随机信号处理

黄俊钦 著

北京航空航天大学出版社

随机信号处理

黄俊钦 著

北京航空航天大学出版社

内 容 简 介

本书是作者在积累了多年科研与教学实践经验的基础上，参考了国际上较新的资料编写而成的。本书的特点是以随机信号处理中最近十年来国内外学者特别关注的随机信号自适应处理为重点，介绍了单变量、多变量和二维随机信号的自适应处理方法。大部分章节都有仿真计算的例题。同一例题又采用多种算法进行比较，便于读者较深入地学习研究。

本书适用于从事各种随机信号处理工作的科技工作者，也可供仪器仪表、测试计量、控制、电子、生物医疗与自动化等专业的大学生和研究生使用。

随 机 信 号 处 理

SUIJI XINHAO CHULI

黄俊钦 著

责任编辑 樊 毅

北京航空航天大学出版社出版

新华书店总店科技发行所发行　各地新华书店经售

北京农业工程大学印刷厂印刷

787×1092　1/16　印张：18　[illegible]数：460　[illegible]字

1990年3月第一版　1990年3月第一次印刷　印数：3500册

ISBN 7-81012-137-5/TP·020　　定价：3.60元

前　言

自然界和人类社会的许多现象都是随机的，人体自身和生物体的许多生理和病理现象也具有随机性。对这些现象的分析和处理已形成一门新的学科——随机信号处理。

多年来，我们给研究生开设了这门课程，并编写了讲义。本书在这些讲义的基础上，增补了我们和研究生多年的研究成果，可作为研究生和本科高年级学生的教材，亦可供从事这方面工作的研究人员和工程技术人员参考。

本书的内容以功率谱估计为主，其中又以参数谱估计（现代谱估计）为主干。

第一章差分方程模型辨识法是本书各章的基本数学工具。当然，随机信号处理所需的数学工具较多，但大多数都可在各种参考书中找到，为节省篇幅，只选择了书中较常用的几种方法作介绍。第二章线性系统对随机信号的响应，介绍了线性连续系统和离散系统对随机信号响应的研究方法。同确定性信号处理中研究线性系统对确定性输入的响应类似，这里也研究了用随机信号测试线性系统的动态特性的方法，这是随机信号的一种应用。第三章讨论随机信号主要特征量的估计，主要是非参数谱估计（经典谱估计）的几种方法。

第四章至第八章都是讨论参数谱估计，这是本书的重点。第四章讨论自回归（AR）模型参数与最大熵谱估计，第五章讨论自回归滑动平均（ARMA）模型参数与谱估计。从第六章起讨论随机信号自适应处理方法，依次讨论了非平稳随机信号、多变量随机信号、二维随机信号的自适应处理方法。这三章都以随机过程（AR、ARMA、受控AR和受控ARMA）为主。研究的问题逐章深化，即由非自适应扩展到自适应，由单变量扩展到多变量，由一维扩展到二维，这样由浅入深，易于学习。

书中每章每节都有数字仿真例题，用于辅助算法的学习与比较。这些计算方法和程序构成一个较实用的随机信号处理程序包，可供读者做习题和其他研究工作使用。

书中的程序部分是我们历届研究生编制的，数字仿真结果也是他们做出来的。他们是孙贤主、、张继志、侯连生、余辉里、刘整社、陈晞、刘莎等。还有部分程序和数字仿真例题是孟晓风同志做的。特此致谢。特别要感谢杨福生同志给我的许多帮助。

由于本人水平不高，加之时间仓促，书中定有错误和不妥之处，恳请读者批评指正，不胜感激。

作　者

1988年 8 月 1 日于北京航空航天大学

目　　录

绪 论

世界上一切事物都在不断地运动、变化和发展，这些运动往往都以一定形式的物理量、化学量、生物量或其它量的变化表现出来，这些量随时间的变化统称为信号。许多噪声和干扰的性质是随机的，这些噪声本身和系统对它们的响应都是随机信号。许多动态激励信号如阶跃、正弦、半正弦信号等等都是确定信号，线性系统对这些激励信号的响应也是确定信号，当然也往往叠加上一些随机信号（如测量噪声）。确定性信号的分析与处理主要是研究它们在时间域或频率域的特性、建立它们的静动态数学模型，以便定量地描述其静动态特性，求出其静动态性能指标，并研究如何改善系统的静动态特性等等。确定信号的分析与处理已有许多课程、书籍和文献进行研究，本书着重研究随机信号处理。

