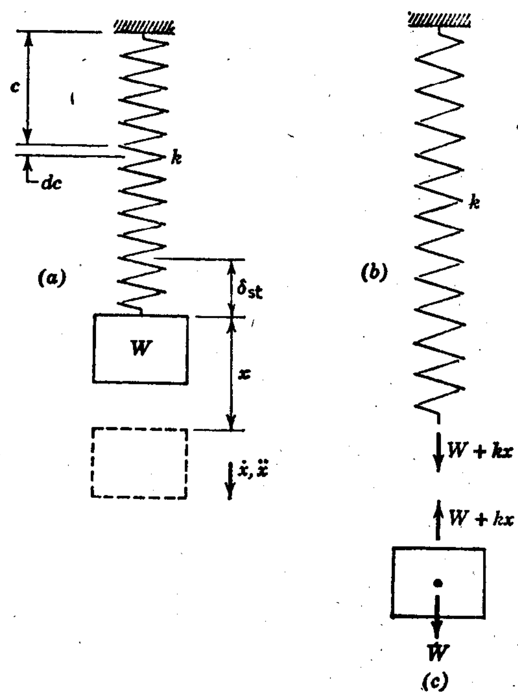


图　1.1

$$\frac{W}{g}\ddot{x}=W-(W+kx) \qquad (c)$$

*见S.Timoshenko和D.H.Young著Elements of Strength of Materials，第5版，Van Nostrand, Princeton, N.J., 1968，第80页。

作用于块体上的诸不平衡力示于图1.1c 中。方程（c）的右边，重量W消去了，说明该系统自由振动的运动微分方程与重力场无关。重要的是要记住在上面讨论中位移x是从静平衡位置度量的并考虑顺向下方向为正。

引进下列符号

$$p^2=\frac{kg}{W}=\frac{g}{\delta_{st}} \tag{d}$$

我们可以用下列形式表示方程（c）：

$$\ddot{x}+p^2x=0 \tag{1.1}$$

如果我们取 $x=C_1\cos pt$或 $x=C_2\sin pt$，这里C_1和C_2为任意常数，那么此方程将得到满足。将这些解加起来，我们得到方程（1.1）的通解为：

$$x=C_1\cos pt+C_2\sin pt \tag{1.2}$$

可以看到，重量W的竖直运动具有振动的性质，因为$\cos pt$和 $\sin pt$ 均为周期函数，这些函数在时间间隔τ之后它们自身重复，因而

$$p(\tau+t)-pt=2\pi \tag{e}$$

这种时间间隔称为振动的周期。它的大小，从方程（e），为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p} \tag{f}$$

或应用式（d）

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{W}{kg}}=2\pi\sqrt{\frac{\delta_{st}}{g}} \tag{1.3}$$

可以看到，振动的周期仅取决于重量W的大小和弹簧常数k，而与位移量无关。我们也可以说悬挂着的重量W的振动周期与长度等于静变位δ_{st}的单摆的振动周期相同。如果此变位由理论确定了或由实验确定了，那么周期τ可从方程（1.3）来求算出。

每一单位时间内往返的次数（例如每秒的周数）称为振动的频率。以f表示频率，我们得到

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{kg}{W}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}} \tag{1.4}$$

方程（1.2）所表达的振动称为简谐运动。为了确定积分常数C_1和C_2，我们必须考虑初始条件。假设在初始瞬间（$t=0$）重量W距其平衡位置的位移为x_0，并假设其初始速度为$\dot{x}_0$。将$t=0$代入方程（1.2），我们得到：

$$C_1=x_0 \tag{g}$$

将方程（1.2）对时间取导数，并代入$t=0$，我们得到：

$$C_2=\frac{\dot{x}_0}{p} \tag{h}$$

将（g）和（h）中的常数值代入方程（1.2），得到重量W的振动表达式：

$$x=x_0\cos pt+\frac{\dot{x}_0}{p}\sin pt \tag{1.5}$$

可以看到，在此情况下，振动由两部分组成：一部分与$\cos pt$成比例，且取决于初始位移x_0，另一部分与$\sin pt$成比例，取决于初始速度$\dot{x}_0$。这每一部分可以如图1.2a和1.2b用位

移对时间绘成曲线以图解表示。振动着的重量W，在任一时刻t处的总位移x，可以从该时刻两曲线的纵坐标加到一起来得到，如图1.2 c 的曲线所示。

表示振动的另一种方法是借助于转动向量。想像大小为x_0的向量$\overline{OP}$（见图1.3），以等角速度p绕固定点O转动。此速度称为振动的角频率或圆周频率。如果在初始瞬间（$t=0$）时，向量$\overline{OP}$与x轴相吻合，那么在任一其它时间t时，它与该轴所成的角等于pt。此向量在x轴上的投影等于$x_0\cos pt$，代表（1.5）式的第一项。取另一大小为$\dot{x}_0/p$且垂直于向量$\overline{OP}$的向量$\overline{OQ}$，我们看到它在x轴上的投影给出（1.5)式的第二项。振动重量的总位移x，借将两个互相垂直以角速度p转动的向量$\overline{OP}$和$\overline{OQ}$在x轴上的投影加起来得到。

