# 微積分題庫

再版

美國教育協會 著
藍建群 譯

曉園出版社
世界图书出版公司

微積分庫題

# 微積分題庫

再版

美國教育協會　著
藍　建　群　　譯

曉　園　出　版　社
世界图书出版公司
北京・广州・上海・西安

微积分题库（再版）

美國教育協會 著

藍建群 譯

晓园出版社出版

世界图书出版公司北京公司重印

北京朝阳门内大街 137 号

北京中西印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　　各地新华书店经售

*

1995 年 5 月第一版　　开本：787×1245　1/20

1995 年 5 月第一次印刷　　印张：45

印数：0001－600　　字数：360 千字

ISBN：7－5062－1772－4/O・123

定价：49.00 元（WB9312/7）

世界图书出版公司向台湾晓园出版社购得重印权

限国内发行

# 目　　錄

# 第一章　不等式

如果我們寫一方程式：$x = 3$，此方程式表示 x 祇能應用至一個值，即 $x = 3$，但假使我們寫另一個方程式：$x > 3$，則此方程式的 x 不祇應用至一個值，而是一個值域，即在 3 到 $+\infty$ 之間，同樣地，寫一方程式：$x < 3$，則 x 範圍在 $-\infty$ 到 3 之間。如果我們用符號：$|\ |$，定義爲絕對值符號，使得

$$|x| = \begin{cases} x & \text{if } x \geq 0 \\ -x & \text{if } x < 0 \end{cases}$$

那麼不等式

$$|x| > 3$$

將涵蓋下列區域

由 $-\infty$ 到 $-3$ 及由 $+3$ 到 $\infty$

當考慮數值值域時常會用到不等式。我們在求解不等式時，所用基本代數運算也與求解一般方程式之代數運算非常接近。

**1－1**　求解不等式：$-7-3x<5x+29$。

解：先由上式兩邊同減 $5x$，

$$-7-8x<29$$

兩邊再同乘 $-1$，則必須改變不等式符號方向，

$$7+8x>-29$$

兩邊同減 7，再除以 8，得下列解：

$$x>-\frac{9}{2}$$

因此其解可用一開放區間 $\left(-\frac{9}{2}, \infty\right)$ 表示。

**1－2**　求 $\sqrt{1-2x}$ 之實數解。

解：祇有正實數之平方根方爲實數，因此根號內

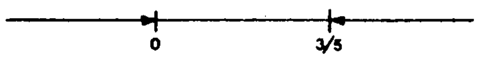
$$1-2x\geq 0$$

$$2x\leq 1$$

$$x\leq\frac{1}{2}$$

其解爲一半封閉區間 $\left(-\infty, \frac{1}{2}\right)$，即由 $-\infty$ 到 $+\frac{1}{2}$ 間區域。

**1－3** 求解$\frac{3}{x}<5$（$x\neq 0$）。




解：由上式可能馬上想到兩邊同乘以 $x$，然而因 $x\neq 0$，$x$ 可能是正值，也可能是負值，故須分兩者情況討論。

情況(1)：假設 $x>0$，兩邊同乘以 $x$ 不會改變不等式方向，得

$$3<5x$$

兩邊同除以 5，得 $x>\frac{3}{5}$

換句話說，我們必須找到所有實數能滿足下列兩不等式：

$$x>0 \text{ 及 } x>\frac{3}{5}$$

既然，任何大於$\frac{3}{5}$的數必為正數，可知其解由開放區間$\left(\frac{3}{5},\infty\right)$組成。

情況(2)：設 $x<0$，同樣乘以 $x$ 將改變不等式方向，因此

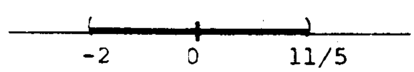
$$3>5x$$

即$\frac{3}{5}>x$，故其解必須同時滿足下列兩不等式：

$$x<0 \text{ 及 } x<\frac{3}{5}$$

能夠滿足上式的解為（$-\infty$，0）。最後將上兩種情況解合併，求得其解為不包括在區間$\left(0,\frac{3}{5}\right)$內之所有實數。

**1－4** 求解$\frac{2x-3}{x+2}<\frac{1}{3}$，但 $x\neq 2$。




解：仿上例，考慮兩種情況，即 $x+2$ 為正或負：

情況(1)：$x+2>0$，兩邊同乘 3（$x+2$），得

$$6x-9<x+2$$

兩邊同加 $9-x$，可得 $5x<11$，即 $x<\frac{11}{5}$ 。

但已假設 $x+2>0$，即 $x>-2$，故 x 值域為 $\left(-2，\frac{11}{5}\right)$。

情況(2)：$x+2<0$，兩邊同乘 $3(x+2)$，改變不等式方向後，得

$$6x-9>x+2$$

即 $5x>11$，$x>\frac{11}{5}$，但已假設 $x<-2$，因無任何實數可同時滿足上兩式，此為不可能，故本題之解為一開放區間 $\left(-2，\frac{11}{5}\right)$ 。

