

经济数学模型与方法手册

〔苏〕A·B 克鲁舍夫斯基 著

孟昭利 译

贾宝琳 校

清华大学出版社

经济数学模型与方法手册

〔苏〕A·B克鲁舍夫斯基 著

孟昭利 译

贾宝琳 校

清华大学出版社

内 容 简 介

本书以手册形式汇集了工业、农业、交通运输、商业、国民经济和经济预测的技术经济的数学模型。列出了线性代数方程组的解法，线性规划的形式与解法，对偶问题、整数规划、非线性规划和二次规划等最优解的数学方法。

书中的经济数学模型和方法是为国民经济各部门、各行业与各企业制定经济计划和管理决策用的，查阅简便。所提供的数学模型和方法可用微型电子计算机计算。

本书适合国民经济各部门、各行业与各企业的管理干部和科技人员使用，也可作为大专院校经济管理专业师生教学参考书。

经济数学模型与计算方法手册

[苏]A. B. 克鲁舍夫斯基 著

孟昭利 译
贾望琳 校

清华大学出版社出版

北京 清华园

北京京辉印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

☆

开本：787×1092 1/32 印张：97/8 字数：222千字

1986年8月第1版 1986年8月第1次印刷

印数：00001-10000

书号：15235-222 定价：2.10元

译 者 的 话

经济数学模型与方法是一门新兴的学科，它用数学方法和电子计算机研究和制定经济规划与管理决策。近些年来，它在国际上得到飞快的发展。在我国四化建设中，经济学界和经济管理部门，其中包括国家计委等国家各部委、各地区、各部门和各企业都开始了对它的研究，并用于编制经济发展规划。目前我国有许多高等院校和科学研究机关正从事这方面的研究工作，并且先后编制了国家级、地区级和企业级的各类经济数学模型，有的已得到了推广使用。但是，我国目前无论在理论研究上还是在实际应用上都与国际先进水平有一定的差距，急需这方面的知识。

苏联早在本世纪二十年代就开始编制了国民经济平衡表。六十年代由于电子计算机的发展，大大的推动了经济数学模型与方法的研究工作，八十年代广泛地应用在苏联各部门，取得了很好的经济效益。苏联经济学博士克鲁舍夫斯基

(А·В·Крушевский)以手册的形式著述的《经济数学模型与方法手册》，是一本很有实用价值的好书。该手册内容十分丰富，简单扼要，方法简便，易于推广。它将为我国的读者提供很多有用的方法，对我国国民经济各部门、各企业的计划管理人员以及大、中专院校师生均有重要参考价值。

译者衷心感谢秦元勋、文大化同志对本书的翻译的关怀，和徐寿波同志对译稿提出的宝贵意见。

由于译者水平所限，难免有谬误之处，恳切希望读者批评指正。

译者 1985年6月

序 言

随着科学技术的进步，科学、技术、生产和消费等部门在不同程度上，都和规划与管理体的完善程度有着紧密的联系。研究技术经济过程、制定规划和管理方法，其重要的手段是使用经济数学模型、方法和现代电子计算机。

经济数学模型*——是一个数学问题，它是用抽象的形式反映具有确定目标的过程以及在数量上的规律性。数学模型必须切合实际地（完全相符地）反映经济过程的目标。通常用来表现这一目标的标准数学关系式，有目标函数，约束条件及其规律性。由于数学模型不可能把过程的所有特性和规律性都考虑周全，所以它只能反映目标的最主要问题。

为了使用数学模型，必须进行下列工作：选择适当的模型；收集情报信息；确定或选择问题的解法；编制或选用已有的电子计算机程序；使用电子计算机进行计算；分析计算结果。选择数学模型时，必须根据提出的目标，分析各种因素、指标以及它们之间的关系。

由于研究人员的要求不同，描叙同一过程的数学模型，也会有不同的形式。如果要考虑的指标、因素和相互关系越多，计算得越精确，那么反映经济过程的模型就越要完备，同时模型也变得更加复杂。使用这样的模型是很困难的，因为它包含许多未知变量、系数和公式。在这种情况下，情报

