数学名著译丛

抽象代数学

卷 2

线性代数

N. 贾柯勃逊 著

科学出版社

内 容 简 介

本书是作者根据他在几所大学里讲授的抽象代数学讲义编成的。全书分三卷。本卷是卷 2，专门介绍线性代数。

本卷着重于抽象概念方面，主要阐述了有限维向量空间、线性变换、线性变换的集合、双线性形式、欧几里得空间及单式空间、向量空间的积、线性变换环、无限维向量空间等。书中附有许多精选的例子及习题。本卷虽常使用卷 1 的名词和结果，但作者尽量使本卷内容自成一体，易于阅读。

本书可供数学研究工作者、高等院校数学系教师和学生参考。

N. JACOBSON
LECTURES IN ABSTRACT ALGEBRA
Vol. II
Linear Algebra
1953

数学名著译丛
抽 象 代 数 学
卷 2
线 性 代 数
N. 贾柯勃逊 著
黄 缘 芳 译

*

科学出版社出版
北京朝阳门内大街137号
中国科学院印刷厂印刷
新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1960年 3月第 一 版　开本：850×1168 1/32
1987年 8月第三次印刷　印张：8 3/8
印数：11,001—17,000　字数：214,000
统一书号：13031 · 3552
本社书号：5640 · 13—1
定价：2.40 元

序

本卷是著者的“抽象代数学”三卷中的第二卷．要理解本卷的內容，对第一卷里所述的羣、环、域、同态等基本概念必須有一定程度的熟悉．但我們曾試使綫性代数的叙述与第一卷的細节知識无关，有时列出特殊結果的参考文献，但若干必需的基本概念則予重述． 一句話，我們希望对数学有充分修养及对近世代数的基本概念熟悉的讀者能完全理解地讀完这卷．

本卷着重于抽象概念方面；但时常与这个观点有些出入．形式的計算方法有时給出更明确的結果．再则綫性代数的結果自身不是一个終点，而是用在数学及其应用的各分支的主要工具．所以，掌握构造性的而且可用于数值問題的方法是有用的．这些方法有时需要較长的討論，但我們覚得照所指陈的理由来看，它們的提出是正确的． 对于抽象代数很熟練的讀者无疑地会看清捷径的．有些方法則見于脚註中．

书中含有大量习題，很多是用簡单数字說明理論的．其它是难題，用以考驗优秀的讀者． 无論如何，要对本卷內容懂得透澈，細心研究这些习題是必要的．

本卷編写的各阶段中，曾利用許多朋友的意見和評論；特別感謝克里福得（A. H. Clifford）、霍赤才得（G. Hochschild）及卡浦兰斯基（I. Kaplansky）关于本卷早期論述的各种建議． 我也大大地感謝三年級同学米勒斯（W. H. Mills）的辛苦地协助証明及关于本卷最后修改的各种建議．