**1－5**　求滿足下述不等式之實數解：$(x+3)(x+4)>0$。

**解**：本式必須 $(x+3)$ 及 $(x+4)$ 兩因式同號才成立，故分兩種情況討論。

情況(1)：$x+3>0$ 且 $x+4>0$，即

$x>-3$ 且 $x>-4$

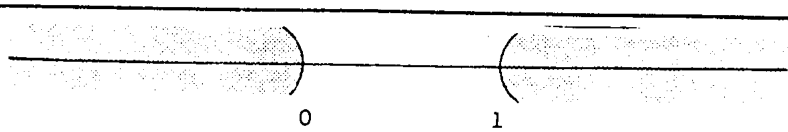
上兩式交集為 $x>-3$，其解為 $(-3，+\infty)$。

情況(2)：$x+3<0$ 且 $x+4<0$，即

$x<-3$ 且 $x<-4$

上兩式交集為 $x<-4$，其解為 $(-\infty，-4)$，因此合併上述兩情況其解為 $(-3，+\infty)$ 及 $(-4，-\infty)$ 之聯集或任何不包括在封閉區間 $[-4，-3]$ 內之實數。

**1－6**　求解不等式：$x^2>x$




**解**：上式兩邊同減 x 可得：$x^2-x>0$，分解因式後 $x(x-1)>0$，仿上例其解為：

(i)　$x>0$ 且 $x-1>0$　　　或

(ii)　$x<0$ 且 $x-1<0$

情況(i)之解為 $x>1$，即 $(1，\infty)$，情況(ii)之解為 $x<0$，即 $(-\infty，0)$，故本題之解為 $(1，\infty)$ 及 $(-\infty，0)$ 之聯集，或任何不包括在封閉區間 $[0，1]$ 內之實數。

本題也可兩邊同除以 x，並考慮 $x>0$ 或 $x<0$ 兩種情況求解。

**1－7**　求解不等式：$2x^2+5x<12$。

解：兩邊同減12，得

$$2x^2+5x-12<0,$$

分解因式

$$(x+4)(2x-3)<0$$

因兩因式乘積爲負，兩因式必爲異號。

必須考慮兩種情況：

（i） $x+4>0$ 且 $2x-3<0$；及

（ii） $x+4<0$ 且 $2x-3>0$

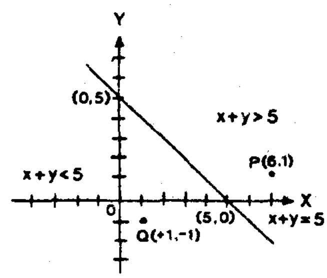
情況（i）可得 $-4<x<\frac{3}{2}$，情況（ii）爲不可能，因無任何實數可同時滿足

$$x<-4 \text{ 且 } x>\frac{3}{2}$$

故本題之解爲一開放區間 $\left(-4,\frac{3}{2}\right)$。

**1－8** 試繪下列方程式之圖形，並敍述此直線在平面上所區分兩部份所代表之不等式：$x+y=5$。

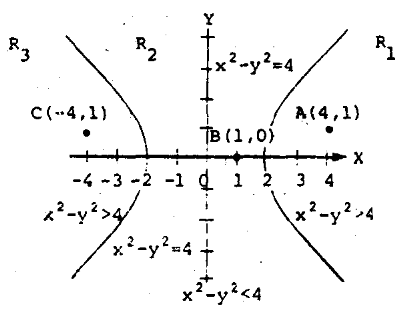
解：$x+y=5$ 之圖形爲通過（5，0）及（0，5）兩點直線，並將平面區分成二部份，取上方任一點P（6，1）代入原式，得在P點處：$6+1>5$，即 $x+y>5$ 代表上半平面。取另一點Q（+1，−1）代入原式，得在Q點處：$1-1<5$，即 $x+y<5$ 代表下半平面。




**1－9** 已知方程式：$x^2-y^2=4$，試描述此方程式在平面上所區分部份代表之不等式。

解：$x^2-y^2=4$ 之圖形爲通過（−2，0）及（2，0）之雙曲線，並將平面分割成三部份 $R_1$，$R_2$，及 $R_3$。在 $R_1$ 區取任一點A（4，1）代入原式，$4^2-1^2>4$，故