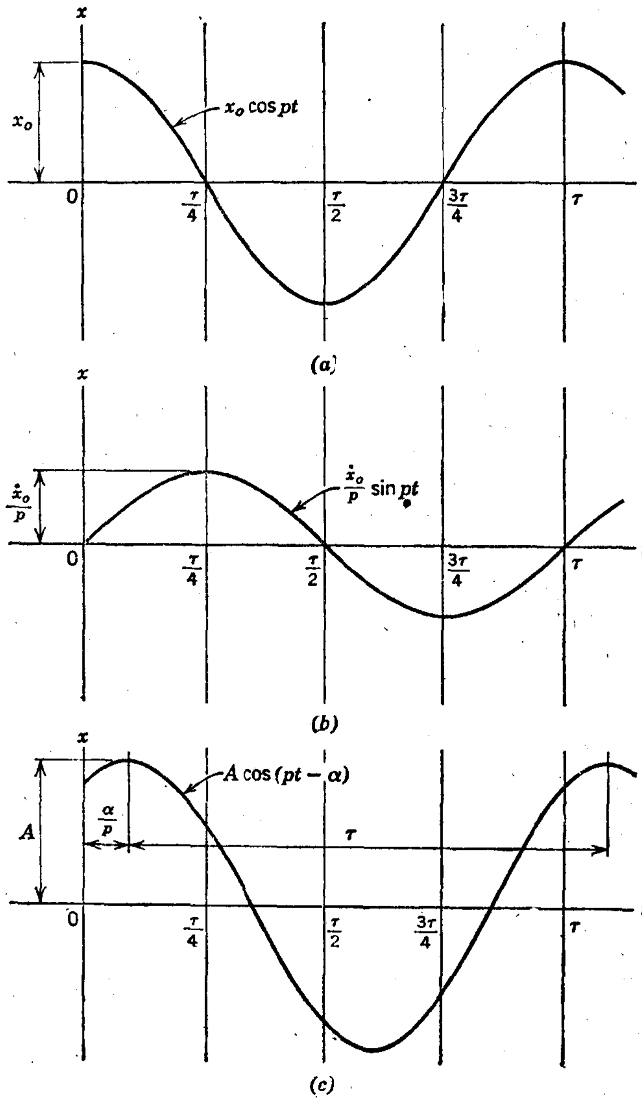


图 1.2

如果我们考虑等于向量$\overline{OP}$和$\overline{OQ}$的向量之和的向量$\overline{OR}$代替这两个向量，并取合成向量在x轴上的投影，则得到相同的结果。此向量的大小为A，从图1.3得到：

$$A=\sqrt{x_0^2+\left(\frac{\dot{x}_0}{p}\right)^2} \qquad (i)$$

与x轴形成的角为$pt-\alpha$，其中

$$\alpha=\tan^{-1}\frac{\dot{x}_0}{px_0} \qquad (j)$$

从上面讨论，显然方程（1.5）可以用下面等效形式来表达：

$$x=A\cos(pt-\alpha) \qquad (1.6)$$

式中用表达式（i）和（j）代表的A和α为取决于运动初始条件的新常数。可以看到，一个与$\cos pt$成比例，另一个与$\sin pt$成比例的两个简谐运动相加，又为一个与$\cos(pt-\alpha)$成比例的简谐运动，如图1.2 c 中的图解所表示。此曲线的最大纵坐标A等于图1.3中向量$\overline{OR}$的大小，代表振动着的物体距其平衡位置的最大位移，称为振幅。

由于两个转动向量$\overline{OP}$和$\overline{OR}$之间的角为α，所以图1.2 c 中曲线的最大纵坐标对图1.2 a 中曲线的最大纵坐标移动α/p值。在这种情况下，可以说，借图1.2 c 中曲线所代表的

总的振动，迟于图 1.2 *a* 中曲线所给的运动分量，其角 α 称为这两种振动的相差或相角。图 1.3 中坐标 x，$\dot{x}/p$ 定义为相平面，在该平面内，运动按转动向量处理。

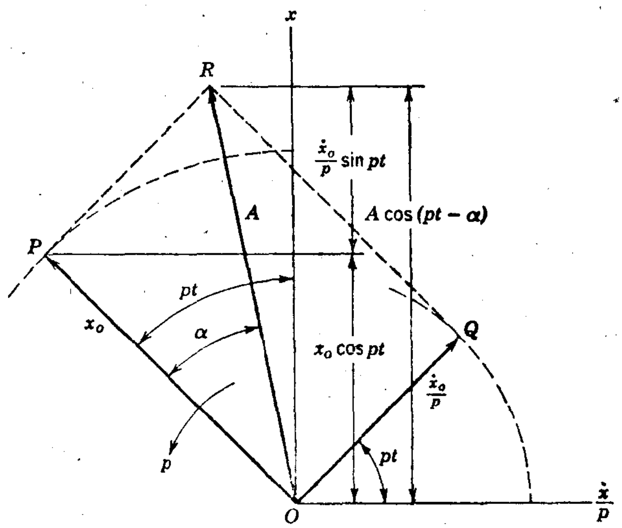


图 1.3

例题1　一根长度 $l=10$ 英尺、弯曲刚度 $EI=20\times10^6$ 磅-英寸^2 的简支钢梁，有一重量 $W=200$ 磅的块体从高度 $h=\frac{1}{2}$ 英寸处落到跨中上，如图 1.4 所示。略去梁的分布质量，并假设在初始接触后，块体与梁不分开，试求接着发生的自由振动的频率和振幅。

