

微積分題庫

再版

美國教育協會 著
藍建群 譯

微積分題庫

0172-44

曉園出版社
世界圖書出版公司

微積分題庫

再版

美國教育協會 著
藍建群 譯

曉園出版社

世界圖書出版公司

北京·廣州·上海·西安

2054/51

微积分题库 (再版)

美国教育协会 著
蓝建群 译

晓园出版社出版
世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行 各地新华书店经售

*

1995 年 5 月第 一 版 开本: 787×1245 1/20

1995 年 5 月第一次印刷 印张: 45

印数: 0001-600 字数: 360 千字

ISBN: 7-5062-1772-4/O · 123

定价: 49.00 元 (WB9312/7)

世界图书出版公司向台湾晓园出版社购得重印权
限国内发行

目 錄

1. 不等式 (Inequality)	1
2. 絕對值 (Absolute Values)	9
3. 極限 (Limits)	17
4. 連續性 (Continuity)	25
5. 導數 Δ -方法 (Derivative Δ -Method)	29
6. 代數函數微分法 (Differentiation Of Algebraic Functions) ...	41
7. 三角函數微分法 (Differentiation Of Trigonometric Functions)	67
8. 反三角函數微分法 (Differentiation Of Inverse Trigonometric Function 92)	81
9. 指數及對數函數微分法 (Differentiation Of Exponential And Logarithmic Functions 108)	95
10. 雙曲線函數微分法 (Differentiation Of Hyperbolic Functions)	109
11. 隱微分 (Implicit Differentiation)	113
12. 參數方程式 (Parametric Equations)	125
13. 不定式 (Indeterminate Forms)	131
14. 切線與法線 (Tangents And Normals)	161
15. 極大與極小值 (Maximum And Minimum Values)	183
16. 極大與極小應用問題 (Applied Problems In Maxima And Mini- ma)	203
17. 曲線軌跡法 (Curve Tracing)	243
18. 曲率求法 (Curvature)	265
19. 相關變率求法 (Related Rates)	277
20. 微分量求法 (Differentials)	307
21. 偏導數 (Partial Derivatives)	317
22. 全微分、全導數及其應用 (Total Differentials, Total Deriva- tives, And Applied Problems)	339
23. 基本積分法 (Fundamental Integration)	355
24. 三角積分法 (Trigonometric Integrals)	391
25. 部份分式積分法 (Integration By Partial Fractions)	423
26. 三角代入積分法 (Trigonometric Substitutions)	441
27. 部份積分法 (Integration By Parts)	457
28. 瑕積分 (Improper Integrals)	467
29. 弧長求法 (Arc Length)	479

II 目 錄

30. 平面面積求法 (Plane Areas)	489
31. 立體：體積與面積 (Solids: Volumes And Areas).....	519
32. 形心求法 (Centroids).....	551
33. 慣性矩求法 (Moments Of Inertia)	565
34. 二重／迭次積分 (Double / Iterated Integrals).....	577
35. 三重積分 (Triple Integrals)	609
36. 具可變密度之質量求法 (Masses Of Variable Density)	625
37. 級數 (Series)	637
38. 中值定理 (The Law Of The Mean).....	669
39. 直線與曲線運動 (Motion: Rectilinear And Curvilinear).....	675
40. 高等積分法 (Advanced Integration Methods).....	719
41. 初等微分方程 (Basic Differential Equations).....	755
42. 高等微分方程 (Advanced Differential Equations)	777
43. 微分方程之應用問題 (Applied Problems In Differential Equations).....	797
44. 流體壓力及作用力之計算 (Fluid Pressures / Forces).....	851
45. 功與能 (Work / Energy).....	857
46. 電 (Electricity).....	873

第一章 不等式

如果我們寫一方程式： $x = 3$ ，此方程式表示 x 祇能應用至一個值，即 $x = 3$ ，但假使我們寫另一個方程式： $x > 3$ ，則此方程式的 x 不祇應用至一個值，而是一個值域，即在 3 到 $+\infty$ 之間，同樣地，寫一方程式： $x < 3$ ，則 x 範圍在 $-\infty$ 到 3 之間。如果我們用符號： $| |$ ，定義為絕對值符號，使得