最常见的随机信号是传感器与测试系统、导航与控制系统及过程检测系统中的各种噪声与干扰。在精密与超精密（如微米或亚微米级的）加工与调试中，解决随机干扰是个关键的技术问题。飞行器在空中受到的许多扰动、汽车与火车在行驶过程中的振动、轮船在航行时的颠簸、气象与水文参数的变化和地震信号等等都是随机信号。雷达和声纳接收到的信号除有用信号外，都掺入了许多随机干扰信号。在生物医学领域，心电、脑电、肌肉电中也带有各种各样的随机信号，这些随机信号不但因人而异，而且同一个人在不同时刻也在变化着，因为一般生物电总是伴随着由于肢体动作、神经紧张、外界各种刺激等等带来的假象。许多社会现象的统计数据和经济信息的统计数据等多数都是随机信号，各地段的交通情况（如各个时间通过的车辆数目等）也都是随机信号。

随机信号处理学科的目的总的说来是找出这些随机信号的统计规律，解决它们给工作带来的问题。例如：滤除随机干扰后，便可提高测试导航和控制的精确度和加工的精确度；了解汽车、火车运输中的振动，便可对产品进行模拟运输试验，可节省许多运输考验的费用和时间。研究和实验结果表明，对产品进行随机振动实验是考核产品抗震性能的一种好方法。另外，掌握了气象与水文的大量随机信号之后，运用随机信号处理方法便可进行气象与水文的预报，对石油产量与地下水位的变化等等也可以进行预报；根据各个时间在各个地段上通过车辆的数目，经处理后可进行合理的交通管理与调度等；由地震仪器的记录数据，经处理后可作出地震预报；向地下发出强烈的激励信号，由接收到的大量地下返回信号可以判断地下的矿产情况；用分析雷达和声纳接收到的信号可进行空中交通管制和探测鱼群；对生物医学信号的处理可用来诊断疾病和健康检查；根据社会经济各方面的统计规律，可以采取相应的措施和决策。所有这些都是随机信号处理学科的用途，也是研究随机信号的主要目的。不过，许多情况下都需要把掩没在噪声中的信号检测和估计出来。

本课程主要研究下列几方面的问题。

首先是介绍我们在解矛盾方程组中提出的几种算法，其中最基本的是“能同时辨识差分方程模型阶次和参数的算法”。它在尚未估计出模型参数之前，就可以求出几阶模型的最小二乘估计的指标函数，根据这些指标函数便可以确定模型阶次，模型阶次确定后，该阶模型

参数便很容易求出。这是这种算法的主要特点，它的另一特点是算法稳定性较好，因而参数估计的精确度较高。其次推导出这种算法的实时递推算法。最后介绍由瞬态响应建立数学模型的最大似然法以及它的递推算法。这些都是主要的数学工具。

通过线性系统来处理（放大与滤波等）信号是最常用的信号处理方法。随机信号通过线性系统时，系统对随机信号的响应是我们要研究的第二个问题，其中分别讨论线性连续系统与非线性离散系统对随机信号的响应，主要研究输入、输出间的自相关函数与互相关函数，功率谱密度与互功率谱密度。先讨论单变量系统，后讨论多变量系统，这样由线入深介绍便于学习。在讨论过程中着重于认识事物的规律性，找出较一般性规律后，便可指导解决较普遍的问题。接着讨论线性系统对具体的随机信号——白噪声的响应，也就是当系统在白噪声作用下，求出系统状态的数学期望和误差协方差。最后讨论如何利用随机信号测试线性系统动态特性的问题，讨论了利用白噪声伪随机信号和其它随机激励信号来测试线性系统的动态特性问题。这是随机信号的一种应用。

研究随机信号往往需要知道该信号的主要特征，如均值、方差、概率密度、相关函数和功率谱密度等。第三个问题便是讨论随机信号特征量的估计方法，其中均值、方差、均方差的估计在许多参考书中都已有详细讨论，故本书只讨论运用快速傅氏变换算法（FFT）估计相关函数和功率谱密度的算法。因为功率谱估计比较复杂，故是本书讨论的重点。