賈柯勃遜

1952年9月于新哈文（New Haven, Conn.）

目　　录

序 …… i

第一章　有限維向量空間 …… 1

1．抽象向量空間 …… 3

习題 1 …… 5

2．右向量空間 …… 5

3．o-模 …… 6

习題 2 …… 8

4．綫性相关 …… 8

习題 3 …… 12

5．維数的不变性 …… 12

习題 4 …… 13

6．基及陣 …… 13

习題 5 …… 16

7．陣論上的应用 …… 16

习題 6 …… 19

8．向量集合的秩．行列式秩 …… 19

习題 7 …… 22

9．商空間 …… 22

10．子空間的代数 …… 23

习題 8 …… 25

11．无关子空間，直接和 …… 25

习題 9 …… 27

第二章　綫性变换 …… 28

1．定义及例子 …… 28

习題 10 …… 29

2．綫性变换的合成 …… 29

习題 11 …… 32

3. 綫性变换的陣 ……………………………………………………………32
习題 12 ……………………………………………………………………34
4. 陣的合成 …………………………………………………………………34
习題 13 ……………………………………………………………………37
5. 基的改变．陣的等价及相似 ……………………………………………37
习題 14 ……………………………………………………………………39
6. 綫性变换的秩空間与脑空間 ……………………………………………39
习題 15 ……………………………………………………………………41
7. 綫性方程組 ………………………………………………………………42
习題 16 ……………………………………………………………………44
8. 右向量空間里的綫性变换 ………………………………………………44
习題 17 ……………………………………………………………………45
9. 綫性函数 …………………………………………………………………45
习題 18 ……………………………………………………………………47
10. 有限維空間与它的共軛空間之間的对偶性 …………………………47
习題 19 ……………………………………………………………………49
11. 綫性变换的折轉 ………………………………………………………50
12. 折轉的陣 ………………………………………………………………51
13. 射影 ……………………………………………………………………53
习題 20 ……………………………………………………………………55
第三章 单独一个綫性变换的理論……………………………………56
1. 綫性变换的最低多項式 …………………………………………………56
习題 21 ……………………………………………………………………58
2. 循环子空間 ………………………………………………………………58
3. 用最低多項式为指导的向量的存在 ……………………………………60
习題 22 ……………………………………………………………………61
4. 循环綫性变换 ……………………………………………………………61
习題 23 ……………………………………………………………………65
5. 由綫性变换决定的 $\Phi[\lambda]$-模 ………………………………………66
6. 有限生成的 $\mathfrak{o}$-模，这里 $\mathfrak{o}$ 是一个主理想整区 …………………………67
7. $\mathfrak{F}$ 及 $\mathfrak{N}$ 的生成元素的正規化………………………………………69
8. 元素属于主理想整区的陣的等价 ………………………………………70
习題 24 ……………………………………………………………………74

9．有限生成的 o-模的結构 ……………………………………………75
10．不变性定理 ……………………………………………………………78
11．向量空間关于綫性变換的分解 …………………………………………81
习題 25 ……………………………………………………………………87
12．特征多項式及最低多項式 ……………………………………………87
习題 26 ……………………………………………………………………88
13．定理 13 的直接証明……………………………………………………89
习題 27 ……………………………………………………………………92
14．跡及特征多項式的形式的性质 ………………………………………92
习題 28 ……………………………………………………………………94
15．循环 o-模的 o-自同态环………………………………………………94
习題 29 ……………………………………………………………………95
16．有限生成的 o-模的 o-自同态环的决定，o 是主理想整区 ………95
17．与給定的綫性变換可交換的綫性变換 ………………………………98
习題 30 ……………………………………………………………………99
18．环 $\mathfrak{B}$ 的心 …………………………………………………………… 100
习題 31 …………………………………………………………………… 101
第四章 綫性变換的集合…………………………………………………… 102
1．不变子空間 ……………………………………………………………… 102
习題 32 …………………………………………………………………… 104
2．誘导綫性变換 …………………………………………………………… 104
习題 33 …………………………………………………………………… 106
3．合成空間列 ……………………………………………………………… 106
4．綫性变換集合的可分解性 ……………………………………………… 108
习題 34 …………………………………………………………………… 110
5．完全可約性 ……………………………………………………………… 110
习題 35 …………………………………………………………………… 111
6．与算子羣論及模論的关系 ……………………………………………… 112
7．单独一个綫性变換的可約性、可分解性、完全可約性 ………… 113
习題 36 …………………………………………………………………… 115
8．空間关于一个綫性变換的准素支空間 ……………………………… 115
习題 37 …………………………………………………………………… 118
9．交換綫性变換的集合 …………………………………………………… 118

