现代数学基础丛书

代数拓扑与示性类

〔丹麦〕I. 马德森 著

科学出版社

现代数学基础丛书

代数拓扑与示性类

〔丹麦〕I. 马德森 著

科 学 出 版 社

1 9 8 9

内容简介

代数拓扑学是从同调论发展起来的. 本书着重讨论各种同调理论之间的关系,以及在拓扑与几何中至关重要的示性类理论.示性类理论的应用范围很广,凡涉及到流形或向量丛的问题,例如微分几何、复流形、代数几何等,都要以它作为一种工具. 本书采用微分形式来讲示性类,这样就照顾到了非拓扑专业研究人员的需要.

本书是吴英青和段海豹根据作者的英文讲义翻译、整理而成的.

本书可供高等院校数学专业研究生和教师参考.

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1989 年11月第一版　开本:850×1168 1/32

1989 年11月第一次印刷　印张:4 1/4

印数:0001—1 770　字数:108 000

ISBN 7-03-001233-X/O · 275

定价: 4.90 元

译者序

本书是 Ib Madsen 教授在第三期研究生暑期培训中心使用的讲义的译本. 在某些地方作了一些改动.

本书的读者应具备奇异同调论和微分流形方面的基本知识.

前两节主要讨论奇异同调中的乘积, 可看成是奇异同调论的复习. 第三节引入 de Rham 上同调. 第七节讨论谱序列, 它是代数拓扑中的一种重要工具. 第八节将用这一工具来证明 de Rham 定理, 从而给出 de Rham 同调与奇异同调的关系. 第四节讨论周期同调. 该节和第七节的相应部分主要是为第十三节作准备. 初读时可跳过. 其余各节讨论向量丛和示性类, 是本书的主要内容.

本书的条理很清晰, 部分定理的证明只给出提示, 读者可以补证. 在习题中也有很多重要内容. 我们相信, 如果读者能系统地完成这些细节的话, 必定会有很大的收益.

本书的1—7 节, 8—13 节分别由吴英青和段海豹同志翻译整理. 由于我们水平有限, 书中错误之处在所难免, 敬请读者批评指正.

段海豹　吴英青

1987 年四月.

序　　言

同调与上同调是代数拓扑的中心论题．它们根据所处理的问题的差别而以不同的形式出现．在微分几何中通常采用微分形式的同调．在同调理论和以分类为目的的流形理论中一般采用奇异同调．而在代数中则有层上同调、循环同调等等．

在这本讲义中我们将讨论 de Rham 上同调、奇异上同调、循环同调以及它们的相互关系．

上同调在研究整体微分几何和拓扑问题时的用处来自向量丛的示性类理论．我们将从两种“经典”的观点来讨论示性类．一方面我们有奇异同调中的整示性类．另一方面，在取定连络之后，我们有示性形式及其对应的 de Rham 同调类．这两种观点都很重要．整示性类给出了向量丛的整上同调信息；而示性形式则自然地产生于几何对象，它比所对应的上同调类包含更多的信息．

在讲义的最后部分，我们概述了示性类的第三种观点（主要由 A. Connes 引进的）．它是示性类理论的一种纯代数的描述．给定任何 Q 代数上的一个投射模，我们在其对应的非交换 de Rham 上同调中定义示性类．有时，这些非交换 de Rham 上同调群恰好是循环同调群的子群．

讲义基本上没有涉及同调论与示性类的应用，只在习题中给出了少量例子．关于这方面的内容，读者可参考 J. Milnor 与 J. Stassheff 和 B. Lawson 的著作，也可参考讲义后面所列的其它文献．