* 以下经济数学模型简称为数学模型

信息的收集和最佳方案的选取都变得更加困难。所以在实际应用中，通常只讨论一些能够给出满意结果的简单模型。倘若模型中所考虑的因素、指标和相互关系过少时，所得出的解答也是不适用的。因为这样的模型不能完全地反映出过程的真实情况。在模型化时，必须明确问题解答的有效性，形成标准形式的目标。经济关系也应该有确定的定量形式。假如，实际的社会经济关系和因素不能表示成确定的定量关系，那么就需要简化关系或近似地考虑这些关系。应该指出的是，最常用的模型是线性模型，因为线性关系能够简单而自然地表示过程的规律性。对于数学模型所提出的问题，确定有效的解法是十分重要的。通常，非线性模型比线性模型要复杂。一般形式的非线性问题还没有有效的解法，对于一些特殊的非线性问题，如二次规划问题，已有比较专门的有效解法。对于线性规划问题，已经提出了一些普遍的有效解法，许多模型化成整数混合规划问题，这些问题都有完全可以接受的近似解法。假如所得到的模型还没有可接受的数学解法，就应该去研究它。但是必须记住，研究这些解法是很困难的，它需要高级的数学家付出大量的时间和劳动。实践证明，多维问题利用近似解法是最有效的。它们不一定都要求出精确解，但是在允许的时间范围内，却能够给出较好的答案。所以，比较已有的方案，在允许的时间内能够得到较好的方案（不一定是最佳方案），在实践中也是有益的。

为了按照选定的方法编制电子计算机程序，给出问题解答的算式是程序设计必须研究的技术课题。在这个课题中，必须指明将要编制的程序是在什么样的磁盘操作系统（DOSC），或者是在什么样的操作系统（OC）上。在DOSC系统上比较简单，但是可行性比OC系统要差，在OC系统上编程

序比在ДОС系统上更有效，而且进行计算时可以节省很多机器时间。编制程序时要合理地采用模块方法，即建立模块程序。有效地划分那些重要的程序块：已知量输入程序；求解算法程序；打印输出程序。因为已知量输入和打印结果往往是可以互换的，所以模块方法的程序修改比较容易，在修改一些必要的模块时，其余的模块可以不必修改。同样重要的是在各种方案预测时，各个课题的解法也可以把程序块拆开。例如，若求解的问题是为了进行研究工作，那么应该划出中间方案。如果只要求最终结果，就应该以适当的文件格式进行打印。

为了在电子计算机上算题，必须准备系数、参量、指标、因素等具体数据的信息。输入的信息不能有句法和语义上的错误，即初始数据的收集和事先加工，都不能歪曲研究过程的实际含义。编制程序的错误，即对各种因素的评价失真，往往不能在初始数据加工时发现，而只能在得出计算结果之后，才暴露出来。所以，为了消除程序中的错误，就要用没有校正的数据作重复计算。数据加工是一项十分重要和繁琐的工作。要特别注意标准参量的加工精度，因为即使是一个不大的错误都会给计算结果带来很大的偏差。例如，在完成产品生产计划的计算中，原材料消费量稍有增加，就会使原材料的需求量增大很多。反之，过分地降低原材料的需求定额，计算结果给出的原材料需要量的降低也是虚假的。在设备工作定额和其它资源定额计算中，也会发生这种情况。同时要考虑到随着时间的流逝，技术的进步和设备磨损的变化，定额的数据也要有所改变。

为了更充分地有效地使用数据，需要建立数据库。根据所得到的数据进行计算，然后分析所得到的结果，并给出推

荐方案。通常问题的最优解给出的方案会使标准值改善10—15%，这是十分重要的。但是分析表明，在构造模型时，往往不可能把一些重要因素和条件都考虑周全，所以数据加工允许有较大的误差。考虑到这些允许误差，所得到的计算结果就不必进行校正。一般地说，校正往往会使解的有效性成倍地降低。但是，在实现计划的过程中，作了校正的结果也许会比不作校正的结果有较大的经济效益。所以必须仔细地分析最优解给出的推荐方案，并在专家作出全面讨论之后，方可采纳所推荐的方案。