解：在静止于梁中央处的荷载 W 的作用下，其静力挠度为：

$$\delta_{st}=\frac{Wl^3}{48EI}=\frac{(200)(120)^3}{(48)(20\times10^6)}=0.36\text{英寸}$$

因而，从方程（1.4），自由振动的频率为：

$$f=\frac{p}{2\pi}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{\delta_{st}}}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{386}{0.36}}=\frac{32.8}{6.28}=5.21\text{周/秒}$$

在求算振幅中，我们注意，当下落重量最初打击梁的初始时刻（$t=0$），初始位移为：

$$x_0=-\delta_{st}$$

初始速度为：

$$\dot{x}_0=\sqrt{2gh}$$

因而，借方程（i），其振幅为：

$$A=\sqrt{(-\delta_{st})^2+2h\delta_{st}}=\sqrt{0.13+0.36}=\sqrt{0.49}=0.70\text{英寸}$$

因为此振幅是从静力平衡位置起度量，所以应看到，由于下落重量所产生的总挠度为 $A+\delta_{st}$ $=1.06$英寸。

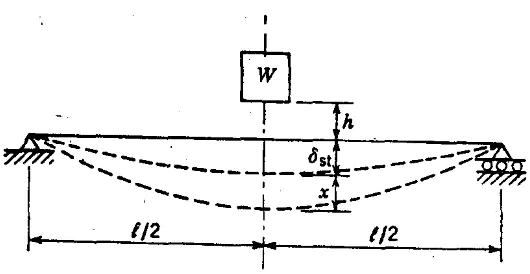


图 1.4

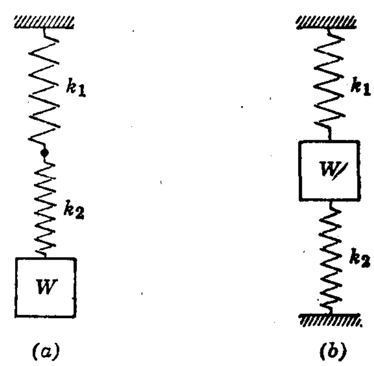


图 1.5

例题2 图1.5a中，重量为W的块体借两个串联的弹簧（它们的弹簧常数为k_1和k_2）吊挂着。图1.5b中，同一块体借两个所谓并联的弹簧（其常数为k_1和k_2）支承着。试对每一种情况求出其系统的等效弹簧常数k。

解：对于图1.5a中的情况，每一弹簧承受相同的拉力W，它们每一个的伸长量为$\delta_1=W/k_1$和$\delta_2=W/k_2$。因此，该重量的总的静力变位为：

$$\delta_{st}=\delta_1+\delta_2=\frac{W}{k_1}+\frac{W}{k_2}$$

该系统的等效弹簧常数为$k=W/\delta_{st}$，于是从方程（a），写成为：

$$k=\frac{k_1k_2}{k_1+k_2} \tag{k}$$

将此k值用于方程（1.3）中，我们可以求算自由振动的周期。

对于图1.5b中的情况，令S_1为上面弹簧中由于重量W静力作用所引起的拉力，S_2为下面弹簧所引起的压力。因为每一弹簧必定具有相同的长度变化，所以我们得到：

$$\delta_{st}=\frac{S_1}{k_1}=\frac{S_2}{k_2}=\frac{W}{k} \tag{l}$$

另外，该重量的单位变位产生的恢复力为：

$$k=k_1+k_2 \tag{m}$$

它为该系统的等效弹簧常数。亦即，对于并联的弹簧，只需要将各别弹簧常数加起来，便得到等效常数。各别弹簧中的力可从表达式（l）和（m）得到为：

$$S_1=\frac{k_1}{k_1+k_2}W \qquad S_2=\frac{k_2}{k_1+k_2}W \tag{n}$$

例题3 一个简单框架结构，由重量$W=38,600$磅，借四根刚性竖直柱支承着的刚性重型平台组成，它的每一侧面内用两根对角钢丝侧面拉住，如图1.6a所示。诸柱端点均为铰接，每一对角钢丝的横截面积为$1/\sqrt{2}$（英寸）^{2}，张拉到很高的应力。除平台外，略去所有的质量*，试求出该结构自由侧向振动的周期τ。

解：在平台的质量中心处顺x方向作用一力P，如图1.6b所示。由于此荷载，对角钢丝AC中拉力的变化将为$S=\sqrt{2}P/4$。该对角钢丝的相应伸长量为：

$$\varDelta=\frac{Sl}{AE}=\frac{\sqrt{2}P\sqrt{2}h}{4AE}=\frac{Ph}{2AE}$$

对角钢丝BD缩短一个相等的量。由于对角钢丝的这些长度变化的结果，我们看到平台有一侧向变位$\delta=\sqrt{2}\varDelta$。因此，该结构的弹簧常数成为：

$$k=\frac{P}{\delta}=\frac{\sqrt{2}AE}{h}=\frac{30\times10^6}{120}=250,000\text{磅/英寸}$$

