



高等学校
电子信息类

规划教材

· 九五电子部重点教材 ·

现代数字信号处理

姚天任 孙洪

华中理工大学出版社

112

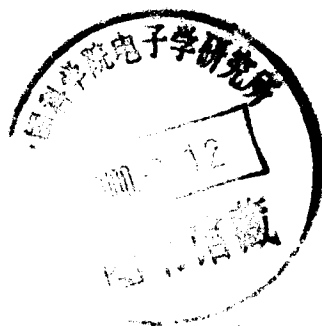
0

73.412
11-0

高等学校
电子信息类 规划教材·九五电子部重点教材

现代数字信号处理

姚天任 孙 洪



华中理工大学出版社
中国·武汉

2001104

图书在版编目(CIP)数据

现代数字信号处理/姚天任 孙 洪
武汉:华中理工大学出版社, 1999年11月
ISBN 7-5609-2087-X

- I. 现…
I. ①姚… ②孙…
Ⅲ. 数字信号处理-高等学校-教材
IV. TN911.72

现代数字信号处理

姚天任 孙 洪

责任编辑:周 筠

封面设计:刘 卉

责任校对:张 欣

监 印:熊庆瑜

出版发行:华中理工大学出版社

武昌喻家山 邮编:430074 电话:(027)87542624

经销:新华书店湖北发行所

录排:华中理工大学出版社照排室

印刷:华中理工大学出版社印刷厂

开本:787×1092 1/16

印张:28.25

字数:650 000

版次:1999年11月第1版

印次:1999年11月第1次印刷

印数:1—2 000

ISBN 7-5609-2087-X/TN·53

定价:32.00元

(本书若有印装质量问题,请向出版社发行科调换)

9028/4

内 容 提 要

本书全面、系统、深入地讨论了现代数字信号处理的理论、设计和应用。全书由自成体系而又有联系的八章组成,分别论及统计信号处理基础,维纳和卡尔曼滤波器,自适应滤波器,现代功率谱估计,同态信号处理,高阶谱估计,小波分析,以及人工神经网络信号处理。

本书适合于信息与通信工程学科各专业及相近专业的研究生和专业人员用作教材或参考书。

Abstract

This book discusses comprehensively, systematically and deeply the theory, design and applications of advanced digital signal processing. It consists of eight self-contained but related chapters dealing, respectively, with the background of statistical signal processing, Weiner and Kalman filters, adaptive filters, modern power spectral estimation, homomorphic signal processing, high-order spectral estimation, wavelet analysis, and artificial neural network signal processing.

This book is intended to serve both graduate students, and various forms of experts in the field of information and communication engineering.

出版说明

为做好全国电子信息类专业“九五”教材的规划和出版工作,根据国家教委《关于“九五”期间普通高等教育教材建设与改革的意见》和《普通高等教育“九五”国家级重点教材立项、管理办法》,我们组织各有关高等学校、中等专业学校、出版社,各专业教学指导委员会,在总结前四轮规划教材编审、出版工作的基础上,根据当代电子信息科学技术的发展和面向 21 世纪教学内容和课程体系改革的要求,编制了《1996~2000 年全国电子信息类专业教材编审出版规划》。

本轮规划教材是由个人申报,经各学校、出版社推荐,由各专业教学指导委员会评选,并由我部教材办商各专指委、出版社后,审核确定的。本轮规划教材的编制,注意了将教学改革力度较大、有创新精神、特色风格的教材和质量较高、教学适用性较好、需要修订的教材以及教学急需,尚无正式教材的选题优先列入规划。在重点规划本科、专科和中专教材的同时,选择了一批对学科发展具有重要意义,反映学科前沿的选修课、研究生课教材列入规划,以适应高层次专门人才培养的需要。

限于我们的水平和经验,这批教材的编审、出版工作还可能存在不少缺点和不足,希望使用教材的学校、教师、同学和广大读者积极提出批评和建议,以不断提高教材的编写、出版质量,共同为电子信息类专业教材建设服务。

原电子工业部教材办公室

前 言

本教材系按原电子工业部(现信息产业部)的《1996~2000年全国电子信息类专业教材编审出版规划》,由全国通信工程专业教学指导委员会编审、推荐出版。本教材由华中理工大学姚天任教授担任主编,主审赵荣椿教授,责任编委阮秋琦教授。