最后提请读者注意，由于时间仓促，书中难免会有很多错误之处．

I. 马德森

1986年 5 月于 奥胡斯

目　　录

1. 链复形及其同调群

设 k 为一个取定的有单位元的交换环，例如：

$k=\mathbf{Z}$　整数环

$k=\mathbf{F}_p$　p 个元素的有限域

$k=\mathbf{Q}$　有理数域

$k=\mathbf{R}$　实数域

$k=\mathbf{C}$　复数域

在不会混淆的情形下，我们简称 k-模为模．模之间的同态指 k-线性映射．链复形 $C_*=\{C_n,\ \partial\}$ 是指一个同态序列

$$C_*:\quad \cdots\to C_n\xrightarrow{\partial}C_{n-1}\xrightarrow{\partial}\cdots\xrightarrow{\partial}C_0\to 0,$$

它满足条件 $\partial\cdot\partial=0$．类似地，上链复形 $C^*=\{C^n,\delta\}$ 是满足 $\delta\cdot\delta=0$ 的同态序列：

$$C^*:\quad \cdots\leftarrow C^n\xleftarrow{\delta}C^{n-1}\xleftarrow{\delta}\cdots\xleftarrow{\delta}C^0\leftarrow 0.$$

增广链复形 (C_*,ε) 是链复形 C_* 附加一个额外的同态 $\varepsilon: C_0\to M$，它满足 $\varepsilon\cdot\partial=0$．其中 M 为 k-模．类似的，增广上链复形 (C^*,ε) 是上链复形附加一个同态 $\varepsilon: M\to C^0$，满足 $\delta\cdot\varepsilon=0$．

C_* 的第 n 阶(或称第 n 维)同调群定义为商模

$$H_n(C_*)=Z_n/B_n,$$

其中
$$Z_n=\mathrm{Ker}\{\partial: C_n\to C_{n-1}\},$$
$$B_n=\mathrm{Im}\{\partial: C_{n+1}\to C_n\}.$$

类似地，定义第 n 阶上同调群为

$$H^n(C^*)=\frac{\mathrm{Ker}\{\delta: C^n\to C^{n+1}\}}{\mathrm{Im}\{\delta: C^{n-1}\to C^n\}}=Z^n/B^n.$$

链复形之间的链映射 $f_*: C_*\to D_*$ 是一列同态 $f_n: C_n\to D_n$，它们对所有的 n，使得下图是可交换的：

$$\begin{array}{ccc} C_n & \xrightarrow{f_n} & D_n \\ \downarrow{\scriptstyle\partial} & & \downarrow{\scriptstyle\partial} \\ C_{n-1} & \xrightarrow{f_{n-1}} & D_{n-1} \end{array}$$

通常我们略去下标，用 f 来代替 f_n. 链映射 f_* 诱导出同调群之间的同态

$$H_n(f)=f_*:H_n(C_*)\to H_n(D_*).$$

类似可定义增广链复形之间的同态 f_*: $(C_*,\ \varepsilon)\to(D_*,\ \varepsilon)$. 它除了一列同态 f_n: $C_n\to D_n$ 之外，还包含一个映射 f: $M\to N$，f 满足 $\varepsilon\cdot f_0=f\cdot\varepsilon$. 两个链映射 f 与 g 之间的链伦移

$$s_*:\ C_*\to D_*,$$

是一列同态 $s:C_n\to D_{n+1}$，且使得下面的等式对一切 n 都成立:

$$\partial s+s\partial=f-g:C_n\to D_n.$$

当 f 与 g 之间存在链伦移时，我们称 f 与 g 是链同伦的，并记为 $f\simeq g$; 这时对所有的 n 都有 $H_n(f)=H_n(g)$. 链映射 f: $C_*\to D_*$ 称为链同伦等价，如果它存在同伦逆，也就是说，如果存在链映射 $g:D_*\to C_*$，使得

$$g\circ f\simeq \mathrm{id},\qquad f\circ g\simeq \mathrm{id}.$$

此时 $H_n(f)$ 是同构，其逆为 $H_n(g)$.

链复形的短正合序列

$$0\to C_*\xrightarrow{f}C'_*\xrightarrow{g}C''_*\to 0,$$

诱导出同调群的长正合序列

$$\cdots\to H_n(C_*)\xrightarrow{f_*}H_n(C'_*)\xrightarrow{g_*}H_n(C''_*)\xrightarrow{\partial_*}H_{n-1}(C_*)\to\cdots.$$

以上的定义与结论可以明显地推广到上链复形的情形.