将此k值代入方程（1.3），我们得到：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{38,600}{(250,000)(386)}}=2\pi\sqrt{0.0004}=0.126\text{秒}$$

留给读者去说明在此例题中不一定需要顺x方向作用水平力P，如果P顺z方向或顺水平面内任何其它方向，将得到相同的结果。

*即略去诸柱和钢丝的质量。 ——译注

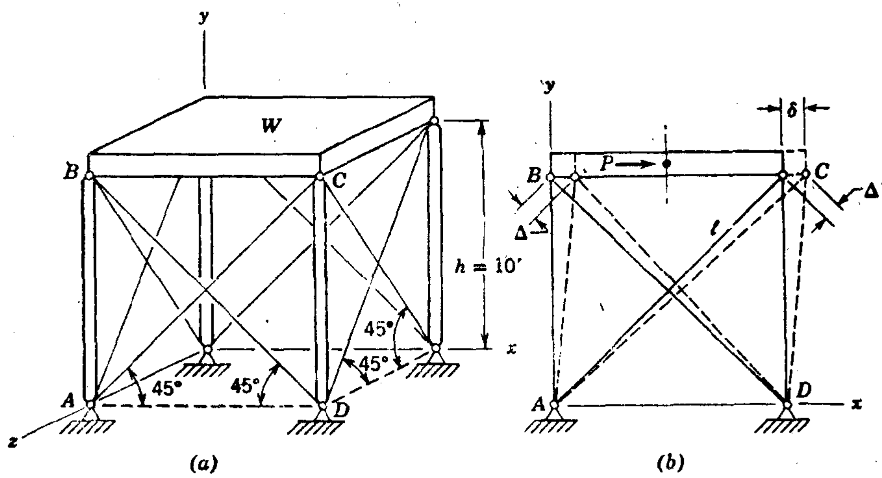


图 1.6

例题 4 假设图 1.7 中重量W代表一个以等速$\dot{x}_0$向下运动的升降机，还假设其弹簧由一钢索组成。试确定当运动过程中上端线盘突然卡住时钢索中的最大应力。令重量$W=10,000$磅，$l=60$英尺，钢索的横截面积$A=2.5$（英寸）^{2}，钢索的弹性模量$E=15\times10^6$磅/英寸^2，$\dot{x}_0=3$ 英尺/秒。钢索的重量略去不计。

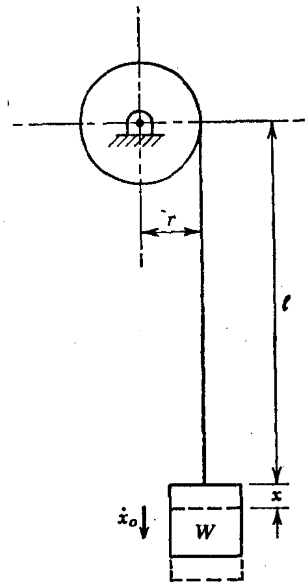


图 1.7

解：在升降机匀速运动过程中，钢索中的拉力等于$W=10,000$磅，当此事故发生的瞬间时钢索的伸长量为$\delta_{st}=Wl/AE=0.192$英寸。由于初始速度$\dot{x}_0$，升降机并不突然停止，而在钢索上振动。从事故发生的时刻起计算时间，我们看到，升降机在该时刻* 距其平衡位置的距离为零，而速度为$\dot{x}_0$。从方程（1.5），我们得出结论：振动的振幅等于$\dot{x}_0/p$，其中$p=\sqrt{g/\delta_{st}}=44.8$秒$^{-1}$，$\dot{x}_0=36$英寸/秒。因此，钢索的最大伸长量为$\delta_{max}=\delta_{st}+\dot{x}_0/p=0.192+36/44.8=0.192+0.803=0.995$英寸，最大应力$\sigma_{max}=(10,000/2.5)(0.995/0.192)=20,750$磅/英寸^{2}可以看出，由于线盘突然停止，钢索中应力增大约 4 倍。

习 题 组 1.1

1.1—1　图 1.1 中螺旋弹簧的平均线圈直径$D=1$英寸，钢丝直径$d=0.1$英寸，包括20个线圈。钢丝受剪的弹性模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2，悬挂重量$W=30$磅。试求算自由振动的周期。

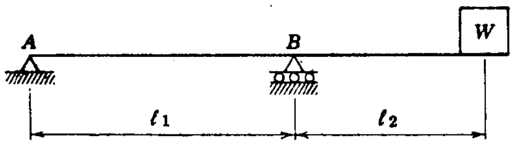
答：$\tau=0.64$秒。

1.1—2　一根弯曲刚度$EI=12\times10^7$磅-英寸^{2}的简支梁，两支承之间的净跨$l_1=6$英尺，一端挑臂$l_2=3$英尺，如图所示。略去梁的分布质量，试求挑臂端点处重量为$W=600$