$x^2-y^2>4$ 在 $R_1$ 區



同法取$R_2$區B點（1，0）代入原式，$1^2-0^2<4$，故

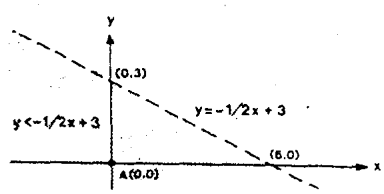
$x^2-y^2<4$　在$R_2$區

同法取$R_3$區C點（－4，1）代入原式，$(-4)^2-1^2>4$，故

$x^2-y^2>4$　在$R_3$區

**1－10**　試繪不等式：$y<-\frac{1}{2}x+3$之圖形。

解：先繪$y=\frac{1}{2}x+3$之圖形，爲一直線，由右圖通過（0，3）及（6，0）之虛線表示，爲正確分出那一半平面代表上述不等式，試代原點A（0，0）入原式，得




$$0<-\frac{1}{2}\cdot 0+3$$

$$0<3$$

因此右圖中斜線部份所代表下半平面爲其解。

**1－11**　試繪不等式：$y\geq x-1$之圖形。

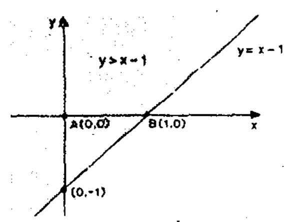
解：仿上例先繪$y=x-1$之圖形，爲一通過（0，－1）及（1，0）之直線，代原點A（0，0）及B點（1，0）入原式，得：

1）　$0\geq 0-1$

　　$0\geq -1$

2）　$0\geq 1-1$

　　$0\geq 0$

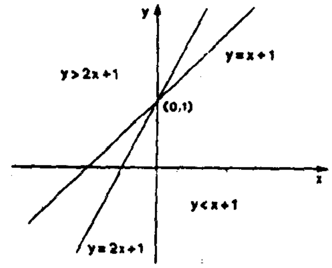



半平面與在其邊界之直線的聯集，稱爲封閉半平面，故其解爲右圖斜線部份與通過（0，－1）及（1，0）直線之聯集。

**1－12**　繪下列不等式圖形：

$y\leq x+1$　及　$y\geq 2x+1$

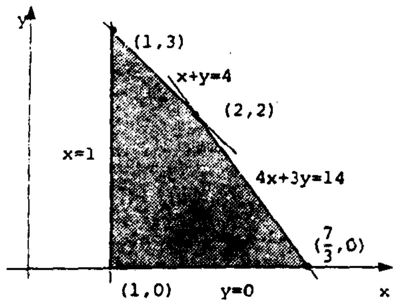
解：每一不等式均由一封閉半平面所代表，兩條直線 $y=x+1$ 及 $y=2x+1$ 均爲上述半平面之邊界。代原點（0，0）入原式，即可求證。




**1－13** 繪下列不等式圖形，並求出其交集區：

$x \geq 1$，$y \geq 0$，$x+y \leq 4$，$4x+3y \leq 14$。

解：本題之解爲下列圖形陰影區，由一四邊形作爲其邊界，圖上四頂點（1，0），$\left(\frac{7}{3}，0\right)$，（2，2）及（1，3）爲上述不等式之交集點。




**1－14** 繪下列不等式：

$(x+1)^2+y^2<1$，

及

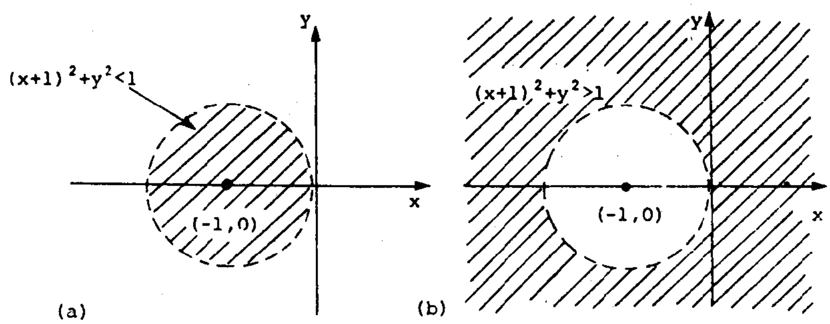
$(x+1)^2+y^2>1$

解：$(x+1)^2+y^2=1$ 之圖形爲一個圓，半徑爲1，圓心在（－1，0）上，由圓內及圓外任取一點，即可知下圖(a)爲

$(x+1)^2+(y)^2<1$ 及

圖(b)爲

$(x+1)+(y)^2>1$


(x+1)²+y²<1
y
x
(-1,0)
(a)
(x+1)²+y²>1
y
x
(-1,0)
(b)