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

那麼不等式

$$|x| > 3$$

將涵蓋下列區域

由 $-\infty$ 到 -3 及由 $+3$ 到 ∞

當考慮數值域時常會用到不等式。我們在求解不等式時，所用基本代數運算也與求解一般方程式之代數運算非常接近。

1-1 求解不等式： $-7 - 3x < 5x + 29$ 。

解：先由上式兩邊同減 $5x$ ，

$$-7 - 8x < 29$$

兩邊再同乘 -1 ，則必須改變不等式符號方向，

$$7 + 8x > -29$$

兩邊同減 7，再除以 8，得下列解：

$$x > -\frac{9}{2}$$

因此其解可用一開放區間 $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$ 表示。

1-2 求 $\sqrt{1-2x}$ 之實數解。

解：祇有正實數之平方根方為實數，因此根號內

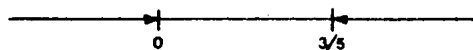
$$1 - 2x \geq 0$$

$$2x \leq 1$$

$$x \leq \frac{1}{2}$$

其解為一半封閉區間 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right]$ ，即由 $-\infty$ 到 $+\frac{1}{2}$ 間區域。

1-3 求解 $\frac{3}{x} < 5$ ($x \neq 0$)。



解：由上式可能馬上想到兩邊同乘以 x ，然而因 $x \neq 0$ ， x 可能是正值，也可能是負值，故須分兩考情況討論。

情況(1)：假設 $x > 0$ ，兩邊同乘以 x 不會改變不等式方向，得

$$3 < 5x$$

$$\text{兩邊同除以 } 5, \text{ 得 } x > \frac{3}{5}$$

換句話說，我們必須找到所有實數能滿足下列兩不等式：

$$x > 0 \text{ 及 } x > \frac{3}{5}$$

既然，任何大於 $\frac{3}{5}$ 的數必為正數，可知其解由開放區間 $\left(\frac{3}{5}, \infty\right)$ 組成。

情況(2)：設 $x < 0$ ，同樣乘以 x 將改變不等式方向，因此

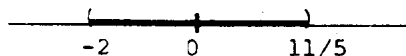
$$3 > 5x$$

即 $\frac{3}{5} > x$ ，故其解必須同時滿足下列兩不等式：

$$x < 0 \text{ 及 } x < \frac{3}{5}$$

能夠滿足上式的解為 $(-\infty, 0)$ 。最後將上兩種情況解合併，求得其解為不包括在區間 $\left(0, \frac{3}{5}\right)$ 內之所有實數。

1-4 求解 $\frac{2x-3}{x+2} < \frac{1}{3}$ ，但 $x \neq -2$ 。



解：仿上例，考慮兩種情況，即 $x+2$ 為正或負：

情況(1)： $x+2 > 0$ ，兩邊同乘 $3(x+2)$ ，得

$$6x - 9 < x + 2$$

兩邊同加 $9 - x$ ，可得 $5x < 11$ ，即 $x < \frac{11}{5}$ 。

但已假設 $x + 2 > 0$ ，即 $x > -2$ ，故 x 值域為 $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$ 。