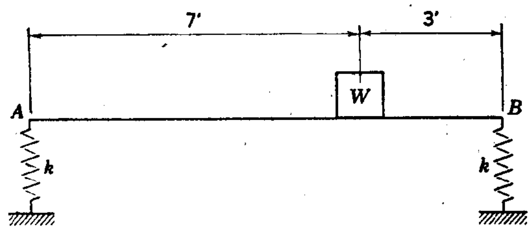
*指线盘突然卡住的事故发生的时刻。——译注

磅的块体自由振动的频率。

答：$f=6.48$周/秒。



习题 1.1—2



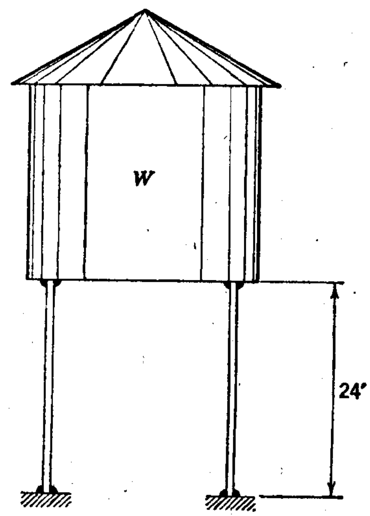
习题 1.1—3

1.1—3 一根弯曲刚度$EI=30\times10^6$磅-英寸^{2}的梁AB，借弹簧支承于A点和B点处，每一弹簧系数$k=300$磅/英寸，如图所示。略去梁的分布质量，试求算位于B点左边3英尺处，重量$W=1000$磅的块体自由振动的周期。

答：$\tau=0.533$秒。

1.1—4 一个重量$W=150$千磅的水箱，借四根端点嵌固的竖直管柱支承着。每一柱的弯曲刚度$EI=2\times10^9$磅-英寸^2。试求算该水箱顺水平方向自由振动的周期。略去诸柱的分布质量。

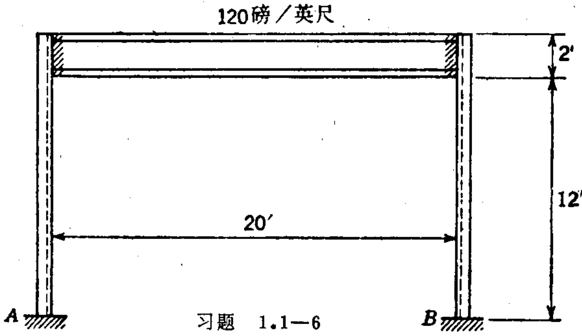
答：$\tau=1.95$秒。



习题 1.1—4

1.1—5 为了降低例题4条件下发生的最大动力应力，假设在钢索下端与升降机之间加一个弹簧常数$k=2000$磅/英寸的短弹簧。试求算在此情况下，当钢索的上端突然停止时产生的最大应力。采用与例题4所给的相同数据。

答：$\sigma_{max}=7230$磅/英寸^2。

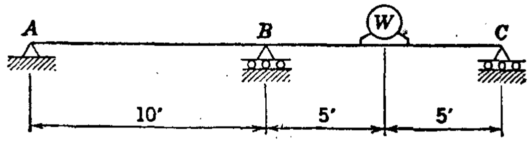


习题 1.1—6

1.1—6 有一门式框架，由一根20英尺长的24英寸重型工字梁，借与两根相对为柔性的柱焊接成刚性连接，如图所示。每一柱为一根横截面面积$A=4.02$（英寸）^{2}的槽型钢，其最小回转半径$r=0.62$英寸，$E=30\times10^6$磅/（英寸）^{2}。试求算在框架平面内侧向振动的固有周期：（a）假设A和B处完全固定，（b）假设A和B处均为铰。略去工字梁的弯曲和柱

的质量。

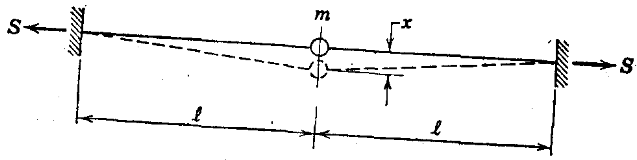
答：$\tau_1=0.813$秒，$\tau_2=1.62$秒。



习题 1.1—7

1.1—7 有一根由两个6英寸槽型钢，背靠背地组成两跨连续梁（$I=2\times17.4=34.8$英寸^4），在BC跨的中央处，承受一个重量$W=12$千磅的马达，如图所示。试求算该马达自由竖直振动的固有频率f，略去该梁的分布质量。

答：$f=5.72$周/秒。



习题 1.1—8

1.1—8 有一个质量为m的很小的球，置于长度为$2l$紧拉着的钢丝中点处，如图所示。钢丝不能抵抗弯曲，并承受了很高的初始拉力S。试建立该球微小侧向振动时的运动微分方程，并说明如果钢丝中的拉力可以假设保持为常数，那么该运动将为简谐运动。要问在此情况下振动的周期是多少？