功率谱估计方法有两类：非参数谱估计（又称经典谱估计）和参数谱估计（又称现代谱估计）。先讨论非参数谱估计。首先介绍最简单的周期图法及其改进算法，其中着重介绍经典谱估计中较完善的Welch法。在这基础上重点介绍我们自己所做的工作——用WFFT算法的非参数谱估计，同时和Welch法进行了对比，计算结果表明：WFFT的非参数谱估计优于Welch法。同理，用WFFT算法进行倒频谱估计，其结果亦略优于采用一般FFT算法估计的结果。

讨论随机模型和现代谱估计，是本课程的重点。按问题的难易程度，先讨论单变量系统的自回归AR模型参数和谱估计（即最大熵谱估计）、自回归滑动平均（ARMA）模型参数和谱估计。这些问题都局限于讨论平稳随机过程的情况。

在各种自然现象和社会现象中有许多是非平稳随机过程，所以，研究非平稳随机信号的处理已成为近代这个领域中重要的课题之一。信号的自适应处理方法是解决这类问题的重要方法之一，故本书的后半段主要研究随机信号的自适应处理方法。同样，先讨论单变量系统的自适应处理方法，包括受控自回归（CAR）、自回归（AR）和自回归滑动平均（ARMA）三种随机过程的自适应处理方法和自适应反卷积以及横向结构的随机梯度自适应法。

在现实社会里许多都是多变量系统，例如各种飞行器（飞机、导弹和卫星等）的测量与控制系统，许多工厂、发电厂、电网的测控系统和许多自然现象以及社会现象等都可能是各种形式的多变量系统。所以，多变量随机信号的自适应处理也是本书重点讨论的问题之一，其中也主要讨论多变量AR、CAR、ARMA过程的自适应处理方法。

地震信号、遥感以及其它图象信号，许多物理场（如温度场、噪声场、二维流场）等都是二维或三维随机信号（随机场）。这类随机信号的处理，也是近代信号处理中的重要课题之一，所以二维随机信号处理，本书也作为一个重要问题来讨论。其中，以二维差分方程模型的自适应辨识法为基础，先介绍一种二维递归数字滤波器的时域设计法作为这种自适应辨

识法的一种应用，也就是二维受控AR模型的自适应辨识法。在这个基础上重点讨论二维AR过程和ARMA过程的自适应处理方法。

以维纳滤波和卡尔曼滤波为代表的最佳滤波与预测理论，已有许多参考书作过详细的讨论，故本书只用较少的篇幅加以扼要的介绍。

撰写本书的主导思想是想把我们多年来研究随机信号处理的方法和结果较系统地整理出来，使之成为一本较完整而且实用的随机信号处理的参考书。

本书有如下几个特点：

（1）全书体系上的特点，是以随机信号处理中的核心问题谱估计为重点，其中又以参数谱估计（现代谱估计）为主干，由单变量，多变量到二维随机信号的处理都紧扣这个核心问题。由简到繁循序渐进，由平稳随机信号的处理到非平稳随机信号的自适应处理，全书体系的特点是很明显的。

（2）书中的内容较为新颖，随机信号的自适应处理和多维谱估计的问题都是随机信号处理领域中较为新颖的问题。本书除有一章讨论单变量非平稳随机信号的自适应处理之外，另外还有两章分别讨论多变量随机信号的自适应处理和二维随机信号的自适应处理，这些都是现有参考书很少讨论的问题。

（3）现代谱估计的关键问题是建立随机信号的参数模型。参数模型质量的优劣取决于建立参数模型的算法，所以，本书的另一特点是重视算法研究。为了比较各种算法的优劣，书中许多例题同时采用两种或多种算法进行仿真计算，以便分析比较。

（4）书中例题较多，而且大多数例题都是我们历届研究生自己编制程序实际计算的结果。

（5）本书介绍的分析方法和算法都比较实用，这些算法都是经过多年历届研究生使用过的，故较为实用。

第一章　差分方程模型辨识法

第一节　概　　述

随机信号处理中需要应用不少数学工具，例如：概率论、数理统计、随机过程、快速傅里叶变换算法、矩阵理论、数值计算方法和差分方程模型的辨识方法等等。其中除差分方程模型辨识方法之外，其余各部分几乎都有专门的参考书介绍，所以本章只介绍差分方程模型辨识法。此类算法甚多，如各种最小二乘法等[1]，为节省篇幅，本章着重介绍后面几章应用较多的镜像映射法和最大似然法。

第二节首先讨论数值计算中的“病态”问题，说明法方程组的条件数是矛盾（超定）方程组的平方倍。为了减小数值计算中的“病态”问题，进行模型参数估计时，最好采用镜像映射法解矛盾方程组。接着便较详细地介绍镜像映射法的原理与特点。