本教材的参考学时数为54学时。教材的主要内容有:维纳滤波器和卡尔曼滤波器的原理和计算,自适应滤波器的理论、设计和应用,功率谱现代估计方法的基本理论和各种算法,同态信号处理技术及其应用,高阶谱分析理论和技术基础,小波变换的理论、方法和应用,人工神经网络的理论、方法和应用。为加深对基本概念和基本理论的理解,加强对基本方法和基本技能的掌握,本书第一章对现代信号处理理论及其数学基础进行了扼要的复习,又在各章末安排了相当数量的复习思考题和较多的习题。书中某些重要的数学推导过程和工程实用计算机程序,在书末附录中给出。各章末列有重要参考文献,供读者进一步深入学习时参考。书中的重要名词术语的中英文索引也附在书末。

数字信号处理是一门理论和技术发展十分迅速、应用非常广泛的前沿交叉性学科。因此,在使用本教材时,要特别注意对基本概念、基本理论、基本方法和基本技能的掌握,在此基础上努力把理论和实际应用很好地结合起来,不断跟踪本学科和本应用领域的新发展。这样,才有可能在自己的工作中争取做出创造性的成果。

本教材第一章至第五章以及第七章由姚天任执笔,第六章和第八章由孙洪执笔编写。书末附录中的计算机程序,由车忠志、向阳松、郭士奎、徐强、苏勇、江涛、王有伦、胡建兵等硕士和田金文博士编写,并在计算机上调试通过。博士生李中捷和卢燕青硕士参加了书中插图的绘制。湖北省电信局廖仁斌副局长、湖北省数据局杨文鹏局长对本书的编著给予了关心和支持。作者的历届研究生都为本书提出过许多宝贵意见。借此机会谨向以上同志表示诚挚的感谢。

由于编著者水平有限,书中难免还存在一些缺点和错误,殷切希望广大读者批评指正。

编 者

1999年6月于武汉

目 录

第一章 基础知识	(1)
1.1 随机矢量	(1)
1.2 相关抵消	(2)
1.3 Gram-Schmidt 正交化	(3)
1.3.1 基本定义	(4)
1.3.2 正交投影定理和 Gram-Schmidt 正交化	(5)
1.3.3 新息	(7)
1.4 偏相关系数(PARCOR 系数)	(7)
1.5 功率谱和周期图	(9)
1.6 谱分解	(10)
1.6.1 最小相位序列	(10)
1.6.2 部分能量和最小时延	(11)
1.6.3 自相关函数的不变性	(11)
1.6.4 最小时延性质	(12)
1.6.5 最小相位性质	(12)
1.6.6 谱分解定理	(13)
1.7 信号的参数模型	(15)
习题	(17)
参考文献	(18)
第二章 维纳滤波和卡尔曼滤波	(19)
2.1 维纳滤波的标准方程	(19)
2.2 维纳-霍夫方程的求解	(21)
2.2.1 FIR 维纳滤波器	(21)
2.2.2 非因果 IIR 维纳滤波器	(21)
2.2.3 因果 IIR 维纳滤波器	(22)
2.3 维纳滤波的均方误差	(23)
2.4 因果 IIR 维纳滤波器的设计与计算	(25)
2.5 标量卡尔曼滤波器	(27)
2.6 矢量卡尔曼滤波器	(31)
2.6.1 信号向量和数据向量	(31)

2.6.2 矢量卡尔曼滤波器的递推计算公式	(32)
2.7 维纳滤波和卡尔曼滤波的计算和应用举例	(32)
2.7.1 维纳滤波器	(32)
2.7.2 卡尔曼滤波器	(36)
复习思考题	(41)
习题	(42)
参考文献	(44)
第三章 自适应滤波器	(45)
3.1 自适应滤波原理	(45)
3.2 自适应线性组合器	(47)
3.3 均方误差性能曲面	(48)
3.4 二次性能曲面的基本性质	(50)
3.5 最陡下降法	(52)
3.6 学习曲线和收敛速度	(54)
3.7 自适应的最小均方(LMS)算法	(56)
3.8 权矢量噪声	(58)
3.9 失调量	(59)
3.10 自适应的递归最小二乘方(RLS)算法	(61)
3.11 IIR 递推结构自适应滤波器的 LMS 算法	(64)
3.12 自适应滤波器计算举例	(66)
3.13 自适应滤波器的数字实现	(71)
3.13.1 LMS 算法自适应滤波器的直接实现	(71)
3.13.2 分布运算自适应滤波器	(73)
3.13.3 余数制自适应滤波器	(76)
3.14 最小二乘自适应滤波器	(76)
3.14.1 最小二乘滤波器的矢量空间分析	(77)
3.14.2 投影矩阵和正交投影矩阵	(79)
3.14.3 时间更新	(81)
3.15 最小二乘格形(LSL)自适应算法	(84)
3.15.1 前向预测和后向预测	(84)
3.15.2 预测误差滤波器的格形结构	(86)
3.15.3 LSL 自适应算法	(88)
3.15.4 LSL 自适应算法的性能	(91)
3.16 快速横向滤波(FTF)自适应算法	(93)
3.16.1 FTF 算法涉及到的 4 个横向滤波器	(93)
3.16.2 横向滤波算子的时间更新	(97)
3.16.3 FTF 自适应算法中的时间更新关系	(99)
3.16.4 FTF 自适应算法流程	(104)