本手册叙述了工业、农业、运输业、商业等国民经济部门的企业级技术经济过程的基本数学模型。讨论了部门间平衡和生产布局的国民经济模型。

为了求解上述各种模型，本手册还列出了求最优解的主要数学方法。

目 录

序 言	I
第一章 工业企业级模型	1
1. 工业企业规划矩阵模型	1
2. 技术经济(生产)规划模型	2
3. 成套产品的产量最大模型	5
4. 考虑车间能力的成套产品产量最大模型	7
5. 生产能力的最佳负荷模型	8
6. 按工作类型配置设备模型	13
7. 根据场地配置设备模型	15
8. 最佳混合模型	20
9. 最佳下料模型	21
10. 业务进度计划模型	26
第二章 农业企业级模型	43
1. 农业部门最佳结合的基础模型	43
2. 农业部门最佳结合的一般模型	46
3. 饲料最佳利用模型	50
4. 饲料最佳生产模型	50
5. 种植结构与分布模型	52
6. 最佳轮作模型	55
7. 机械-拖拉机最佳使用模型	56
8. 机械-拖拉机补充模型	58
9. 机械-拖拉机最佳结构模型	59
10. 最佳施肥模型	61

11. 青饲料最佳生产模型	63
12. 畜群结构与畜群周转模型	64
第三章 工业部门级模型	66
1. 最佳工艺选择模型	66
2. 一般工艺选择问题	69
3. 部门最佳生产规划模型	70
4. 部级企业产品生产总体规划的最佳分配模型	72
5. 部级企业最佳生产规划模型	74
6. 考虑原料购入, 保存和加工的最佳部门常规规划 模型	75
7. 机器满载模型	77
8. 生产专业化模型	78
9. 甜菜的收获、保存和加工的最佳运筹模型	79
10. 标准工具和常用工具生产专业化模型	81
11. 考虑主要设备工作能力的标准工具和常用工具 生产专业化模型	82
12. 部门生产配置模型	84
13. 动态生产配置模型	98
14. 多种产品的生产配置模型	100
15. 直接联系的配置模型	113
16. 多产品动态配置模型	115
17. 工业部门的投资分配模型	121
18. 部门的投资和生产发展规划模型	140
19. 联合生产发展的投资规划模型	142
第四章 部门级农业模型	149
1. 农产品生产专业化模型	149
2. 土地面积最佳利用模型	150

3. 农产品生产配置模型.....	152
4. 农业生产配置中农业-工业耦合模型	153
5. 投资分配模型.....	155
6. 化肥最佳使用模型.....	159
7. 化肥计划指标的最佳分配模型.....	161
8. 地区内农产品最佳收购模型（产品运费不高的情况）	163
9. 农产品生产最佳配置和收购计划模型.....	171
第五章 运输问题模型	173
1. 运输网络发展模型.....	174
2. 车场总调度模型.....	178
3. 为供货者确定用户模型.....	181
4. 沿线上运输工具配置模型.....	184
5. 增加民航飞机模型.....	188
6. 考虑转运的运输模型.....	189
7. 网状配置的运输模型.....	196
8. 转运站的投资分配模型.....	197
第六章 商业活动模型	200
1. 零售商业网点的配置模型.....	200
2. 商业企业经营活动规划模型.....	202
3. 商业部门最佳发展计划模型.....	204
4. 按工资预测工人与职员分布模型.....	206
5. 按收入预测居民（人口）分布模型.....	208
6. 预测居民的货币收支平衡的等级分布模型.....	209
7. 耐用商品的需求预测模型.....	212
第七章 国民经济模型	218
1. 静态部门平衡模型.....	218