习题 38 …… 119

第五章 双綫性形式 …… 121

1. 双綫性形式 …… 121

习题 39 …… 123

2. 双綫性形式的陣 …… 123

3. 非退化形式 …… 124

习题 40 …… 126

4. 綫性变换关于一对双綫性形式的折轉 …… 126

习题 41 …… 129

5. 綫性变换与双綫性形式間的另一个关系 …… 129

6. 純量积 …… 131

7. 厄米特純量积 …… 133

习题 42 …… 135

8. 厄米特純量积的陣 …… 135

习题 43 …… 137

9. 特殊除环上对称及厄米特純量积 …… 137

习题 44 …… 141

10. 交錯純量积 …… 142

习题 45 …… 143

11. 威特定理 …… 144

习题 46 …… 151

12. 非交錯斜称形式 …… 151

第六章 欧几里得空間及单式空間 …… 154

1. 笛卡儿基 …… 154

习题 47 …… 157

2. 綫性变换与純量积 …… 157

3. 正交完全可約性 …… 158

4. 对称、斜称及正交綫性变换 …… 159

5. 对称及斜称綫性变换的典型陣 …… 160

习题 48 …… 162

6. 交换的对称及斜称綫性变换 …… 163

习题 49 …… 164

7. 正規及正交綫性变换 …… 165
习題 50 …… 166
8. 半定变换 …… 166
习題 51 …… 168
9. 任意綫性变换的极因子分解 …… 168
习題 52 …… 170
10. 单式几何学 …… 170
习題 53 …… 173
11. 綫性变换的分析函数 …… 173
习題 54 …… 177
第七章 向量空間的积 …… 178
1. 向量空間的积羣 …… 178
习題 55 …… 181
2. 綫性变换的直接积 …… 181
习題 56 …… 182
3. 双側向量空間 …… 182
习題 57 …… 185
4. 克伦內克积 …… 186
习題 58 …… 188
5. 綫性变换及陣的克伦內克积 …… 189
习題 59 …… 191
6. 张量空間 …… 191
7. 张量的对称类 …… 194
习題 60 …… 197
8. 向量空間的域的扩张 …… 197
9. 关于陣集合的相似性的一个定理 …… 199
习題 61 …… 201
10. 代数的另一定义.代数的克伦內克积 …… 201
习題 62 …… 202
第八章 綫性变換环 …… 203
1. $\mathfrak{L}$ 的单純性 …… 203
习題 63 …… 204

2. 算子方法 …… 204
3. $\mathfrak{L}$ 的左理想 …… 205
习題 64 …… 207
4. 右理想 …… 208
习題 65 …… 209
5. 綫性变換环的同构 …… 209
习題 66 …… 212
第九章 无限維向量空間 …… 214
1. 基的存在 …… 215
2. 維数的不变性 …… 216
3. 子空間 …… 217
4. 綫性变換及陣 …… 218
5. 共軛空間的維数 …… 220
习題 67 …… 222
6. 綫性变換的有限拓扑 …… 222
习題 68 …… 225
7. $\mathfrak{R}^*$ 的全子空間 …… 225
习題 69 …… 227
8. 对偶空間，克伦內克积 …… 227
习題 70 …… 230
9. 綫性变換环里双側理想 …… 231
10. 綫性变換的稠密环 …… 233
习題 71 …… 237
11. 同构定理 …… 238
习題 72 …… 240
12. 反自同构与純量积 …… 240
习題 73 …… 244
13. 叔尔引理，一般稠密性定理 …… 244
14. 綫性变換的不可約代数 …… 247
汉英名詞对照表 …… 250
人名索引 …… 255

第 一 章

有限維向量空間

向量在三維解析几何学里是按几何性质来定义的. 这里无須重提. 从代数观点来說,主要事实是: 向量 v 乃由它(关于一定坐标系)的三个坐标(ξ, η, ζ)完全确定. 习惯上記作 $v=(\xi,\eta,\zeta)$, 意味着: v 是这样的向量,它的 x-, y-及 z-坐标順序为 ξ, η, 及 ζ. 反过来,实数的任意有序三维组(ξ, η, ζ)决定一个一定向量. 所以在 3-空間里,向量与实数的有序三维组間存在着 1—1 对应.

几何学里关于向量有三个基本运算:向量的加法,向量与純量(数)的乘法,向量的数积. 这里也无須再提这些合成的几何定义,只要說明在三维组上与几何运算对应的代数方法就够了. 如果 $v=(\xi,\eta,\zeta)$ 及 $v'=(\xi',\eta',\zeta')$, 则和

$$v+v'=(\xi+\xi',\eta+\eta',\zeta+\zeta').$$

向量 v 与实数 ρ 的积 ρv 是向量

$$\rho v=(\rho\xi,\rho\eta,\rho\zeta),$$

而 v 与 v' 的純量积(v, v')是实数

$$(v,v')=\xi\xi'+\eta\eta'+\zeta\zeta'.$$

解析几何学的主要部分——綫性相关論及綫性变换論——只与这些概念中的前两者有关. 正是这个部分(的扩张形状)构成本书討論的主要論題. 純量积的概念是一种度量概念,在我們的討論中将放在次要地位.

向量关于加法及用数乘的乘法可有两个扩张方向. 一个是:我們的考虑无須限制于三维组,而是对于任意正整数 n 来观察 n 维组. 另一个是:我們无須假定坐标 ξ, η, $\cdots$ 是实数. 要保証綫性相关論的有效,我們只須假定有理运算能够施行;因此可用任意

域来代替实数域. 不仅如此,我們还不难进一步把基础数系的可交换性的假設摘去.