3.16.5	FTF 自适应算法的性能	(107)
3.16.6	FTF 算法计算量的进一步减少	(107)
3.17	自适应滤波器的应用	(111)
3.17.1	自适应系统模拟和辨识	(111)
3.17.2	自适应逆滤波	(113)
3.17.3	自适应干扰抵消	(114)
3.17.4	自适应预测	(115)
复习思考题	(116)
习题	(118)
参考文献	(120)
第四章	功率谱估计的现代方法	(121)
4.1	从经典谱估计到现代谱估计	(121)
4.2	谱估计的参数模型方法	(123)
4.3	AR 模型的 Yule-Walker 方程	(125)
4.4	Levinson-Durbin 算法	(126)
4.5	AR 模型的稳定性及其阶的确定	(129)
4.6	AR 谱估计的性质	(132)
4.6.1	AR 谱估计隐含着自相关函数的外推	(132)
4.6.2	AR 谱估计与最大熵谱估计等效	(133)
4.6.3	AR 谱估计与线性预测谱估计等效	(134)
4.6.4	AR 谱估计等效于最佳白化处理	(135)
4.6.5	AR 谱估计的界	(136)
4.7	格形滤波器	(137)
4.8	AR 模型参数提取方法	(139)
4.8.1	Yule-Walker 法	(139)
4.8.2	协方差法	(140)
4.8.3	Burg 法	(141)
4.9	AR 谱估计的异常现象及其补救措施	(144)
4.9.1	虚假谱峰	(144)
4.9.2	谱线分裂	(144)
4.9.3	噪声对 AR 谱估计的影响	(145)
4.10	MA 和 ARMA 模型谱估计	(148)
4.10.1	MA 模型谱估计	(148)
4.10.2	ARMA 模型谱估计	(149)
4.11	白噪声中正弦波频率的估计	(151)
4.11.1	最大似然法	(151)
4.11.2	修正协方差 AR 谱估计方法	(153)
4.11.3	特征分解频率估计	(155)

4.11.4 信号子空间频率估计	(157)
4.11.5 噪声子空间频率估计	(159)
复习思考题	(162)
习题	(162)
参考文献	(165)
第五章 同态信号处理	(166)
5.1 广义叠加原理	(166)
5.2 乘法同态系统	(167)
5.3 卷积同态系统	(169)
5.4 复倒谱定义	(171)
5.4.1 复对数的多值性问题	(172)
5.4.2 $\hat{X}(z)$ 的解析性问题	(172)
5.5 复倒谱的性质	(172)
5.6 复倒谱的计算方法	(173)
5.6.1 按复倒谱定义计算	(174)
5.6.2 最小相位序列的复倒谱的计算	(176)
5.6.3 复对数求导数算法	(178)
5.6.4 递推计算方法	(180)
复习思考题	(181)
习题	(181)
参考文献	(183)
第六章 高阶谱分析	(184)
6.1 三阶相关和双谱的定义及其性质	(184)
6.2 累量和多谱的定义及其性质	(187)
6.2.1 随机变量的累量	(187)
6.2.2 随机过程的累量	(189)
6.2.3 多谱的定义	(190)
6.2.4 累量和多谱的性质	(190)
6.3 累量和多谱估计	(194)
6.4 基于高阶谱的相位谱估计	(195)
6.5 基于高阶谱的模型参数估计	(197)
6.5.1 AR 模型参数估计	(197)
6.5.2 MA 模型参数估计	(199)
6.5.3 ARMA 模型参数估计	(201)
6.6 利用高阶谱确定模型的阶	(202)
6.7 多谱的应用	(204)
复习思考题	(206)