2. 动态部门平衡模型.....	220
3. 投资滞后的部门平衡模型.....	223
4. 全部投资转成固定资产的动态部门平衡模型.....	224
5. 生产力配置模型.....	226
6. 价格构成模型.....	229
7. 地区与部门发展规划相结合模型.....	235
8. 部门间平衡的多次综合模型.....	241
9. 国民经济发展的数量经济学模型.....	243
第八章 经济指标预测模型	250
1. 单因素时间序列的基本预测模型.....	250
2. 指数展平法.....	255
3. 考虑增长的时间序列预测方法.....	258
4. 单因素时间序列最佳函数选择法.....	258
5. 多因素预测模型.....	259
6. 考虑滞后因素的预测模型.....	262
7. 动态预测模型.....	266
8. 多因素模型表示预测趋势最佳函数的选择方法.....	267
9. 自变量分组法[MYTA]	269
10. 考虑互换性的经济指标体系预测模型.....	271
第九章 数学方法	274
1. 线性代数方程.....	274
2. 线性规划问题.....	277
3. 整数线性规划问题.....	286
4. 离散型规划.....	289
5. 运输问题.....	291
6. 目标二次规划问题.....	295
7. 非线性规划问题.....	301

第一章 工业企业级模型

在工业生产中，合理地组织生产具有重大的意义。其目的是提高生产的技术水平和生产过程的机械化与自动化的水平，发挥企业的生产-经济活动的内部潜力，最好地使用资源和销售产品，解决技术经济规划问题等等。可以采用经济数学模型和电子计算机解决这些问题。

1. 工业企业规划矩阵模型

产品是在主要车间和辅助车间加工的，它们之间有着固定的技术与经济联系。工艺过程是由各种部件和零件组合成产品的过程，经济过程是生产产品时，物资的、技术的、财政的和劳力的资源消耗过程，问题是要建立工艺的和经济的信息之间的总体联系。它可选用矩阵模型。如果矩阵模型建立在实物量指标上，则称为工艺矩阵模型，如果它建立在货币量指标上，就称为经济模型。

这里引用下列符号：

i, j ——产品类型；

$i, j = 1, 2, \dots, n$ ——主要产品类型；

$i, j = n + 1, n + 2, \dots, m$ ——辅助产品类型；

a_{ij} ——生产单位 j 类产品，对 i 类产品的消耗定额；

y_i ——最终产品产量

x_i —— i 类产品的产量;

x_j —— j 类产品的产量;

r ——材料、原料、半成品、成品和零件、燃料、电力等资源种类;

d_{rj} ——制造单位 j 类产品, 对 r 种材料的消耗定额;

s ——资产(机器)种类;

f_{sj} ——制造单位 j 类产品, 对 s 种资产(机器时间)的消耗定额;

g ——劳力种类;

t_{gj} ——制造单位 j 类产品, 对 g 种劳力(工作时间)的消耗定额;

数学模型——线性方程组

$$\sum_{i=1}^m a_{ij}x_j + y_i = x_i \quad (i = 1, 2, \dots, m).$$

用高斯法解这个方程组, 可得到主要的和辅助的产品产量 x_i 。然后确定下列需求量:

资源:

$$\sum_{j=1}^m d_{rj}x_j = d_r,$$

资产:

$$\sum_{j=1}^m f_{sj}x_j = f_s,$$

劳力:

$$\sum_{j=1}^m t_{gj}x_j = t_g$$

假如 d_r , f_s , t_g 超过定额时, 就要修改(减少)最终产

品产量 y_i ，再求解方程组，确定新的 x_i 值，或者增加资源量。

例1 消耗定额列于表1，设 x_1, x_2 为主要产品产量； x_3, x_4 为辅助产品产量。为了确定这些数量，可建立方程组：

$$0.15x_1 + 0.1x_2 + 0.05x_3 + 0.08x_4 + 8.5 = x_1;$$

$$0.2x_1 + 0.3x_2 + 0.1x_3 + 0.5x_4 + 15 = x_2;$$

$$0.3x_1 + 0.5x_2 + 0.4x_3 + 0.22x_4 + 0 = x_3;$$

$$0.1x_1 + 0.15x_2 + 0.2x_3 + 0.3x_4 + 0 = x_4.$$

求解方程组得出生产规划：

$$x_1 = 30, x_2 = 80, x_3 = 100, x_4 = 50 \text{ (单位)};$$

表 1 主要和辅助生产的消耗定额

生 产 产 品		需 求 产 品				最终产品 y_i
		主 要 产 品		辅 助 产 品		
		$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$	
主要产品	$i=1$	0.15	0.10	0.05	0.08	8.5
	$i=2$	0.20	0.30	0.10	0.50	15.0
辅助产品	$i=3$	0.30	0.50	0.40	0.22	0
	$i=4$	0.10	0.15	0.20	0.30	0
原 料	$r=1$	1.0	1.5	0.8	2.0	
能 源	$r=2$	0.5	0.8	0.3	1.0	
资 产	$s=1$	2.5	1.3	2.0	2.8	
	$s=2$	1.0	1.5	1.8	1.3	
劳 力	$g=1$	2.7	3.2	3.8	4.0	
	$g=2$	2.0	4.0	1.5	1.0	

资源的需要量：

$$d_1 = 1 \times 30 + 1.5 \times 80 + 0.8 \times 100 + 2 \times 50 = 330 \text{ (单位)};$$

$$d_2 = 0.5 \times 30 + 0.8 \times 80 + 0.3 \times 100 + 1 \times 50$$

$$= 159 \text{ (单位)};$$

资产的需要量:

$$f_1 = 2.5 \times 30 + 1.3 \times 80 + 2 \times 100 + 2.8 \times 50$$

$$= 519 \text{ (单位)};$$

$$f_2 = 1.0 \times 30 + 1.5 \times 80 + 1.8 \times 100 + 1.3 \times 50$$

$$= 395 \text{ (单位)};$$

劳力的需要量:

$$t_1 = 2.7 \times 30 + 3.2 \times 80 + 3.8 \times 100 + 4 \times 50$$

$$= 917 \text{ (单位)};$$

$$t_2 = 2 \times 30 + 4 \times 80 + 1.5 \times 100 + 1 \times 50 = 580 \text{ (单位)}。$$

2. 技术经济 (生产) 规划模型

问题是要选择一种工艺, 利用给定的资源, 完成生产计划, 使其费用达到最小。

这里引用下列符号:

j ——工艺种类;

n ——工艺种类数;

x_j ——利用 j 种工艺的强度;

i ——产品类别;

l ——产品类别数目;

a_{ij} ——在利用单位强度的 j 种工艺时, i 类产品生产定额;

Q_i —— i 类产品生产计划;

s ——资源种类;

b_s ——选定 s 类资源量;

k ——选定全部资源类别的数目;

b_{sj} ——在应用具有单位强度的 j 种工艺时, 所使用的 s 类资源定额;

c_j ——使用具有单位强度的 j 种工艺时的消耗定额。

数学模型 (产品生产费用最少):

$$\sum_{j=1}^n c_j x_j \rightarrow \min,$$

资源约束:

$$\sum_{j=1}^n b_{sj} x_j \leq b_s \quad (s = 1, 2, \dots, k),$$

生产计划的完成:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, l),$$

其中 $x_j \geq 0 \quad (j = 1, 2, \dots, n)$.

这是线性规划问题。

注1 假如利润在问题中起着主要作用, 那么可以将模型中产品生产费用最少改为利润最大。即 $\sum_{j=1}^n p_j x_j \rightarrow \max$, 其中 p_j ——由于使用单位强度的 j 类工艺所得到的利润。

注2 假如允许超过计划, 那么模型可采用不等式:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \geq Q_i \quad (i \in M),$$

其中 M ——允许超额完成计划的同类产品。这时, 技术经济规划模型可写成线性规划问题, 并可用单纯形法求解。

3. 成套产品的产量最大模型

由零件组成的产品生产中, 为了达到最大的生产量, 必