第三节介绍一种能同时辨识模型阶次和参数的方法。它首先揭示出镜像映射法的一种重要性质，并利用它加快差分方程模型阶次和参数的辨识，构成能同时辨识模型阶次和参数的一种新算法。

第四节将这种算法构成实时的递推算法，在研究模型阶次时，可由低阶逐步递推到高阶模型，同时可以减少计算机的运算时间。

第五节介绍递推最大似然法。

本章的安排是先介绍镜像映射法和最大似然法的原理和应用，然后再介绍它们的递推算法，这样便于理解和掌握这些算法。

第二节　镜像映射法——矛盾方程组的最小二乘解法

普通的最小二乘法，都是通过解正规(法)方程来求得参数矩阵的最小二乘估计。有些情况下，解正规方程时，会出现矩阵“病态”问题。这时，可改为直接解矛盾方程组，因为矛盾方程组的“病态”不象正规方程那样严重。本节先讨论如何比较矩阵“病态”程度的问程，也就是矩阵条件数的问题，证明正规方程矩阵的条件数，是原矛盾方程矩阵条件数的平方倍。所以，解矛盾方程组时“病态”问题要轻得多。这个问题讨论清楚以后，再讨论解矛盾方程组的一种方法——镜像映射法。

一、矩阵的条件数

现在讨论如何比较不同矩阵“病态”程度问题。为此，需要弄清系数矩阵和自由项有微小变化时，方程组的解是怎样变化的。这个问题亦称“摄动分析”。

（一）矛盾方程组的条件数

应用线性模型

$$\mathbf{XA}=\mathbf{Y} \tag{1-2-1}$$

来讨论这个问题。当矩阵**X**和**Y**分别都有微小误差$\Delta\mathbf{X}$和$\Delta\mathbf{Y}$时，使**A**有误差$\Delta\mathbf{A}$，则

$$(\mathbf{X}+\Delta\mathbf{X})\cdot(\mathbf{A}+\Delta\mathbf{A})=\mathbf{Y}+\Delta\mathbf{Y}$$

将上式展开得

$$\mathbf{X}\cdot\Delta\mathbf{A}+\Delta\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}+\Delta\mathbf{X}\cdot\Delta\mathbf{A}=\Delta\mathbf{Y}$$

对上式两端左乘$\mathbf{X}^{-1}$，移项后得

$$\Delta\mathbf{A}=-\mathbf{X}^{-1}\cdot\Delta\mathbf{X}\cdot\mathbf{A}-\mathbf{X}^{-1}\cdot\Delta\mathbf{X}\cdot\Delta\mathbf{A}+\mathbf{X}^{-1}\cdot\Delta\mathbf{Y}$$

将上式两端取范数，并利用向量和相应矩阵范数的一致性关系得

$$\|\Delta\mathbf{A}\|\leqslant\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\Delta\mathbf{X}\|\cdot\|\mathbf{A}\|+\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\Delta\mathbf{X}\|\cdot\|\Delta\mathbf{A}\|+\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\Delta\mathbf{Y}\|$$

1. 当$\Delta\mathbf{Y}=0$时，上式变为

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|+\|\Delta\mathbf{A}\|}=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\Delta\mathbf{X}\|=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|\cdot\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}$$

这是由于**X**有误差$\Delta\mathbf{X}$所引起的待估计参数矩阵**A**的误差$\Delta\mathbf{A}$。

2. 当$\Delta\mathbf{X}=0$时

$$\|\Delta\mathbf{A}\|=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\Delta\mathbf{Y}\|$$

或

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|\cdot\frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|}$$

这是由于**Y**有误差$\Delta\mathbf{Y}$所引起的待估计参数矩阵**A**的误差$\|\Delta\mathbf{A}\|$。

3. 当$\Delta\mathbf{X}\neq0$，$\Delta\mathbf{Y}\neq0$时，

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\leqslant\frac{\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|}{1-\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|\cdot\dfrac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}}\left(\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}+\frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|}\right)$$

这式成立的条件是$\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|<1$。令$P(\mathbf{X})=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|$，得

$$\frac{\|\Delta\mathbf{A}\|}{\|\mathbf{A}\|}\leqslant\frac{P(\mathbf{X})}{1-P(\mathbf{X})\cdot\dfrac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}}\left(\frac{\|\Delta\mathbf{X}\|}{\|\mathbf{X}\|}+\frac{\|\Delta\mathbf{Y}\|}{\|\mathbf{Y}\|}\right)$$