所以我們的討論从一个給定的除环 Δ 出发; 例如, Δ 可取下列的任意一个数系: 1) 实数域, 2) 复数域, 3) 有理数域, 4) 模 p 下的剩余域, 或 5) 实四維数的除环.

令 n 是一个固定的正整数,并且令 $\Delta^{(n)}$ 表 n 维组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全体, 这里 $\xi_i \in \Delta$. 这些 n 维组叫做**向量**, 而 $\Delta^{(n)}$ 叫做 **Δ 上 n 維组的向量空間**. 如果 $y = (\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$,則 $x = y$ 必須而且只須 $\xi_i = \eta_i (i = 1, 2, \cdots, n)$. 仿照三維实空間情形,我們在 $\Delta^{(n)}$ 里引入两个合成: 向量的加法及以 Δ 的元乘向量的乘法. 首先,如果 x 及 y 是任意向量,我們定义它們的**和** $x + y$ 为向量

$$x + y = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \cdots, \xi_n + \eta_n).$$

关于以 Δ 的元乘向量的乘法有两种可能:一种是由

$$\rho x = (\rho\xi_1, \rho\xi_2, \cdots, \rho\xi_n)$$

定义的**左乘法**,另一种是由

$$x\rho = (\xi_1\rho, \xi_2\rho, \cdots, \xi_n\rho)$$

定义的**右乘法**. 这两种中的任意一种都可使用,得出的理論是平行的. 但此后我們只采用左乘法,得出的所有結果都可轉变为右乘法上結果,这是不待贅言的.

本书的前八章是討論在上面定义的合成下的代数系 $\Delta^{(n)}$. 我們采用公理的方法, 亦即从列举作为代数系 $\Delta^{(n)}$ 的公理的簡单性質来导出所有結果. 这些公理定义一个**有限維(抽象)向量空間**的概念,而代数系 $\Delta^{(n)}$ 是这种空間的例子. 不但如此, 我們还会知道, 有限維向量空間的任意其它例子实际上都与一个代数系 $\Delta^{(n)}$ 等价.

所以,采取公理的观点不是受着导致一般化的愿望的推动,目的还是在于集中注意去弄明白这些代数系的实际性質, 以便把結果容易应用于其它具体例子中. 着眼点的放寬最后自然导致在討論向量空間里有用的其它更一般概念的考究. 这些概念中最重要的是模的概念,它成为单一綫性变换論(第三章)的主要工具. 为

着对于这种应用做好准备，这里从討論一开始即将叙述这个概念.

本章的目的在給向量空間論奠定基礎. 要討論的主要概念有:基,綫性相关,子空間,商空間及子空間的格.

1. 抽象向量空間 今列出 $\Delta^{(n)}$ 里合成的性質于次,这些代数系的整个理論都可由此导出:

A1 $$(x+y)+z=x+(y+z).$$

A2 $$x+y=y+x.$$

A3 有一个元素 0 存在,使对于一切 x 有 $x+0=x$.

A4 对于任意向量 x 有一个向量 $-x$ 存在,使 $x+(-x)=0$.

S1 $$\alpha(x+y)=\alpha x+\alpha y.$$

S2 $$(\alpha+\beta)x=\alpha x+\beta x.$$

S3 $$(\alpha\beta)x=\alpha(\beta x).$$

S4 $$1x=x.$$

F 存在着有限个向量 $e_1, e_2, \cdots, e_n$,使所有向量都有一种方法,并且只有一种方法写成 $\xi_1e_1+\xi_2e_2+\cdots+\xi_ne_n$ 的形状.

A1, A2, S1—S4 可以直接驗証. A3 可由观察 $(0, 0, \cdots, 0)$ 具有所需的性質而得証明. A4 可由观察:如果 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$,则可取 $-x=(-\xi_1, -\xi_2, \cdots, -\xi_n)$ 而得証明. 要証 F, 我們取 e_i 为

(1) $$e_i=(0, 0, \cdots, 0, \overset{i}{1}, 0, \cdots, 0), \quad i=1, 2, \cdots, n.$$

于是, ξ_ie_i 的第 i 位置是 ξ_i, 而其余坐标是 0. 因此 $\sum_1^n \xi_ie_i=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$. 所以, 如果 $x=(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$, 则 x 可写成向量 e_i 的"綫性組合" $\sum\xi_ie_i$. 这个关系还指出:如果 $\sum\xi_ie_i=\sum\eta_ie_i$, 則 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)=(\eta_1, \eta_2, \cdots, \eta_n)$. 从而 $\xi_i=\eta_i(i=1, 2, \cdots, n)$,这就肯定了 F 里的唯一性.