情況(2)： $x + 2 < 0$ ，兩邊同乘 $3(x + 2)$ ，改變不等式方向後，得

$$6x - 9 > x + 2$$

即 $5x > 11$ ， $x > \frac{11}{5}$ ，但已假設 $x < -2$ ，因無任何實數可同時滿足上

兩式，此為不可能，故本題之解為一開放區間 $\left(-2, \frac{11}{5}\right)$ 。

1-5 求滿足下述不等式之實數解： $(x + 3)(x + 4) > 0$ 。

解：本式必須 $(x + 3)$ 及 $(x + 4)$ 兩因式同號才成立，故分兩種情況討論。

情況(1)： $x + 3 > 0$ 且 $x + 4 > 0$ ，即

$$x > -3 \text{ 且 } x > -4$$

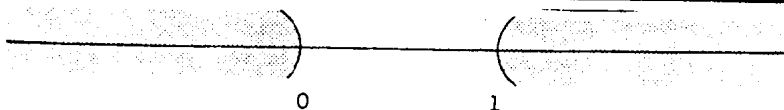
上兩式交集為 $x > -3$ ，其解為 $(-3, +\infty)$ 。

情況(2)： $x + 3 < 0$ 且 $x + 4 < 0$ ，即

$$x < -3 \text{ 且 } x < -4$$

上兩式交集為 $x < -4$ ，其解為 $(-\infty, -4)$ ，因此合併上述兩情況其解為 $(-3, +\infty)$ 及 $(-\infty, -4)$ 之聯集或任何不包括在封閉區間 $[-4, -3]$ 內之實數。

1-6 求解不等式： $x^2 > x$



解：上式兩邊同減 x 可得： $x^2 - x > 0$ ，分解因式後 $x(x - 1) > 0$ ，仿上例其解為：

$$(i) \quad x > 0 \text{ 且 } x - 1 > 0 \quad \text{或}$$

$$(ii) \quad x < 0 \text{ 且 } x - 1 < 0$$

情況(i)之解為 $x > 1$ ，即 $(1, \infty)$ ，情況(ii)之解為 $x < 0$ ，即 $(-\infty, 0)$ ，故本題之解為 $(1, \infty)$ 及 $(-\infty, 0)$ 之聯集，或任何不包括在封閉區間 $[0, 1]$ 內之實數。