如果一个模中存在一组基，则这个模称为自由模. 如果一个链复形作为模是自由的，则称这个链复形为自由链复形. 一个增广链复形如果是正合的，也就是说，如果

$$H_n(C_*)=0,n>0,$$

$$\varepsilon: H_0(C_*) \to M,$$

则称这个增广链复形为M的一个**分解**（resolution）。下面的定理有时称为同调代数基本定理。

定理 1.1. 设 (C_*, ε) 与 (C'_*, ε') 为增广链复形。设 C_* 是自由的 (C'_*, ε') 为 M' 的分解，则

(i) 任何同态 $f: M \to M'$ 都可扩张为一个链映射 $f_*: (C_*, \varepsilon) \to (C'_*, \varepsilon')$。

(ii) 任何两个满足 $f = g: M \to M'$ 的链映射 $f_*, g_*: (C_*, \varepsilon) \to (C'_*, \varepsilon')$ 都是链同伦的。

证. 我们要用归纳法，并根据下述模的提升性质证明此定理。设 C 为自由模，$\pi: X \to Y$ 为满射，则任何映射 $\beta: C \to Y$ 都存在一个提升映射 $\hat{\beta}: C \to X$，满足 $\pi \cdot \hat{\beta} = \beta$。

(i) 设 $f_0 = f$，我们归纳地构造 f_n 如下：设对任何 $i < n$ 都已构造 f_i。由于 $\partial \cdot f_{n-1} = f_{n-2} \cdot \partial$，可知 $f_{n-1} \cdot \partial: C_n \to C'_{n-1}$ 的像含于 $Z'_{n-1} = \mathrm{Ker}\{\partial: C'_{n-1} \to C'_{n-2}\}$ 之中。而由 $H_{n-1}(C'_*) = 0$ 可知 $Z'_{n-1} = B'_{n-1} = \mathrm{Im}\{\partial: C'_n \to C'_{n-1}\}$。根据提升性质（此时 $C = C_n, X = C'_n, Y = B'_{n-1}$），存在 $f_n: C_n \to C'_n$，使得 $\partial \cdot f_n = f_{n-1} \cdot \partial$。

(ii) 设对 $i < n$ 已构造出 $s_i: C_i \to C'_{i+1}$。要找 s_n 使满足等式

$$\partial \cdot s_n = f_n - g_n - s_{n-1} \cdot \partial.$$

s_{n-1} 的性质保证了上式右端映射的像含于 $Z'_n = B'_n$ 之中，因而可用提升性质得到 s_n。∎

推论 1.2. 同一个模 M 的任意两个自由分解都是链同伦等价的。∎

给定了模 M 与 N，我们可以构造下面这些新的模：

$M \oplus N$	（直和），
$M \otimes N$	（Λ 上的张量积），
$\mathrm{Hom}(M, N)$	（Λ-线性映射全体）。

类似地，对映射也可构造 $f\oplus g$, $f\otimes g$, $\mathrm{Hom}(f,\mathrm{id})$, $\mathrm{Hom}(\mathrm{id},f)$ 等等．这些构造形成了 k 模范畴到其自身的函子．我们有下面的正合性质：设

$$(1.3)\qquad 0\to M\xrightarrow{i}M'\xrightarrow{\pi}M''\to 0$$

为 k-模短正合序列，则

$$0\to M\oplus N\to M'\oplus N\to M''\oplus N\to 0,$$

$$(1.4)\qquad M\otimes N\to M'\otimes N\to M''\otimes N\to 0,$$

$$\mathrm{Hom}(M,N)\leftarrow\mathrm{Hom}(M',N)\leftarrow\mathrm{Hom}(M'',N)\leftarrow 0,$$