习题	(207)
参考文献	(208)
第七章 小波分析	(209)
7.1 窗口傅里叶变换——时频定位概念	(209)
7.2 连续小波变换	(212)
7.3 连续小波变换的逆变换公式	(214)
7.4 尺度和时移参数的离散化	(217)
7.5 小波框架	(220)
7.5.1 框架的一般概念	(221)
7.5.2 小波框架的必要条件和充分条件	(226)
7.5.3 小波框架的对偶	(227)
7.6 标准正交小波基	(230)
7.7 多分辨率分析	(232)
7.7.1 多分辨率分析的基本思想	(233)
7.7.2 多分辨率分析的定义	(236)
7.8 标准正交小波基的构造	(237)
7.8.1 信号空间 $L^2(R)$ 的分解	(237)
7.8.2 尺度函数	(239)
7.8.3 正交小波基的构造	(241)
7.9 标准正交小波基举例	(244)
7.10 计算小波级数系数的塔式算法——Mallat 算法	(251)
7.11 离散小波变换的快速算法	(256)
7.11.1 离散时间小波	(256)
7.11.2 À Trous 算法	(258)
7.11.3 Mallat 算法	(260)
7.12 离散时间信号多分辨率分析理论	(263)
7.12.1 离散时间尺度	(263)
7.12.2 离散时间分辨率	(266)
7.12.3 多分辨率逼近的细节信号	(267)
7.12.4 塔式变换	(268)
7.12.5 离散小波变换	(269)
7.12.6 时间多分辨率分析	(271)
7.12.7 计算 DWT 的双通道滤波器的设计	(271)
7.12.8 小波的双正交性和正交性	(274)
7.13 正交小波包	(275)
7.14 小波分析在信号处理中的应用	(282)
7.14.1 图像信号的小波变换	(282)
7.14.2 声音信号的听觉表示	(285)

复习思考题	(293)
习题	(295)
参考文献	(297)

第八章 神经网络信号处理

8.1 神经网络模型	(299)
8.1.1 生物神经元及其模型	(299)
8.1.2 人工神经网络模型	(303)
8.1.3 神经网络的学习方式	(308)
8.2 多层前向网络及其学习算法	(309)
8.2.1 单层前向网络的分类能力	(309)
8.2.2 多层前向网络的非线性映射能力	(310)
8.2.3 权值计算——矢量外积算法	(311)
8.2.4 有导师学习法——误差修正法	(313)
8.3 反馈网络及其能量函数	(319)
8.3.1 非线性动态系统的稳定性	(320)
8.3.2 离散型 Hopfield 单层反馈网络	(321)
8.3.3 连续型 Hopfield 单层反馈网络	(325)
8.3.4 随机型和复合型反馈网络	(329)
8.4 自组织神经网络	(332)
8.4.1 自组织聚类	(333)
8.4.2 自组织特征映射	(337)
8.4.3 自组织主元分析	(342)
8.5 神经网络在信号处理中的应用	(344)

复习思考题	(346)
习题	(347)
参考文献	(351)

第四章附录

附录 4.1 关于现代谱估计程序的说明	(352)
附录 4.2 GLOBAL	(355)
附录 4.3 CORRELATION	(357)
附录 4.4 PREFFT	(358)
附录 4.5 FFT	(359)
附录 4.6 LEVINSON	(361)
附录 4.7 YULEWALK	(363)
附录 4.8 COVAR	(364)
附录 4.9 BURG	(368)
附录 4.10 MODCOVAR	(370)

附录 4.11	MA	(374)
附录 4.12	ARMA	(375)
附录 4.13	CSVD	(377)
附录 4.14	MUSIC	(385)
第六章附录	(387)
附录 6.1	累量与矩的关系	(387)
附录 6.2	随机信号通过线性系统后的累量	(388)
附录 6.3	奇异值分解	(388)
第七章附录	(389)
附录 7.1	式(7.23)的证明	(389)
附录 7.2	式(7.79)的证明	(389)
附录 7.3	式(7.83)的证明	(391)
附录 7.4	一维离散小波变换及其逆变换程序	(391)
附录 7.5	二维离散小波变换及其逆变换程序	(401)
附录 7.6	二维离散正交小波变换及其逆变换程序	(412)
第八章附录	(423)
附录 8.1	离散型误差修正学习算法的收敛性	(423)
附录 8.2	离散型单元的学习算法	(423)
附录 8.3	S型单元的LMS算法	(424)
附录 8.4	多层前向网络的BP学习算法	(424)
附录 8.5	多层前向网络的模拟退火算法	(425)
部分习题参考答案	(426)
索引	(434)