本題也可兩邊同除以 x ，並考慮 $x > 0$ 或 $x < 0$ 兩種情況求解。

1-7 求解不等式： $2x^2 + 5x < 12$ 。

4 微積分題庫

解：兩邊同減 12，得

$$2x^2 + 5x - 12 < 0,$$

分解因式

$$(x + 4)(2x - 3) < 0$$

因兩因式乘積為負，兩因式必為異號。

必須考慮兩種情況：

(i) $x + 4 > 0$ 且 $2x - 3 < 0$ ；及

(ii) $x + 4 < 0$ 且 $2x - 3 > 0$

情況 (i) 可得 $-4 < x < \frac{3}{2}$ ，情況 (ii) 為不可能，因無任何實數

可同時滿足

$$x < -4 \text{ 且 } x > \frac{3}{2}$$

故本題之解為一開放區間 $\left(-4, \frac{3}{2}\right)$ 。

1-8 試繪下列方程式之圖形，並敘述此直線在平面上所區分兩部份所代表之不等式： $x + y = 5$ 。

解： $x + y = 5$ 之圖形為通過 $(5, 0)$

及 $(0, 5)$ 兩點直線，並將平面區

分成二部份，取上方任一點 $P(6, 1)$

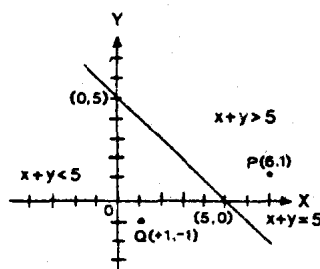
代入原式，得在 P 點處： $6 + 1$

> 5 ，即 $x + y > 5$ 代表上半平面。

取另一點 $Q(1, -1)$ 代入原式

，得在 Q 點處： $1 - 1 < 5$ ，即 $x +$

$y < 5$ 代表下半平面。



1-9 已知方程式： $x^2 - y^2 = 4$ ，試描述此方程式在平面上所區分部份代表之不等式。

解： $x^2 - y^2 = 4$ 之圖形為通過

$(-2, 0)$ 及 $(2, 0)$

之雙曲線，並將平面分割成

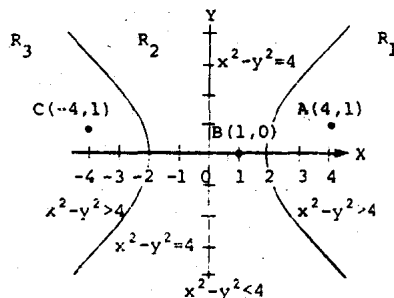
三部份 R_1 ， R_2 ，及 R_3 。

在 R_1 區取任一點 $A(4, 1)$

代入原式， $4^2 - 1^2 >$

4 ，故

$x^2 - y^2 > 4$ 在 R_1 區



同法取 R_2 區 B 點 $(1, 0)$ 代入原式, $1^2 - 0^2 < 4$, 故

$$x^2 - y^2 < 4 \quad \text{在 } R_2 \text{ 區}$$

同法取 R_3 區 C 點 $(-4, 1)$ 代入原式, $(-4)^2 - 1^2 > 4$, 故

$$x^2 - y^2 > 4 \quad \text{在 } R_3 \text{ 區}$$

1-10 試繪不等式: $y < -\frac{1}{2}x + 3$ 之圖形。

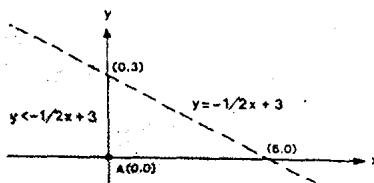
解: 先繪 $y = \frac{1}{2}x + 3$ 之圖形, 為一直線

· 由右圖通過 $(0, 3)$ 及 $(6, 0)$ 之虛線表示, 為正確分出那一半平面代表上述不等式, 試代原點 $A(0, 0)$ 入原式, 得

$$0 < -\frac{1}{2} \cdot 0 + 3$$

$$0 < 3$$

因此右圖中斜線部份所代表下半平面為其解。



1-11 試繪不等式: $y \geq x - 1$ 之圖形。

解: 仿上例先繪 $y = x - 1$ 之圖形, 為一通過 $(0, -1)$ 及 $(1, 0)$ 之直線, 代原點 $A(0, 0)$ 及 B 點 $(1, 0)$ 入原式, 得:

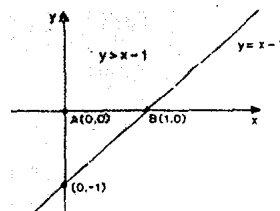
$$1) \quad 0 \geq 0 - 1$$

$$0 \geq -1$$

$$2) \quad 0 \geq 1 - 1$$

$$0 \geq 0$$

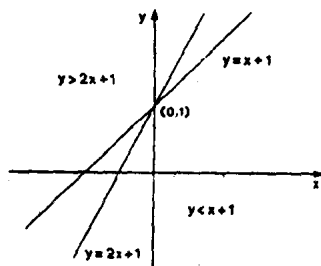
半平面與在其邊界之直線的聯集, 稱為封閉半平面, 故其解為右圖斜線部份與通過 $(0, -1)$ 及 $(1, 0)$ 直線之聯集。



1-12 繪下列不等式圖形:

$$y \leq x + 1 \quad \text{及} \quad y \geq 2x + 1$$

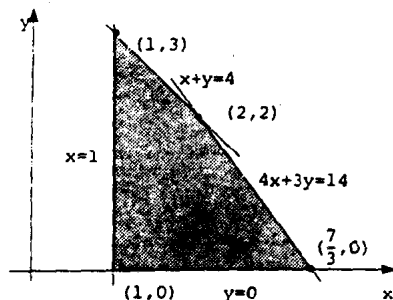
圖：每一不等式均由一封閉半平面所代表，兩條直線 $y = x + 1$ 及 $y = 2x + 1$ 均為上述半平面之邊界。代原點 $(0, 0)$ 入原式，即可求證。



1-13 繪下列不等式圖形，並求出其交集區：

$$x \geq 1, y \geq 0, x + y \leq 4, 4x + 3y \leq 14.$$

圖：本題之解為下列圖形陰影區，由一四邊形作為其邊界，圖上四頂點 $(1, 0)$ ， $(\frac{7}{3}, 0)$ ， $(2, 2)$ 及 $(1, 3)$ 為上述不等式之交集點。