这是由误差$\Delta\mathbf{X}$与$\Delta\mathbf{Y}$引起的**A**之误差$\Delta\mathbf{A}$。由上式都可以看出：$\Delta\mathbf{X}$与$\Delta\mathbf{Y}$的相对变化相同时，$P(\mathbf{X})=\|\mathbf{X}^{-1}\|\cdot\|\mathbf{X}\|$之值愈大，解的相对误差$\Delta\mathbf{A}/\mathbf{A}$就愈大，反之$P(\mathbf{X})$愈小，解的相对误差就愈小。所以，$P(\mathbf{X})$在某种程度上描述了方程组的解答对于原始数据变化的灵敏程度，也就是描述了方程组“病态”的程度。自然应把$P(\mathbf{X})$看作矩阵对于解方程组“病态”程度的一种度量。通常把$P(\mathbf{X})$称为矩阵 **X**(对于所取范数）的条件数（或性态数)。$P(\mathbf{X})$愈大，矩阵**X**对于解方程组（或求逆）来说“病态”就愈严重。解的误差大到可能得出完全错误的结果。

如**X**是实对称阵，并取欧氏模，那么

$$\|\mathbf{X}\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(\mathbf{X}^T\mathbf{X})}=|\lambda_1|$$

$$\|X^{-1}\|_2=\sqrt{\lambda_{max}(X^{-1})^T\cdot(X^{-1})}=\sqrt{\frac{1}{\lambda_{min}(X^TX)}}=\frac{1}{|\lambda_n|}$$

所以 $$P(X)=\|X^{-1}\|\cdot\|X\|=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(X^TX)}{\lambda_{min}(X^TX)}}=\frac{|\lambda_1|}{|\lambda_n|}$$

式中，λ_1与λ_n分别为矩阵X的按模最大与最小特征根。

这便是矛盾方程组式(1-2-1)的条件数。

（二）正规方程组的条件数

当矛盾方程组用正规方程求解时，其条件数会变大。下面求正规方程的系数阵的条件数。正规方程为

$$X^TX\hat{A}=X^TL$$

或 $$C\hat{A}=X^TL$$

式中 $$C=X^TX$$

矩阵C的条件数为

$$P(C)=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(C^T\cdot C)}{\lambda_{min}(C^T\cdot C)}}=\sqrt{\frac{\lambda_{max}[(X^TX)^T(X^TX)]}{\lambda_{min}[(X^TX)^T(X^TX)]}}$$

$$=\sqrt{\frac{\lambda_{max}(X^TX)^2}{\lambda_{min}(X^TX)^2}}=\frac{\lambda_{max}(X^TX)}{\lambda_{min}(X^TX)}=P^2(X)$$

所以，一般说来，正规方程 $C\hat{A}=X^TL$的矩阵C的条件数$P(C)$是原矛盾方程组 $XA=Y$的矩阵X条件数$P(X)$的平方倍，故正规方程的“病态”程度将大大增加。

由于正规方程的这一特点，有必要采用具有更高数据稳定性的计算方法来解决问题。目前一般使用镜像映射法和正交化法，并已获得了很好的结果。

二、镜像映射法

矛盾方程为 $$Y=XA$$

观察方程为 $$L=Y+\Delta \tag{1-2-2}$$

残差为 $$V=XA-L \tag{1-2-3}$$

残差平方和为 $$J=\|V\|_2=\|XA-L\|_2$$

使J最小的解A便是矛盾方程的最小二乘解。

假设可找到一个正交矩阵$H_{N\times N}$，使之满足

$$\underset{N\times N}{H}\cdot\underset{N\times n}{X}=\begin{bmatrix}R\\0\end{bmatrix}\begin{matrix}{}_{n\times n}\\{}_{(N-n)\times n}\end{matrix} \tag{1-2-4}$$

式中，R为$n\times n$维的上三角阵（想办法求出满足这条件的H，其求法下面讨论）。

将HL的前n个元素记为e，其余$(N-n)$个元素记为g，则有

$$HL=\begin{bmatrix}e\\g\end{bmatrix}\begin{matrix}{}_{n\times 1}\\{}_{(N-n)\times 1}\end{matrix} \tag{1-2-5}$$