都是正合的．在后两例中，正合性一般不能扩展到左边．也就是说，$i\otimes\mathrm{id}$ 一般不是单射，而 $\mathrm{Hom}(i,\mathrm{id})$ 一般不是满射．但如果 M'' 是自由模，则 π 有一个截面 $s: M''\to M'$ $(\pi\cdot s=\mathrm{id})$．在这种情形，可以证明 $i\otimes\mathrm{id}$ 确为单射，而 $\mathrm{Hom}(i,\mathrm{id})$ 也确为满射．这是因为 $s+i$: $M''\oplus M\to M'$ 是同构．从而 i 有一个收缩 t: $M'\to M$ $(t\cdot i=\mathrm{id})$．这样 $t\otimes\mathrm{id}$ 就是一个收缩，而 $\mathrm{Hom}(t,\mathrm{id})$ 则为一个截面．

若 π 有一个截面(或者等价地，i 有一个收缩)，则称正合序列 (1.3)为分裂的．上面的讨论可归结为

命题 1.5. 函子 $-\otimes N$ 与 $\mathrm{Hom}(-,N)$ 把分裂的正合序列变成分裂的正合序列．▮

若 k 为域，则所有的正合序列都是分裂的．在 $N=k$ 的情形，记 $M^*=\mathrm{Hom}(M,k)$，它是 M 的对偶模．

以上构造方法可以推广到链复形的情形．我们如下定义链复形 $C_*\oplus C'_*$, $C_*\otimes C'_*$, $\mathrm{Hom}(C_*,C'_*)$ 与 $\mathrm{Hom}(C_*,N)$．

(i) $(C_*\oplus C'_*)_n=C_n\oplus C'_n$, $d(c,c')=(\partial c,\partial' c')$,

(ii) $(C_*\otimes C'_*)_n=\sum\limits_{i=0}^{n}(C_i\otimes C'_{n-i})$,

$$d(c_i\otimes c'_{n-i})=\partial c_i\otimes c'_{n-i}+(-1)^i c_i\otimes\partial c'_{n-i},$$

(iii) $\mathrm{Hom}(C_*,N)^n=\mathrm{Hom}(C_n,N)$,

$$d(f)(c_{n+1})=(-1)^n f(\partial c_{n+1}).$$

可验证 $d\cdot d=0$ 在以上情形都成立．前两种构造把链复形变为链复形．第三种构造把链复形变为上链复形．我们也可以定义 $\mathrm{Hom}(C_*,C'_*)$，但得到的是在两个方向都为无限的复形，也即对每个整数 n 都有非平凡的 n 阶模：

$$\text{(iv)}\ \mathrm{Hom}(C_*,C'_*)_n=\prod_{i=0}^{\infty}\mathrm{Hom}(C_i,C'_{i+n}),\ n\in\mathbb{Z}$$

$$d(f_i)_{i=0}^{\infty}=(g_i)_{i=0}^{\infty},\ g_i=\partial'\cdot f_i+(-1)^{n-1}f_{i-1}\cdot\partial.$$

此时零维闭链为链映射，一维链为链同伦．

显然，直和的同调群为同调群的直和．对张量积和对偶构造，情况较为复杂．首先我们有下述命题．

命题 1.6. 设 k 为域，C_* 为链复形．则

(i) $H_n(M\otimes C_*)\cong M\otimes H_n(C_*)$，

(ii) $H^n(\mathrm{Hom}(C_*,M))\cong\mathrm{Hom}(H_n(C_*),M)$.