答：$\tau=2\pi\sqrt{ml/2S}$。

1.1—9 有一重量W，借类似于图1.5a中两个弹簧那样的方式串联连接着的三个弹簧k_1、k_2、k_3悬挂着。试说明该系统的等效弹簧常数为：

$$k=\frac{k_1k_2k_3}{k_1k_2+k_1k_3+k_2k_3}$$

1.2 旋转振动

让我们在图1.8中考虑一根上端嵌固住，下端带有一个实体正圆盘的弹性轴，这样的系统称为扭摆。如果圆盘绕此轴的轴线转过一个微小的角ϕ，然后放松，那么将发生自由旋转振动。在这种振动过程中，因扭转轴对盘产生的力矩与扭转角ϕ成比例，并作用于盘转动的相反方向。因而，如果I表示盘绕该轴轴线的质量惯性矩，$\ddot{\phi}$为其角加速度，k_r为单位转角的扭矩（旋转弹簧常数），那么运动的微分方程成为：

$$I\ddot{\phi}=-k_r\phi \qquad (a)$$

引进符号

$$p^2=\frac{k_r}{I} \qquad (b)$$

我们可以将方程（a）写成

$$\ddot{\phi}+p^2\phi=0 \qquad (1.7)$$

此方程具有与前节中方程（1.1）相同的形式。

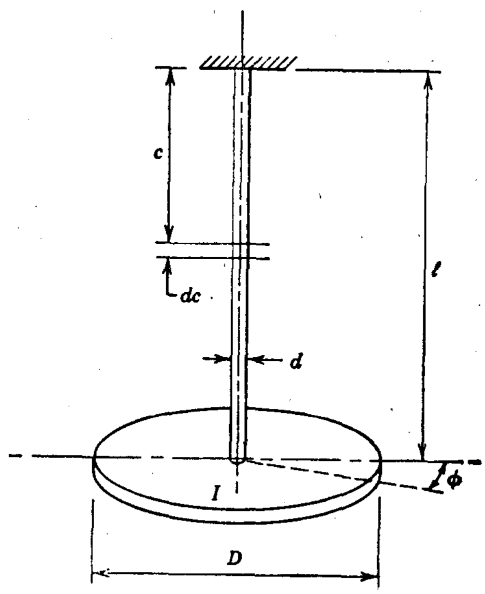


图 1.8

因此，其解具有与方程（1.5）相同的形式，我们得到：

$$\phi=\phi_0\cos pt+\frac{\dot{\phi}_0}{p}\sin pt \tag{1.8}$$

式中ϕ_0和$\dot{\phi}_0$分别为在初始时刻$t=0$该盘的角位移和角速度。如前节那样，我们从方程(1.8)得出结论：旋转振动的周期为：

$$\tau=\frac{2\pi}{p}=2\pi\sqrt{\frac{I}{k_r}} \tag{1.9}$$

其频率为：

$$f=\frac{1}{\tau}=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_r}{I}} \tag{1.10}$$

在长度为l、直径为d的圆形横截面轴的情况下，其扭转弹簧常数可以用下列公式*来表达：

$$k_r=\frac{GJ}{l}=\frac{\pi d^4G}{32l} \tag{c}$$

式中G为材料的剪切弹性模量。方程（c）中符号J代表轴的横截面的扭转常数，当横截面为圆形时，它等于极惯性矩。通常扭转弹簧常数k_r以磅-英寸/弧度为单位。

另外，如果圆盘是均匀的，直径为D，重量为W，那么其质量惯性矩则为：

$$I=\frac{WD^2}{8g} \tag{d}$$

采用这些k_r值和I值，扭转振动的周期和频率可以从方程（1.9）和（1.10）求得。

在非圆形横截面轴或不规则形状物体这种较为一般的情况下，k_r和I两个量计算起来可能较为困难。然而，如果它们的求算没有公式可以利用的话，用实验一般是可以确定的。为了使振动为纯旋转振动，必须将轴的轴线与通过物体质量中心的主轴相吻合。否则，则需要引进约束（成轴承方式）阻止物体的其它运动。还应注意旋转振动可能在不涉及扭转变形的系统中发生（见本节末尾处的例题2）。

前面整个讨论中，假设图1.8中轴为直径d的均匀横截面，如果该轴由长度分别为l_1和l_2以及直径为d_1和d_2的两部分组成，那么各扭转弹簧常数k_{r1}和k_{r2}可以从方程（c）求算出来。于是，轴的两部分代表串联着的扭转弹簧，其等效弹簧常数可以从前节中的方程(k)来得到。

阶梯形轴的情况也可以另一方式来处理。如果由两部分组成的轴承受扭矩M，那么该轴的总扭角将为：

$$\phi=\frac{M}{k_{r1}}+\frac{M}{k_{r2}}=\frac{32Ml_1}{\pi d_1^4G}+\frac{32Ml_2}{\pi d_2^4G}=\frac{32M}{\pi d_1^4G}\left(l_1+l_2\frac{d_1^4}{d_2^4}\right)$$

可以看到，具有两个直径d_1和d_2的轴的扭角，与等直径为d_1并用下列方程给予修正长度为L_1的轴的扭角相同。

$$L_1=l_1+l_2\frac{d_1^4}{d_2^4} \tag{e}$$

长度为L_1、直径为d_1的轴与所给两个不同直径的轴，具有相同的弹簧常数，该轴是为此情况下的等效轴。

*见Timoshenko和Young著Elements of Strength of Materials，第5版，第72页

现在让我们考虑一根轴，支承于无摩擦的轴承中，且每一端处带有一个旋转物体的情况，如图 1.9 所示。这是实用中重要的情况，因为它可以考虑代表一端带有一个推进器，另一端带有一个轮机马达的推进器的轴*。如果两个盘按相反方向扭转，然后突然放松，那么将发生扭转振动。根据角动量的守恒原理得出：在这样一种振动过程中，这两个盘必定总按相反方向转动。因而，位于轴上P点的某一中间横截面（见图1.9）保持不动，该横截面称为结点截面。它的位置根据这两个物体具有相同的振动周期这一事实来求出，因为不是这样的话，那么它们总按相反方向转动的情况将不会得到实现。