性質 A1—A4 說明: $\Delta^{(n)}$ 在加法合成下是交換羣. 性質 S1—S4 是用 Δ 的元作乘法及这个合成与加法合成間的关系的性質. 性質 F 是有限性基本条件.

今用这些性質来定义一个抽象向量空間. 抽象向量空間是一

个代数系，由 1）一个交换羣 $\mathfrak{R}$（它的合成記作 $+$），2）一个除环 Δ 及 3）对于所有二维组 (ρ, x) 定义的一个函数所組成，这里 $\rho \in \Delta$, $x \in \mathfrak{R}$，而这个函数的值 $\rho x \in \mathfrak{R}$，并且适合 S1—S4. 仿照 n 维组的几何情形，我們把 $\mathfrak{R}$ 的元称为向量，而 Δ 的元叫做純量. 在討論中，通常重点放在 $\mathfrak{R}$ 上，因此就用不很严格的說法，叫 $\mathfrak{R}$ 做"除环 Δ 上向量空间". （严格地說，$\mathfrak{R}$ 只是向量空間的羣的部分）. 如果于其它假設外，F 也成立，我們說 $\mathfrak{R}$ 是有限維的，或 $\mathfrak{R}$ 在 Δ 上拥有有限基.

由 $\Delta^{(n)}$，Δ 及上面定义的乘法 ρx 所构成的代数系是有限維向量空間的一个例子. 下面我們将要叙述环論里产生向量空間的一个情况. 令 $\mathfrak{R}$ 是带恆等元素 1 的一个任意环，并且假設 $\mathfrak{R}$ 含有一个除环 Δ，这个环含有 1. 当 $\rho \in \Delta$ 而 $x \in \mathfrak{R}$ 时，我們取环的积 ρx 为积 ρx；于是，S1—S3 是乘法的分配律与結合律的結果，并且因为 Δ 的恆等元素就是 $\mathfrak{R}$ 的恆等元素，所以 S4 成立. 于是，加法羣 $\mathfrak{R}$，除环 Δ 及乘法 ρx 构成一个向量空間. 这个空間可以是有限維的，也可以不是有限維的. 例如，如果 $\mathfrak{R}$ 是复数域，而 Δ 是实数子域，则 $\mathfrak{R}$ 是有限維的；这因为任意复数可借"向量" 1，$\sqrt{-1}$ 有一种方法而且只有一种方法写成 $\xi+\eta\sqrt{-1}$ 的形状. 这种类型的另一个例子是 $\mathfrak{R}=\Delta[\lambda]$，它是系数在除环 Δ 上含有超越元素（不定量）λ 的多項式环. 我們将会知道，这个向量空間不是有限維的（参看习題 3 的第 1 題）. 同样，我們可把多項式环 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_n]$ 看作一个 Δ 上向量空間，这里 λ_i 是代数无关元素（或无关不定量）.

向量空間的其它例子可由上面定义的各个空間的子空間得出. 令 $\mathfrak{R}$ 是 Δ 上任意向量空間，并且令 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子集合，它是一个子羣，并且在 Δ 的元素的乘法下封閉，这就是說：如果 $y \in \mathfrak{S}$，并且 ρ 是 Δ 里任意元素，则 $\rho y \in \mathfrak{S}$. 于是，$\mathfrak{S}$，Δ 及乘法 ρy 构成的代数系显然是一个向量空間；这因为 S1—S4 在 $\mathfrak{R}$ 里成立时，在子集合 $\mathfrak{S}$ 里显然也成立. 我們把它叫做給定向量空間 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間，并且也不严格地把 $\mathfrak{S}$ 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个子空間. 例

如,令 $\mathfrak{R}=\Delta[\lambda]$,并且令 $\mathfrak{S}$ 是次数 $<n$ 的多项式所成的子集合,則易見 $\mathfrak{S}$ 是一个子空間. 因为次数 $<n$ 的任意多項式有一种方法而且只有一种方法用多項式 $1, \lambda, \cdots, \lambda^{n-1}$ 的綫性組合表出,所以 $\mathfrak{S}$ 是有限維的.