证．考虑正合序列

$$0\to Z_n\to C_n\to B_{n-1}\to 0,$$

$$0\to B_{n-1}\to C_{n-1}\to C_{n-1}/B_{n-1}\to 0.$$

由于 k 是域，上述序列都是分裂的．由(1.5)可得正合序列

$$0\to M\otimes Z_n\to M\otimes C_n\to M\otimes B_n\to 0,$$

$$0\to M\otimes B_{n-1}\to M\otimes C_{n-1}.$$

从而有正合序列

$$0\to M\otimes Z_n\to M\otimes C_n\to M\otimes C_{n-1}.$$

这说明 $M\otimes Z_n=\mathrm{Ker}\{M\otimes C_n\to M\otimes C_{n-1}\}$．类似可得：$M\otimes B_n=\mathrm{Im}\{M\otimes C_{n+1}\to M\otimes C_n\}$．另外，由正合序列

$$0\to B_n\to Z_n\to H_n(C_*)\to 0$$

及(1.5)，可得正合序列

$$0\to M\otimes B_n\to M\otimes Z_n\to M\otimes H_n(C_*)\to 0.$$

因此，
$$\begin{aligned}M\otimes H_n(C_*)&\cong M\otimes Z_n/M\otimes B_n\\&\cong\mathrm{Ker}\{M\otimes C_n\to M\otimes C_{n-1}\}/\mathrm{Im}\{M\otimes C_{n+1}\to M\otimes C_n\}\end{aligned}$$

$$= H_n(M \otimes C_*).$$

这就证明了 (i). (ii) 的证明留给读者. 注意其中的同构由

$$\phi(f)([z]) = f(z),$$

给出,这里 $f \in \mathrm{Hom}(C_*, M)$ 为上闭链. ▌

任给 $i, j, i+j=n$,存在同态

$$\varphi: H_i(C_*) \otimes H_j(C'_*) \to H_{i+j}(C_* \otimes C'_*).$$

若 $z_i \in Z_i$, $z \in Z'$ 分别代表闭链 $[z_i]$ 与 $[z'_j]$,则

$$\varphi([z_i] \otimes [z']) = [z_i \otimes z'].$$

定理 1.7 (Künneth 公式). 设 $\mathscr{A}$ 为域,则

$$\varphi: \sum_{i=0}^{n} H_i(C_*) \otimes H_{n-i}(C'_*) \to H_n(C_* \otimes C'_*)$$

为同构.

证. 把闭链群 Z_*, 边缘链群 B_* 及同调群 $H_* = H_*(C_*)$ 都看成链复形,边缘映射为 $\partial = 0$. 则有链复形的正合序列

$$0 \to B_* \to Z_* \to H_* \to 0,$$

(1)

$$0 \to Z_* \to C_* \xrightarrow{\partial} B_{*-1} \to 0.$$

由于 $\mathscr{A}$ 是域, 以上序列都是分裂的. 从而有正合序列

(2) $$0 \to Z_* \otimes C'_* \to C_* \otimes C'_* \to B_{*-1} \otimes C'_* \to 0.$$

两端两个复形的边缘算子分别为

$$d(z_i \otimes c'_j) = (-1)^i z_i \otimes \partial' c'_j,$$

$$d(b_{i-1} \otimes c'_j) = (-1)^i b_{i-1} \otimes \partial' c'_j.$$

根据(1.6), 其同调群为

$$H_n(Z_* \otimes C'_*) = \sum_{i=0}^{n} Z_i \otimes H_{n-i}(C'_*),$$

$$H_n(B_{*-1} \otimes C'_*) = \sum_{i=0}^{n} B_{i-1} \otimes H_{n-i}(C'_*).$$

短正合列 (2) 诱导的同调群的长正合序列具有下面的形状:

(3) $$\cdots \xrightarrow{d_*} \sum_{i=0}^{n} Z_i \otimes H_{n-i}(C'_*) \to H_n(C_* \otimes C'_*)$$
$$\to \sum_{i=0}^{n} B_{i-1} \otimes H_{n-i}(C'_*) \to \cdots.$$
根据 d_* 的定义可以验证，同态
$$d_*: B_i \otimes H_{n-i}(C'_*) \to Z_i \otimes H_{n-i}(C'_*)$$
由下式给出：
$$d_*(b_i \otimes [z'_i]) = b_i \otimes [z'_i].$$
它是单射，其余核为

(4) $\operatorname{cok} d_* = Z_i/B_i \otimes H_{n-i}(C'_*) = H_i(C_i) \otimes H_{n-i}(C'_*)$. ▮

注 1.8. 当 $\mathscr{k}$ 不是域时，定理(1.6)和(1.7)一般不成立. 这是由于下面两个原因：

(a) Z_*，B_* 不一定是自由的. 这样(2)不一定正合，从而没有正合序列(3).