第一章 基础知识

本章的主要目的是复习本书以下各章将要用到的有关随机过程和估计理论的部分内容,并起着统一全书中相关内容的符号的作用。将离散随机信号表示成矢量,可使许多分析和数学表示得到简化。相关抵消的讨论可引出最佳线性估计的概念,而后者是维纳滤波和卡尔曼滤波的基础。从数学角度来看,最佳线性估计问题本质上是矢量空间中的正交投影问题。新息和偏相关系数是最佳线性估计理论中的两个重要概念。随机信号在频域中的特性可用其功率谱来描述,周期图是功率谱估计的一种经典方法。有理功率谱分解定理在 IIR 维纳滤波器设计和正弦信号频率估计中有着重要应用。平稳随机信号参数模型在本书以后各章中会经常用到。对上述内容本章均作了扼要介绍。

1.1 随机矢量

离散随机信号或过程,是指由随机变量按一定顺序排列而成的时间序列。为方便推导与运算有时可将其看作是随机矢量。即离散随机信号可表示为

$$\mathbf{x} = [x_0 \quad x_1 \quad \cdots \quad x_n \quad \cdots]^T \quad (1.1)$$

它可以是有限维的也可以是无量维的。

若随机信号 x_n 的均值 $E[x_n] \neq 0$, 可将其移去, 即重新定义一个零均值随机信号 $x_n - E[x_n]$ 。本书今后将只讨论零均值随机信号。

最简单的随机信号是零阶马尔柯夫信号或纯随机信号, 它的所有随机变量是互相独立的, 且有共同的密度函数 $p(x)$, 因此, 有

$$p(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots) = p(x_0)p(x_1)\cdots p(x_n)\cdots \quad (1.2)$$

$$R_{xx}(n, m) = E[x_n x_m] = 0, n \neq m$$

式中, $p(x_0, x_1, \cdots, x_n, \cdots)$ 是联合概率密度函数, $R_{xx}(n, m)$ 是 x_n 和 x_m 的相关函数。这种随机信号是平稳的, 其自相关函数与时间起点无关, 且各随机变量的方差相同, 即

$$E[x_n^2] = R_{xx}(0) = \sigma_x^2 \quad (1.3)$$

这样, 纯随机信号的自相关函数可表示为

$$R_{xx}(k) = E[x_{n+k} x_n] = \sigma_x^2 \delta(k) \quad (1.4)$$

这里 $\delta(k)$ 是单位取样序列。

纯随机信号无记忆, 因为

$$p(x_n, x_{n-1}) = p(x_n)p(x_{n-1})$$

或

$$p(x_n/x_{n-1}) = p(x_n) \quad (1.5)$$

这意味着, x_{n-1} 的发生不影响 x_n 的数值。由于一个随机过程中相继的随机变量的取值完全是随机的, 因此, 这种信号的特点是随着时间有或快或慢的变化。这样, 它就含有从低到高的几乎所有频率成分, 而且各种频率的含有比例相同。显然, 这种信号就是白噪声。

一阶马尔柯夫信号稍微复杂一些, 它的记忆能力能持续一个取样时间间隔, 即

$$p(x_n/x_{n-1}, x_{n-2}, \dots, x_1, x_0) = p(x_n/x_{n-1}) \quad (1.6)$$

这就是说, x_n 只受前一个取样值 x_{n-1} 的影响。一阶马尔柯夫信号的完全统计描述很简单, 只需知道边界密度函数 $p(x_n)$ 和条件密度函数 $p(x_n/x_{n-1})$ 就足够了。任何其它联合概率密度函数都可由此计算出来。