習 題 1

1. 証明:二次齐次多項式 $\sum_{i\leqslant j}\alpha_{ij}\lambda_i\lambda_j(\alpha_{ij}\in\Delta)$ 的全体 $\mathfrak{S}$ 是 $\Delta[\lambda_1, \lambda_2,\cdots,\lambda_n]$ 的一个有限維子空間.

2. 右向量空間 在本章开始时,我們已指出 n 維组的代数系 $\Delta^{(n)}$ 也可以对于加法及用純量右乘的乘法来討論,这就引导我們来定义右向量空間的概念. 右向量空間是由一个交換羣 $\mathfrak{R}'$,一个除环 Δ 及二維组 (ρ, x') 的一个函数构成,这里 $\rho\in\Delta$, $x'\in\mathfrak{R}'$,这个函数的值 $x'\rho\in\mathfrak{R}'$,并且适合

S′1 $$(x'+y')\alpha=x'\alpha+y'\alpha.$$

S′2 $$x'(\alpha+\beta)=x'\alpha+x'\beta.$$

S′3 $$x'(\alpha\beta)=(x'\alpha)\beta.$$

S′4 $$\text{对于所有 } x'\in\mathfrak{R}',\ x'1=x'.$$

根据这个定义得来的理論显然与左向量空間的理論是平行的. 但要知道,如果除环 Δ 不是交換环,則 Δ 上右向量空間就不能看作一个 Δ 上左向量空間. 这因为,如果用 $\alpha x'$ 代替 $x'\alpha$,則由 S′3 得

$$(\alpha\beta)x'=x'(\alpha\beta)=(x'\alpha)\beta=\beta(\alpha x').$$

因此要 S3: $(\beta\alpha)x'=\beta(\alpha x')$ 成立,只能对于一切 x' 有

$$[(\alpha\beta)-(\beta\alpha)]x'=0.$$

由这个結果及 S4 可推出: $\alpha\beta=\beta\alpha$ 对于所有 α, β 成立.

另一方面,令 Δ' 是与 Δ 反同构的一个除环,并且令 $\alpha\to\alpha'$ 是 Δ 到 Δ' 上的任意反同构. 如果 $\mathfrak{R}'$ 是 Δ 上一个右向量空間,則 $\mathfrak{R}'$ 可看作 Δ' 上一个左向量空間. 这可由規定 $\alpha' x'$ 就是 $x'\alpha$ 而得出. 此时,

$$(\alpha'\beta')x'=(\beta\alpha)'x'=x'(\beta\alpha)=(x'\beta)\alpha=(\beta'x')\alpha=\alpha'(\beta'x'),$$

故能适合 S3. 其它法則也可直接驗証.

3. $\mathfrak{o}$-模 在着手系統的討論有限維向量空間前，我們要簡短地就扩充为模来耕一下，这在此后是极有用的. 这种推广是在定义内用带恆等元素的任意环 $\mathfrak{o}$ 代替除环 Δ. 所以，我們定义一个(左) $\mathfrak{o}$-模为一个代数系，由一个交換羣 $\mathfrak{R}$，一个带恆等元素的环 $\mathfrak{o}$ 及二元組 (ρ, x) 的一个函数构成，这里 $\rho \in \mathfrak{o}$, $x \in \mathfrak{R}$，而函数的值 $\rho x \in \mathfrak{R}$，并且适合 S1—S4[1]. 由这个定义显見向量空間只是一个 Δ-模，这里 Δ 是一个除环.

在向量空間这一特殊情形外，下面叙述 $\mathfrak{o}$-模的一个重要例子：令 $\mathfrak{R}$ 是(用加法合成的)任意交換羣，并且令 $\mathfrak{o}$ 是整数环. 如果 $x \in \mathfrak{R}$，而 $\alpha \in \mathfrak{o}$，我們定义

$$\alpha x = \begin{cases} x + x + \cdots + x, \text{这里 } \alpha > 0, \text{有 } \alpha \text{ 項}; \\ 0, \text{ 这里 } \alpha = 0; \\ -(x + x + \cdots + x), \text{这里 } -\alpha > 0, \text{ 有 } -\alpha \text{ 項}. \end{cases}$$

于是，S1—S4 是熟知的 $\mathfrak{R}$ 里倍数律.