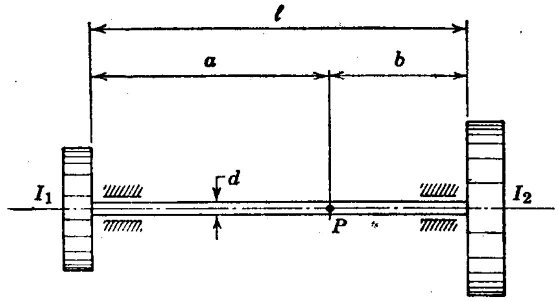


图 1.9

将方程（1.9）用于结点截面两侧两个分系统的每一分系统上，我们得到：

$$\sqrt{\frac{I_1}{k_{r1}}}=\sqrt{\frac{I_2}{k_{r2}}}\text{或}\frac{k_{r1}}{k_{r2}}=\frac{I_1}{I_2} \tag{f}$$

式中k_{r1}和k_{r2}分别为轴的左边部分和右边部分的弹簧常数。从方程（c）看到，这些量与该轴相应部分的长度成反比，所以从方程（f）得出：

$$\frac{a}{b}=\frac{I_2}{I_1}$$

于是，由于$a+b=l$，我们求出：

$$a=\frac{lI_2}{I_1+I_2}\qquad b=\frac{lI_1}{I_1+I_2} \tag{g}$$

将方程（1.9）和（1.10）用于该系统的左边部分，我们得到：

$$\tau=2\pi\sqrt{\frac{I_1}{k_{r1}}}=2\pi\sqrt{\frac{32lI_1I_2}{\pi d^4G(I_1+I_2)}} \tag{1.11}$$

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi d^4G(I_1+I_2)}{32lI_1I_2}} \tag{1.12}$$

从这些公式，只要轴的尺寸、模量G和诸端处物体的质量惯性矩均为已知，扭转振动的周期和频率就可以求算出来。在我们现在的讨论中，轴的质量略去不计，它对振动周期的影响将在后面第1.4节中讨论。

从方程（g）可以看到，如果转动的物体之一与另一个相比具有很大的质量惯性矩，那么结点横截面可以取于较大的物体处，而且带有两个物体的系统（图1.9），简化成仅带有一个物体的系统（图1.8）。

例题 1 参见图1.9，假设在轴的两端两个均匀盘具有重量$W_1=1000$磅和$W_2=2000$磅，直径$D_1=50$英寸和$D_2=75$英寸，而轴的长度$l=120$英寸，轴的直径$d=4$英寸，剪切模量$G=12\times10^6$磅/英寸^2。试求算该系统的自由扭转振动的频率。如果沿 64 英寸长度，轴的直径从 4 英寸增大为 8 英寸，试问，此频率按什么比例增大？

解： 应用方程（d）中所给的数据，我们求算出诸盘的质量惯性矩为：

$$I_1=\frac{(1000)(50)^2}{(8)(386)}=809\text{磅-英寸-秒}^2$$

*这是工程师们发现需要作扭转振动研究的最早问题之一。

$$I_2=\frac{(2000)(75)^2}{(8)(386)}=3640\text{磅-英寸-秒}^2$$

将这些值连同所给轴的数据代入方程（1.12），我们得到：

$$f=\frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{\pi(256)(12\times10^6)(809+3640)}{(32)(120)(809)(3640)}}=9.80\text{周/秒}$$

当在轴的长度的64英寸上，直径从4英寸增大为8英寸时，4英寸直径的等效长度，可从方程（e）求出如下：

$$L_1=56+(64)\frac{(256)}{(4096)}=56+4=60\text{英寸}$$

因为此长度为原来120英寸的一半，且频率与长度的平方根成反比（见方程1.12），所以得出，由于加强的结果频率按比例$\sqrt{2:1}$增大。

例题2 一飞轮由重量为W、平均半径为R的大边圈，借四根柔性棱柱形辐条与中轴连接，如图1.10a所示。如果该中轴固定住，试求该边圈绕其通过0点的中心轴线自由旋转振动的周期。略去诸辐条的质量，并假设每一辐条的长度为R，弯曲刚度为B。