一个 N 维随机矢量 x 含有 N 个分量, 这些分量均为随机变量, 即

$$x = [x_1, x_2, \dots, x_N]^T \quad (1.7)$$

各分量之间可以有相关性, 也可以没有。为了完全统计描述一个 N 维随机矢量, 需要知道联合概率密度函数

$$p(x) = p(x_1, x_2, \dots, x_N) \quad (1.8)$$

N 维随机矢量 x 的均值是一个 N 维矢量

$$m = E[x] \quad (1.9)$$

x 的自相关函数是一个 N 阶正半定对称矩阵

$$R_{xx} = E[xx^T] \quad (1.10)$$

x 的自协方差函数也是一个 N 阶正半定对称矩阵

$$\Sigma_{xx} = E[(x - m)(x - m)^T] \quad (1.11)$$

以上各式中的期望运算都是用联合概率密度函数来定义的, 例如

$$E[x] = \int x p(x) d^N x \quad (1.12)$$

式中, $p(x)$ 是由式(1.8)所定义的联合概率密度函数; 而 $d^N x = dx_1 dx_2 \dots dx_N$; 以上各式中的上标 T 表示矩阵转置。

自相关矩阵和自协方差矩阵之间有下列关系

$$\Sigma_{xx} = R_{xx} - mm^T \quad (1.13)$$

在均值为零的情况下, Σ_{xx} 与 R_{xx} 相等。

1.2 相关抵消

设 x 和 y 分别是 N 维和 M 维零均值随机矢量, 且彼此相关, 即有

$$R_{xy} = E[xy^T] \neq 0 \quad (1.14)$$

现对 y 进行线性变换, 得

$$\hat{x} = Hy \quad (1.15)$$

式中, H 是 $N \times M$ 变换矩阵。适当选择 H , 使随机矢量

$$e = x - \hat{x} = x - Hy \quad (1.16)$$

与 y 不相关,即

$$R_{xy} = E[ey^T] = 0 \quad (1.17)$$

将式(1.16)代入式(1.17),得

$$R_{xy} = E[xy^T] - HE[yy^T] = R_{xy} - HR_{yy} = 0$$

由此求得

$$H = R_{xy}R_{yy}^{-1} = E[xy^T]E[yy^T]^{-1} \quad (1.18)$$

这就是说,若按式(1.18)选择线性变换矩阵 H ,则 x 中与 y 相关的部分即 $\hat{x} = Hy$ 将被消除。图 1.1 说明了这一处理过程,并称之为相关抵消器。它具有以下三个功能:

(1)最佳线性估计。设 $x = x_1 + x_2$, x_1 与 y 相关, x_2 与 y 不相关。 y 经线性变换后得到 x_1 的线性估计 $\hat{x} = Hy$, 估计误差为 $e_1 = x_1 - \hat{x} = x_1 - Hy$ 。在均方误差最小的意义上,这种估计是最佳的,即 H 的选择准则是使估计误差的均方值最小,表示为

$$R_{e_1 e_1} = E[e_1 e_1^T] = \min \quad (1.19)$$

$R_{e_1 e_1}$ 对 H 求导数,并令其等于零,即可解出最佳线性估计所要求的 H 值

$$H_{opt} = R_{xy}R_{yy}^{-1} \quad (1.20)$$

这里 H 的下标 opt 表示“最佳”。该式与式(1.18)等效。

(2)相关抵消。图 1.1 中的输出 $e = x - \hat{x} = x_2 + (x_1 - \hat{x})$ 是 x_2 与估计误差 $(x_1 - \hat{x})$ 之和。 x 中与 y 相关的部分,即 x_1 已被抵消,若 H 是最佳估计,则抵消后的剩余部分即 $x_1 - \hat{x}$ 具有最小均方值。

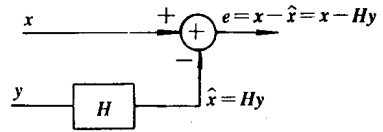


图 1.1 相关抵消器原理图

(3)最佳信号分离。由于 \hat{x} 是 x_1 的最佳估计,即 $\hat{x} \approx x_1$, 故有 $e \approx x_2$ 。这样,相关抵消器的两个输出分别是 x_1 和 x_2 的近似值,具有分离 x 中两部分的效果。

在许多实际应用中,线性变换矩阵 H 常表示一种线性滤波运算,矢量 x 和 y 是信号取样序列。由式(1.18)可看出,为了设计 H ,需要知道 R_{xy} 和 R_{yy} 。这常有两种情况。一种情况是已知 x 和 y ,要求消除它们之间的相关性。若用时间平均代替集合平均或采用自适应技术,即可利用 x 和 y 的数据来估计 R_{xy} 和 R_{yy} 。这种情况的典型应用有噪声抵消、回波抵消、信道均衡、天线旁瓣抵消等。另一种情况是只知道 y ,并不知道 x ,需要根据 y 来估计 x 。为此,必须首先建立一个模型来描述 y 与 x 之间的关系,然后据此模型计算 R_{xy} 和 R_{yy} 。这种情况的典型应用是卡尔曼滤波器。以上两种情况都将在本书后续章节中详细讨论。