1-14 繪下列不等式：

$$(x + 1)^2 + y^2 < 1,$$

及

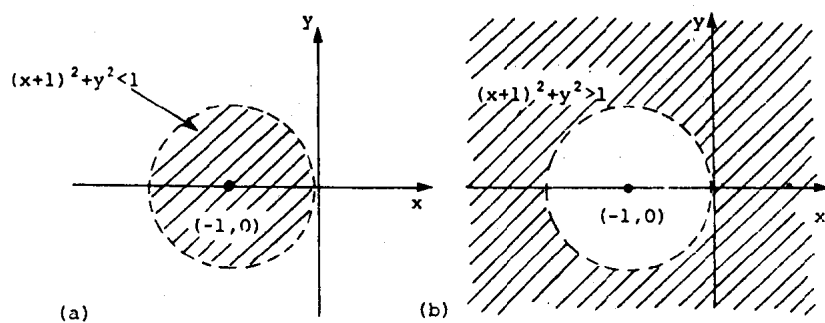
$$(x + 1)^2 + y^2 > 1$$

圖： $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ 之圖形為一個圓，半徑為 1，圓心在 $(-1, 0)$ 上，由圓內及圓外任取一點，即可知下圖(a)為

$$(x + 1)^2 + (y)^2 < 1 \text{ 及}$$

圖(b)為

$$(x + 1)^2 + (y)^2 > 1$$



第二章 絕對值

當我們討論含有絕對值之方程式或不等式時，首先必須考慮到的是將已知關係式變為兩種關係式：第一個關係式為原式中絕對值符號內數值用正值表示，及第二個關係式中絕對值符號內數值用負值表示。

一旦兩種關係式均已寫下，才可利用基本的代數運算去求解。因此，方程式

$$|x| = 2$$

可被下列兩方程式取代，即

$$x = 2, \text{ 及}$$

$$x = -2$$

故一個方程式 $|x| = 2$ ，即代表兩個方程式。

如果絕對值符號超過一個，情況會稍微複雜，但必須應用上述同樣原則去分析，因此，如果已知：

$$|x| = |x^2 - 1|, \text{ 本式與下列 4 式相同}$$

$$x = x^2 - 1,$$

$$-x = x^2 - 1,$$

$$x = -x^2 + 1,$$

$$-x = -x^2 + 1$$

注意上 4 式中第一與第四相同，第二與第三相同，此種情況經常會發生。

2-15 求 $|x| < 7$ 之實數解。

解： $-7 < x < 7$

2-16 求 $|5 - 3x| = -2$ 之解。

解：因絕對值不可能為負值，故無解。

2-17 求解 $|5x + 4| = -3$ 。

解：因任何方程式的絕對值不可能為負值，故本題無解。

2-18 求解 $|x - 7| = 3$ 。

解：依絕對值定義，原式可化為下列二方程式：

10 微積分題庫

(1) $x - 7 = 3$, 得 $x = 10$

(2) $x - 7 = -3$, 得 $x = 4$

故本題有二個解, 即 $x = 4$ 或 10 。

2-19 求解 $|3x + 2| = 5$ 。

解: 仿上例, 可得 $3x + 2 = 5$ 或 $3x + 2 = -5$

故其解為 $x = 1$ 或 $x = -\frac{7}{3}$

2-20 已知 $|x - 1| < 5$, 求 x 值範圍。

解: 由定義可得 $-5 < x - 1 < 5$

故 $-4 < x < 6$ 為其範圍

2-21 已知 $|x - 5| < 4$, 求 x 之值域。



解: 由原式可得 $-4 < x - 5 < 4$

移項, 得 $1 < x < 9$

因上述運算過程是可逆的, 我們可說:

$$|x - 5| < 4 \text{ 若且唯若 } 1 < x < 9$$

故其解為一開放區間 $(1, 9)$ 。

2-22 解不等式 $|3 - 2x| < 1$ 。

解: 上式, 按定義可化為

$$-1 < 3 - 2x < 1, \text{ 即}$$

$$-4 < -2x < -2, \text{ 同乘以 } -\frac{1}{2}, \text{ 得}$$

$$2 > x > 1$$

故 x 值域為一開放區間 $(1, 2)$ 。

2-23 解不等式 $|2 - 5x| < 3$ 。

解: 原式可化為 $-3 < 2 - 5x < 3$

兩邊同減 2 $-5 < -5x < 1$

兩邊同除以 -5 $1 > x > -\frac{1}{5}$

故其解爲一開放區間 $\left(-\frac{1}{5}, 1\right)$

2-24 求解 $|3x - 4| \leq 7$ 。

解：原式可化爲 $-7 \leq 3x - 4 \leq 7$

同加 4 $-3 \leq 3x \leq 11$

同除以 3 $-1 \leq x \leq \frac{11}{3}$

故其解爲一封閉區間 $\left[-1, \frac{11}{3}\right]$ 。

2-25 求滿足不等式 $|3x + 2| > 5$ 之所有實數。

解：因原式絕對值大於 5，故可化爲下列兩式：

(1) $3x + 2 > 5$ 或 (2) $3x + 2 < -5$

由(1)式可得 $x > 1$ ，其解爲 $(1, +\infty)$

由(2)式可得 $x < -\frac{7}{3}$ ，其解爲 $\left(-\infty, -\frac{7}{3}\right)$

故本題之解爲上兩區間之聯集，或不屬於封閉區間 $\left[-\frac{7}{3}, 1\right]$ 之所有實數。

2-26 繪下列兩不等式圖形，並指出兩圖形交會處：

$$2 \leq x < 3 \quad \text{及} \quad |y - 2| < \frac{1}{2}$$

解：第一個不等式由介於 $x = 2$ 及 $x = 3$ 兩直線間無限長帶子組成，但 $x = 2$ 上點包括在內， $x = 3$ 上點則否。

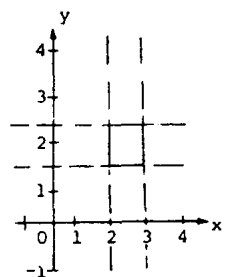
第二個不等式須考慮兩種情況：

即 $(y - 2)$ 爲正或負值，故可得

$$-\frac{1}{2} < y - 2 < \frac{1}{2}$$

兩邊同加 2，再化簡，得

$$\frac{3}{2} < y < \frac{5}{2}$$

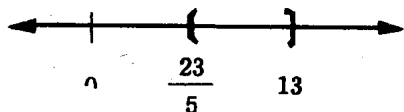


此式代表一無限長帶子與第一式所代表帶子構成一矩形並交於四點： $\left(2, \frac{3}{2}\right)$

$(\frac{3}{2})$, $(3, \frac{3}{2})$, $(3, \frac{5}{2})$, 及 $(2, \frac{5}{2})$, 因邊長相等, 事實上為一正方形。

故所有位於正方形內之點及包括在 $x = 2$ (左邊邊界) 上所有點均為其解, 但上述四點除外。

2-27 解 $\left| \frac{2x-5}{x-6} \right| < 3$ 。



圖：原式可化為 $-3 < \frac{2x-5}{x-6} < 3$, 分兩種情況討論：

(1) $x - 6 > 0$, 同乘 $(x - 6)$, 得

$$-3(x-6) < 2x-5 < 3(x-6)$$

再分兩式 $2x-5 < 3(x-6)$, 化簡為 $13 < x$

$$-3(x-6) < 2x-5, \text{ 化簡為 } \frac{23}{5} < x$$

但已假設 $x - 6 > 0$, 即 $x > 6$, 故三式交集為 $x > 13$, 即其解為一區間 $(13, \infty)$ 。

(2) $x - 6 < 0$, 同乘 $(x - 6)$, 改變不等式方向, 得

$$-3(x-6) > 2x-5 > 3(x-6)$$

仿上列解法可得：

$$x - 6 < 0, \frac{23}{5} > x, \text{ 及 } 13 > x$$

其交集為 $x < \frac{23}{5}$, 故其解為一區間 $(-\infty, \frac{23}{5})$ 。故本題之解為所

有不屬於封閉區間 $[\frac{23}{5}, 13]$ 內之所有實數。

2-28 求 $\left| \frac{3-2x}{2+x} \right| \leq 4$ 中 x 值可能範圍。

圖：原式可化為 $-4 \leq \frac{3-2x}{2+x} \leq 4$ 仿上例

(1) $2+x > 0$, 即 $x > -2$ 及 $-4(2+x) \leq 3-2x \leq 4(2+x)$