(b) 当 Z_i/B_i 不是自由群时，$d_*: B_* \otimes H'_{n-i} \to Z_i \otimes H_{n-i}$ 不一定是单射.

在 $\mathscr{k} = \mathbb{Z}$ 的情形，如果 C_* 是自由的，则(a)成立. 如果 $H_i(C_*)$ 是自由的，则 (b) 成立. 因此，如果 $\mathscr{k} = \mathbb{Z}$ 而 C_* 与 $H_*(C_*)$ 都是自由模，则定理(1.7)的结论仍成立.

习　　题

1. 设 C_* 为自由链复形. 证明当 $H_*(C_*) = 0$ 时，存在从 id 到 0 的链同伦（称为 C_* 的收缩同伦）.

2. 设 $f_*: C_* \to C'_*$ 为链映射. f_* 的映射锥定义为
$$\operatorname{Cone}(f_*)_{n+1} = C_n \oplus C'_{n+1},$$
$$\partial(c_n, c'_{n+1}) = (\partial c_n, \partial' c'_{n+1} + (-1)^n f(c_n)).$$
这样可以得到一个正合列
$$0 \to C'_* \to \operatorname{Cone}(f_*) \to C_{*-1} \to 0.$$
证明它诱导的长正合序列中的边缘同态

$$d_*: H_n(C_*) \to H_n(C'_*)$$

满足关系式 $d_* = (-1)^n H_n(f)$。

3. 用上面两题的结果证明下面的 J. H. C. Whitehead 定理：设 $f_*: C_* \to C'_*$ 为链映射. 则 f_* 为链同伦等价当且仅当对所有的 n, $H_n(f)$ 都是同构。

4. 对上链复形，叙述并证明相应于(1.7)的结果。

5. 在 $\mathscr{A} = \mathbf{Z}$ 的情形，证明每个模 M 都有自由分解 $C_* \xrightarrow{\varepsilon} M$，其中 $C_i = 0$, $i \geqslant 2$. 定义

$$\mathrm{Tor}(M,N) = \mathrm{Ker}\{\partial_1 \otimes \mathrm{id}: C_1 \otimes N \to C_0 \otimes N\}$$

证明 $\mathrm{Tor}(M,N)$ 与自由分解 $C_* \to M$ 的选取无关. 验证

$$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}/n) = \mathrm{Tor}(\mathbf{Z}/n,\mathbf{Z}) = 0,$$

$$\mathrm{Tor}(\mathbf{Z}/n,\mathbf{Z}/m) = \mathbf{Z}/(m,n).$$

类似可定义

$$\mathrm{Ext}(M,N) = \mathrm{cok}\{\mathrm{Hom}(C_0,N) \to \mathrm{Hom}(C_1,N)\}.$$

验证

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}/n,\mathbf{Z}) = \mathbf{Z}/n, \ \mathrm{Ext}(\mathbf{Z},N) = 0,$$

$$\mathrm{Ext}(\mathbf{Z}/n,\mathbf{Z}/m) = \mathbf{Z}/(n,m),$$

其中 (m,n) 表示 m 与 n 的最大公因子。

6. 设 $\mathscr{A} = \mathbf{Z}$. 设 C_*, C'_* 为 $\mathbf{Z}$ 上自由链复形. 证明 Künneth 公式：存在分裂的正合序列

$$0 \to \sum_{i=0}^{n} H_i(C_*) \otimes H_{n-i}(C'_*) \to H_n(C_* \otimes C'_*)$$