解：令边圈从其平衡位置产生如图所示的一个微小转角ϕ，每一辐条表现为在中轴处嵌固，而另一端受约束与边圈一起运动的梁。一根辐条的外端处，作用着剪力Q和弯矩M，如图1.10b所示。应用已知梁的刚度公式，我们得到：

$$Q=\frac{12B\Delta}{R^3}-\frac{6B\phi}{R^2} \qquad (h)$$

$$M=\frac{6B\Delta}{R^2}-\frac{4B\phi}{R} \qquad (i)$$

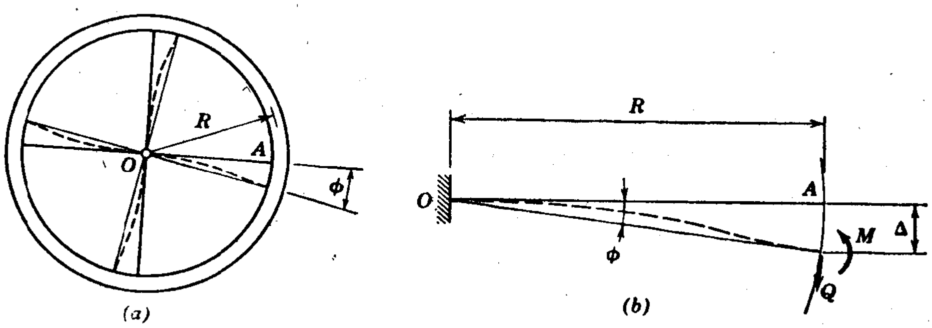


图 1.10

如果该边圈假设是刚性的，那么每一辐条外端处弹性线的切线必定是径向的。因而，剪力Q和弯矩M借几何条件$\Delta\approx R\phi$与转角联系起来。将此关系式代入方程（h）和（i），我们求出：

$$Q=\frac{6B\phi}{R^2} \quad \text{和} \quad M=\frac{2B\phi}{R} \qquad (j)$$

于是作用于边圈上的总力矩将为：

$$M_t=4QR-4M=\frac{16B\phi}{R} \qquad (k)$$

可以看到，在这种情况下，其旋转弹簧常数为：

$$k_r=\frac{M_t}{\phi}=\frac{16B}{R} \qquad (l)$$

将此k_t值代入方程（1.9），并考虑飞轮边圈的质量惯性矩$I \approx WR^2/g$，我们得到：

$$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{WR^3}{16gB}} \tag{m}$$

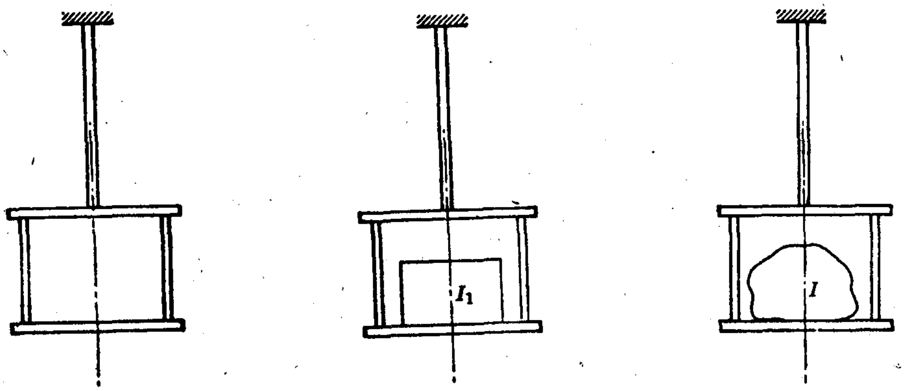
习 题 组 1.2

1.2—1　一根重量$W=4$磅、长度$a=2$英尺的水平杆AB，其中央点处悬挂于长度$l=2$英尺、直径$d=1/8$英寸的铅直钢丝上，试求其扭转振动的频率。假设该杆细长，但是是刚性的。略去钢丝的质量，并取其剪切模量为$G=12\times10^6$磅/英寸^2。

答：$f=0.781$周/秒。

1.2—2　图中表示一种对于实验确定不规则形状物体的质量惯性矩极为有用的装置。它由两块平行板组成，该平行板的整个装配体如同附加于竖直轴上的刚体那样作用着，而且它的内部可以置放限于一定尺寸的任何物体。当它空着的时候（图a），此扭摆有一观察到的周期τ_0。当带着一个已知惯性矩为I_1的物体与它一起振动时（图b），该摆的周期为τ_1，而当带着未知惯性矩为I的物体时（图c），该摆以周期τ_2进行振动。试求出后一物体对旋转轴线（亦即该轴的轴线）的惯性矩I。

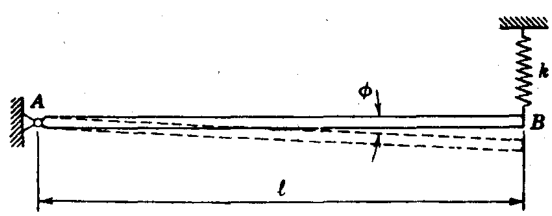
答：　$I = I_1\frac{\tau_2^2-\tau_0^2}{\tau_1^2-\tau_0^2}$



(a)　　(b)　　(c)

习题　1.2—2

1.2—3　一根重量为W、长度为l的细长棱柱形杆AB，A处为一铰，B处借一常数为k的弹簧按水平状支承着，如图所示。试求该杆在竖直平面内有一个很小的角位移值ϕ时，其旋转振动的周期。略去弹簧的质量，并考虑杆是刚性的。



习题　1.2—3

答：　$\tau = 2\pi\sqrt{\frac{W}{3kg}}$

1.2—4　一根重量为W、长度为l的细长刚性棱柱形杆AB，A处为铰接，借C处作用竖直弹簧支承成水平位置(见图)。试求算该杆在竖直平面内有一微小旋转振幅时的周期τ。