1.3 Gram-Schmidt 正交化

从上一节得知,任一随机矢量 x 相对于另一一矢量 y 可分解为两部分,即 $x = \hat{x} + e$,其中 \hat{x} 与 y 相关,即 $\hat{x} = Hy$, e 与 y 不相关,即 $R_{ey} = 0$ 。这两部分之间的相关函数为

$$R_{e\hat{x}} = E[e\hat{x}^T] = E[ey^T H^T] = R_{ey} H^T = 0 \quad (1.21)$$

因而 e 与 \hat{x} 是不相关的。

本节将要进一步在几何上作出解释,说明它们不仅不相关,而且还互相正交。几何解释有

两方面意义:第一,为推导和理解信号估计问题提供了一种简单和直观的方法;第二,通过 Gram-Schmidt 正交化方法,为建立信号模型奠定了基础,信号模型在语音处理、数据压缩和现代谱估计中有着广泛应用。

1.3.1 基本定义

设 x 和 y 分别是 N 维和 M 维随机矢量

$$\begin{aligned} x &= [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_N] \\ y &= [y_1 \ y_2 \ \cdots \ y_M] \end{aligned}$$

所要讨论的随机变量空间是下列随机变量集合生成的 $N+M$ 维线性矢量空间

$$\{x_1, x_2, \dots, x_N, y_1, y_2, \dots, y_M\}$$

设 u 和 v 是该线性空间中的任意两个矢量,并定义它们的内积为

$$\langle u, v \rangle = E(u^T v) \quad (1.22)$$

则该线性空间是一个内积空间。内积空间中两矢量 u 和 v 间的距离用内积定义为

$$|u - v| = \sqrt{\langle u - v, u - v \rangle} = \sqrt{E[(u - v)(u - v)^T]} \quad (1.23)$$

非零矢量 u 和 v 间的夹角 θ 的余弦定义为

$$\cos\theta = \frac{\langle u, v \rangle}{|u| |v|} \quad (1.24)$$

若 $\langle u, v \rangle = 0$, 则 $\cos\theta = 0$, 这时 u 和 v 称做正交, 记为 $u \perp v$ 。

在内积空间中, 一组线性无关的矢量不一定两两正交, 但是一组两两正交的非零矢量则一定是线性无关的。设有 M 个两两正交的随机矢量 $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M$, 它们满足下式

$$\langle \epsilon_i, \epsilon_j \rangle = 0, \quad i \neq j \quad (1.25)$$

令 $Y = \{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_M\}$ 是由随机矢量张成的线性子空间, 那么可将其作为该内积空间的正交基底。

根据正交分解定理, 任何随机变量 x , 关于线性子空间 Y , 可唯一分解为两互相正交的部分, 一部分位于 Y 内(与 Y 平行), 另一部分与 Y 垂直, 即

$$x = \hat{x} + e, \quad \hat{x} \in Y, e \perp Y \quad (1.26)$$

分量 \hat{x} 称为 x 在 Y 上的正交投影。图 1.2 举例说明了正交分解定理的几何意义, 这里假设子空间 Y 是二维空间(平面), 随机变量 x 和它的两个分量 \hat{x} 和 e 都用矢量表示。在式(1.26)中, 正交条件 $e \perp Y$ 意味着 e 与 Y 中每个矢量正交, 当然也与 Y 的每个基底矢量 ϵ_i 正交, 即有

$$\langle e, \epsilon_i \rangle = E[e \epsilon_i] = 0 \quad (1.27)$$

该式称为正交方程。

\hat{x} 位于 Y 内, 因此, 可用正交基底的线性组合来表示:

$$\hat{x} = \sum_{i=1}^M a_i \epsilon_i \quad (1.28)$$

式中的系数 a_i 可根据正交方程确定。因为

$$\langle x, \epsilon_i \rangle = \langle \hat{x} + e, \epsilon_i \rangle = \langle \hat{x}, \epsilon_i \rangle + \langle e, \epsilon_i \rangle$$

利用正交方程, 上式简化为

$$\langle x, \epsilon_i \rangle = \langle \hat{x}, \epsilon_i \rangle$$

将式(1.28)代入上式, 得