我們也知道，带恆等元素的任意环 $\mathfrak{o}$ 可看作一个 $\mathfrak{o}$-模，这时取 $\mathfrak{o}$ 的加法羣为羣的部分 $\mathfrak{R}$，并定义 $ax(a \in \mathfrak{o}, x \in \mathfrak{R})$ 为环的积. 性質 S1—S4 是乘法的結合律、分配律及恆等元素律的直接結果.

如向量空間情形一样，如果模 $\mathfrak{R}$ 的子集合 $\mathfrak{S}$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子羣，关于以 $\mathfrak{o}$ 的随意元素所作的乘法是封閉的，則 $\mathfrak{S}$ 决定一个子模. 今令 $S = (x_\alpha)$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个随意子集合，并令 $[S]$ 表示如

$$\xi_1 x_{\alpha_1} + \xi_2 x_{\alpha_2} + \cdots + \xi_m x_{\alpha_m} \tag{2}$$

形式的和的全体，这里 ξ_i 是 $\mathfrak{o}$ 里的随意元素，而 x_{α_i} 是 S 里的随意元素. 我們断定 $[S]$ 是一个子模. 显然 $[S]$ 在加法下及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作乘法下是封閉的. 我們也易知(习題 2 的第 1 題)：$0x = 0$ 及 $(-\xi)x = -\xi x$ 在任意模里成立，且可推得 $[S]$ 含有 0 及 $[S]$ 里任意元素的負元素. 故 $[S]$ 是 $\mathfrak{R}$ 的一个子模. 我們还知道，$[S]$

---

1) 这个定义与通常的定义稍有出入的地方是在于：通常定义內 $\mathfrak{o}$ 不必带恆等元素，而只假定适合 S1—S3. 由于本书只着重带有恆等元素的环，所以这里作这样的改变. 右 $\mathfrak{o}$-模显然可由以 S'1—S'4 代替 S1—S4 而得.

含有 S 的元素 $x_\alpha = 1x_\alpha$，并且 $\mathfrak{R}$ 里含有 S 的每个子模都含有 $[S]$。由于这些性質，我們說：$[S]$ 是由集合 S 生成的子模。

如果 $[S] = \mathfrak{R}$，則集合 S 叫做 $\mathfrak{R}$ 的一个生成元素集合。如果对于某个有限集合 $S = (e_1, e_2, \cdots, e_n)$，$\mathfrak{R} = [e_1, e_2, \cdots, e_n]$，則說 $\mathfrak{R}$ 是有限生成的模。如果有一个生成元素集合 S 存在，使每个 x 有一个而且只有一个方法写成形状 $\sum \xi_i e_{\alpha_i}$，$(e_{\alpha_i} \in S)$，則 $\mathfrak{R}$ 叫做一个自由模，而集合 S 叫做一个基。因此，条件 F 說明：一个有限維向量空間是带有有限基的一个自由 Δ-模。

对于任意的 n，容易作出带有 n 个基元素的一个自由 $\mathfrak{o}$-模；它的作法与 $\Delta^{(n)}$ 的作法相同。令 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 表示 n 維组 $(\xi_1, \xi_2, \cdots, \xi_n)$ 的全部，这里 $\xi_i \in \mathfrak{o}$。加法及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作的乘法都与前面的定义相同。如果 e_i 用(1)来定义，則也象 $\Delta^{(n)}$ 的情形，可以看到这些元素是 $\mathfrak{o}^{(n)}$ 的一个基。

今就 $\mathfrak{o}$-模叙述等价的基本概念。令 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是对于同一个环 $\mathfrak{o}$ 定义的两个 $\mathfrak{o}$-模。如果有 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的一个 1—1 对应 $x \to \bar{x}$ 存在，使

$$\overline{x+y} = \bar{x} + \bar{y}, \quad \overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}, \tag{3}$$

則說 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是 $\mathfrak{o}$-同构的，或仅說等价的。因此，$x \to \bar{x}$ 是羣 $\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 間一个同构，对于所有 α 与 x 适合 $\overline{\alpha x} = \alpha \bar{x}$。这样一个映照叫做一个 $\mathfrak{o}$-同构或等价。

如果 $x = \sum \alpha_i e_i$，則由(3)得

$$\bar{x} = \overline{\sum \alpha_i e_i} = \sum \overline{\alpha_i e_i} = \sum \alpha_i \bar{e}_i.$$