$$\to \sum_{i=0}^{n-1} \mathrm{Tor}(H_i(C_*), H_{n-1-i}(C'_*)) \to 0.$$

2. 奇异同调与单纯集

本节复习奇异同调与奇异上同调．重点放在乘积上。

考虑标准的 m-单纯形：

$$\Delta^n = \{(t_0, \cdots, t_n) \in \mathrm{R}^{n+1} \mid t_i \geqslant 0, \Sigma t_i = 1\},$$

$$\delta^i : \Delta^{n-1} \to \Delta^n ; i = 0, \cdots, n,$$

$$\delta^i(t_0, \cdots, t_{n-1}) = (t_0, \cdots, t_{i-1}, 0, t_i, \cdots, t_{n-1}); \tag{2.1}$$

$$\sigma^i : \Delta^n \to \Delta^{n-1}, i = 0, \cdots, n,$$

$$\sigma^i(t_0, \cdots, t_n) = (t_0, \cdots, t_{i-1}, t_i + t_{i+1}, \cdots, t_n).$$

对拓扑空间 X，定义其奇异集（singular set）为：

$$\mathrm{Sin}_n(X) = \mathrm{Map}(\Delta^n, X),$$

即 Δ_n 到 X 的连续映射全体．令

$$\partial_i = \mathrm{Map}(\delta^i, \mathrm{id}) : \mathrm{Sin}_n(X) \to \mathrm{Sin}_{n-1}(X), i = 0, \cdots, n,$$

$$s_i = \mathrm{Map}(\sigma^i, \mathrm{id}) : \mathrm{Sin}_{n-1}(X) \to \mathrm{Sin}_n(X), i = 0, \cdots, n-1,$$

它们分别称为**面算子**与**退化算子**．可以证明，下列等式成立：

$$\partial_i \partial_j = \partial_{j-1} \partial_i, \quad i < j,$$

$$s_i s_j = s_{j+1} s_i, \quad i \leqslant j,$$

$$\partial_i s_j = \begin{cases} s_{j-1} \partial_i, & i < j, \\ 1, & i = j \text{ 或 } i = j+1, \\ s_j \partial_{i-1}, & i > j+1. \end{cases} \tag{2.2}$$

设 $S_n, n = 0, 1, \cdots$ 为分次集，并有算子 $\partial_i : S_n \to S_{n-1}$ 及 $\sigma_i : S_{n-1} \to S_n$，它们满足 (2.2)，则这个带算子的分次集 $S = \cup S_n$ 称为**单纯集**（simplicial set）．奇异集就是单纯集，它定义了一个函子

$$\mathrm{Sin}: \{\text{拓扑空间}\} \to \{\text{单纯集}\}.$$

单纯集之间的射定义为与 s_i 和 ∂_i 都可交换的分阶映射。

设 $\mathcal{A}$ 为有单位元的交换环．定义奇异链复形为

$$S_n(X,\mathscr{k})=\mathscr{k}[\mathrm{Sin}_n(X)],$$

也即以 $\sin_n(X)$ 为基底的自由 $\mathscr{k}$-模. $S_n(X,\mathscr{k})$ 的元素可表示为线性组合 $\Sigma\lambda_i\theta_i$, $\lambda_i\in\mathscr{k}$, $\theta_i\in\mathrm{Sin}_n(X)$. 令

$$\partial=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i\partial_i: S_n(X,\mathscr{k})\to S_{n-1}(X,\mathscr{k}).$$

由(2.2)可知，$\partial\cdot\partial=0$. 这样 $S_*(X,\mathscr{k})$ 就成了一个链复形，称为奇异链复形. 其同调群称为 X 的奇异同调群.

在以上定义中我们没有用到退化算子. 但是由于 ∂ 保持模

$$S_n^D(X,\mathscr{k})=\mathscr{k}\left[\bigcup_{i=0}^{n-1}s_i\mathrm{Sin}_{n-1}(X)\right]$$

不变(也就是说，$\partial S_n^D(X,\mathscr{k})\subset S_{n-1}^D(X,\mathscr{k})$)，所以我们可以构造规范化复形

(2.3) $$S_*^N(X,\mathscr{k})=S_*(X,\mathscr{k})/S_*^D(X,\mathscr{k}).$$

可以证明，商映射

$$S_*(X,\mathscr{k})\to S_*^N(X,\mathscr{k})$$

是链同伦等价(参考 [Maclane,第 8 章, §6]).

X 的上链复形定义为

$$S^*(X,\mathscr{k})=\mathrm{Hom}(S_*(X,\mathscr{k}),\mathscr{k}),$$
$$(\delta\xi)(x)=(-1)^{|\xi|+1}\xi(\partial x),\quad |\xi|=\deg(\xi),$$

其同调群即为 X 的奇异上同调群. 赋值配对

$$S^*(X,\mathscr{k})\otimes S_*(X,\mathscr{k})\to\mathscr{k}$$

在同调水平上诱导了 Kronecker 配对

$$\langle,\rangle:\ \underset{\mathscr{G}}{H^*}(X,\mathscr{k})\otimes H_*(X,\mathscr{k})\to\mathscr{k}.$$

当 $\mathscr{k}$ 为域时，由命题 1.6(ii) 可知这是一个非奇异配对. 当 M 为 $\mathscr{k}$-模时，定义 $S_*(X,M)=S_*(X,\mathscr{k})\otimes M$, $S^*(X,M)=\mathrm{Hom}(S_*(X,\mathscr{k}),M)$.

我们有下面两个函子:

S_*: {拓扑空间}→{链复形},(协变)

S^*: {拓扑空间}→{上链复形}.(反变)

拓扑空间之间的两个映射 $f_0,f_1:X\to Y$ 称为是同伦的，若存在映射 $F:X\times[0,1]\to Y$，使得 $F(x,0)=f_0(x)$，$F(x,1)=f_1(x)$。下面的定理是奇异链复形的一个基本性质，其证明可参考任何一本关于奇异同调论的书.

定理 2.4. 两个同伦的映射 $f,g:X\to Y$ 分别诱导出链同伦的映射 $f_*,g_*:S_*(X)\to S_*(Y)$ 和 $f^*,g^*:S^*(Y)\to S^*(X)$.

注. 我们在不同的场合用映射这个词来表示不同的含义. 例如拓扑空间之间的映射是指连续映射，模之间的映射指模同态，链复形之间的映射指链映射，等等.

在不会混淆时，我们省略基环 $\mathscr{A}$ 的记号(例如用 $S_*(X)$ 来表示 $S_*(X,\mathscr{A})$，等等). 上同调群 $H^n(X)$ 形成了一个分次模

$$H^*(X)=\sum_{n=0}^{\infty}H^n(X).$$

我们要在上面引入乘积，也即所谓的上积. 为此首先讨论 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 与 $S_*(X\times Y)$ 之间的关系. 在零维它们是相等的，即

$$S_0(X)\otimes S_0(Y)=S_0(X\times Y).$$

奇异链复形有一个增广:

$$\varepsilon:S_0(X)\to\mathscr{A}$$

它把每个生成元都映到 1. 张量积 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 有一个相应的增广 $\varepsilon=\varepsilon\otimes\varepsilon$. 下面的结果可看成是(1.1)的一个实用推论.

定理 2.5. (Eilenberg-Zilbert).

(i) 存在保增广的自然链同伦等价

$$S_*(X\times Y)\underset{b_*}{\overset{a_*}{\rightleftarrows}}S_*(X)\otimes S_*(Y).$$

(ii) 任何两个从 $S_*(X\times Y)$ 到 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 的保增广的自然链映射都是链同伦的. 同样，任何两个从 $S_*(X)\otimes S_*(Y)$ 到 $S_*(X\times Y)$ 的保增广的自然链映射也都是链同伦的.

在定理中，"自然"一词的意思是说上述链同伦或链映射是函子之间的自然变换. 例如，a_* 为自然链映射是指对任何 $f:X\to$