所以，如果元素 e_i 是 $\mathfrak{R}$ 的生成元素，則对应元素 $\bar{e}_i$ 是 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的生成元素。如果 $\sum \alpha_i \bar{e}_i = \sum \beta_i \bar{e}_i$，則 $\sum \alpha_i e_i = \sum \beta_i e_i$。由此可見，如果 $\mathfrak{R}$ 是带有基 e_i 的一个自由模，則 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是带有基 $\bar{e}_i$ 的自由模。这些論述解释了等价模有相同性質的一般原理，故在討論中毋須加以区别。

今設 $\mathfrak{R}$ 及 $\bar{\mathfrak{R}}$ 是两个自由 $\mathfrak{o}$-模，并設这两个模的基元素都有 n 个。令 $\mathfrak{R}$ 的基是 $e_1, e_2, \cdots, e_n$，而 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的基是 $\bar{e}_1, \bar{e}_2, \cdots, \bar{e}_n$。如果 x 是 $\mathfrak{R}$ 的任意元素，写出 $x = \sum \xi_i e_i$，并把它与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 的元素 $\bar{x} =$

$\sum\xi_i\bar{e}_i$ 对应起来. 因为 e_i 及 $\bar{e}_i$ 都是基，所以这个对应是 $\mathfrak{R}$ 到 $\bar{\mathfrak{R}}$ 上的 1—1 对应. 此外，如果 $y=\sum\eta_i e_i$，则 $\bar{y}=\sum\eta_i\bar{e}_i$；由于 $x+y=\sum(\xi_i+\eta_i)e_i$，故

$$\overline{x+y}=\sum(\xi_i+\eta_i)\bar{e}_i=\sum\xi_i\bar{e}_i+\sum\eta_i\bar{e}_i=\bar{x}+\bar{y}.$$

还有

$$\overline{\alpha x}=\sum(\alpha\xi_i)\bar{e}_i=\alpha\sum\xi_i\bar{e}_i=\alpha\bar{x}.$$

所以，$\mathfrak{R}$ 与 $\bar{\mathfrak{R}}$ 等价. 这証明了下面的定理.

定理 1. 有 n 个基元素的任意两个自由 $\mathfrak{o}$–模是等价的.

特别是，我們知道，有 n 个基元素的任意有限維向量空間等价于 n 維组的空間 $\Delta^{(n)}$. 这証明了前面的断言：有限維向量空間的研究与具体代数系 $\Delta^{(n)}$ 的研究是等价的[1].

習 題 2

1. 証明下列关于任意 $\mathfrak{o}$–模的法則： 1) $\alpha 0=0$, 2) $\alpha(-x)=-\alpha x$, 3) $0x=0$, 4) $(-\alpha)x=-\alpha x$.

2. 証明：如果 $\mathfrak{o}$–模的任意子集合关于加法及用 $\mathfrak{o}$ 的元素作的乘法封閉，則这个子集合是一个子模.

3. 証明：如果 $\mathfrak{R}$ 是一个向量空間，則 $\alpha x=0$ 必須 $\alpha=0$ 或 $x=0$.

4. 綫性相关 从現在起，除非另作声明外，$\mathfrak{R}$ 总是表示带有基 $e_1, e_2, \cdots, e_n$ 的 Δ 上一个有限維向量空間. 我們易知，$\mathfrak{R}$ 的基不是唯一决定的. 例如，$e_1+e_2, e_2, e_3, \cdots, e_n$ 是另一个基，并且如果 $\alpha\neq 0$，則 $\alpha e_1, e_2, \cdots, e_n$ 也是一个基. 下一节我們要証的一个基本定理是：任意一个基里向量的个数都相同. 所以个数 n 是不变的，我們叫它做 Δ 上 $\mathfrak{R}$ 的**維数**. 为着給这个定理的証明作出必要的准备，今来討論向量的綫性相关这一个基本概念.

如果 S 是向量的一个集合，而向量 $x\in[S]$，我們說 x 是**綫性依賴**于 S. 这等价于說：Δ 里有适宜的 ξ_i 与 S 里有适宜的 x_i 使 $x=\sum_{1}^{m}\xi_i x_i$. 这証明了下列綫性相关的显著性质中的第一个：

1) 如果 x 是綫性依賴于 S，則 x 是对于 S 的一个有限子集合綫性

1) 模論的較完备敍述，見本书第一卷的第六章. 但这里的討論适合于当前的目的.