# 第二章　絕對值

當我們討論代有絕對值之方程式或不等式時，首先必須考慮到的是將已知關係式變爲兩種關係式：第一個關係式爲原式中絕對值符號內數值用正值表示，及第二個關係式中絕對值符號內數值用負值表示。

一旦兩種關係式均已寫下，才可利用基本的代數運算去求解。因此，方程式

$$|x| = 2$$

可被下列兩方程式取代，卽

$$x = 2，及$$
$$x = -2$$

故一個方程式 $|x| = 2$，卽代表兩個方程式。

如果絕對值符號超過一個，情況會稍微複雜，但必須應用上述同樣原則去分析，因此，如果已知：

$$|x| = |x^2 - 1|，本式與下列 4 式相同$$

$$x = x^2 - 1，$$
$$-x = x^2 - 1，$$
$$x = -x^2 + 1，$$
$$-x = -x^2 + 1$$

注意上 4 式中第一與第四相同，第二與第三相同，此種情況經常會發生。

**2－15**　求 $|x| < 7$ 之實數解。

解：$-7 < x < 7$

**2－16**　求 $|5 - 3x| = -2$ 之解。

解：因絕對值不可能爲負值，故無解。

**2－17**　求解 $|5x + 4| = -3$。

解：因任何方程式的絕對值不可能爲負值，故本題無解。

**2－18**　求解 $|x - 7| = 3$。

解：依絕對值定義，原式可化爲下列二方程式：

(1) $x-7=3$ ，得 $x=10$

(2) $x-7=-3$ ，得 $x=4$

故本題有二個解，即 $x=4$ 或 $10$ 。

**2－19** 求解 $|3x+2|=5$ 。

解：仿上例，可得 $3x+2=5$ 或 $3x+2=-5$

故其解為 $x=1$ 或 $x=-\frac{7}{3}$

**2－20** 已知 $|x-1|<5$ ，求 x 值範圍。

解：由定義可得 $-5<x-1<5$

故 $-4<x<6$ 為其範圍

**2－21** 已知 $|x-5|<4$ ，求 x 之值域。


解：由原式可得 $-4<x-5<4$

移項，得 $1<x<9$

因上述運算過程是可逆的，我們可說：

$|x-5|<4$ 若且唯若 $1<x<9$

故其解為一開放區間 $(1, 9)$ 。

**2－22** 解不等式 $|3-2x|<1$ 。

解：上式，按定義可化為

$-1<3-2x<1$ ，即

$-4<-2x<-2$ ，同乘以 $-\frac{1}{2}$ ，得

$2>x>1$

故 x 值域為一開放區間 $(1, 2)$ 。

**2－23** 解不等式 $|2-5x|<3$ 。

解：原式可化為 $-3<2-5x<3$

兩邊同減 2 $-5<-5x<1$

兩邊同除以 $-5$ $1>x>-\frac{1}{5}$

故其解爲一開放區間 $\left(-\frac{1}{5},1\right)$

**2－24**　求解 $|3x-4|\leq 7$。

解：原式可化爲　$-7\leq 3x-4\leq 7$

同加4　$-3\leq 3x\leq 11$

同除以3　$-1\leq x\leq\frac{11}{3}$

故其解爲一封閉區間 $\left[-1,\frac{11}{3}\right]$。

**2－25**　求滿足不等式 $|3x+2|>5$ 之所有實數。

解：因原式絕對值大於5，故可化爲下列兩式：

(1) $3x+2>5$　或(2) $3x+2<-5$

由(1)式可得　$x>1$，其解爲 $(1,+\infty)$

由(2)式可得　$x<-\frac{7}{3}$，其解爲 $\left(-\infty,-\frac{7}{3}\right)$

故本題之解爲上兩區間之聯集，或不屬於封閉區間 $\left[-\frac{7}{3},1\right]$ 之所有實數。

**2－26**　繪下列兩不等式圖形，並指出兩圖形交會處：

$$2\leq x<3 \quad 及 \quad |y-2|<\frac{1}{2}$$

解：第一個不等式由介於 $x=2$ 及 $x=3$ 兩直線間無限長帶子組成，但 $x=2$ 上點包括在內，$x=3$ 上點則否。

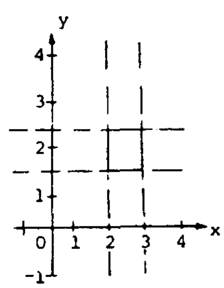
第二個不等式須考慮兩種情況：

即 $(y-2)$ 爲正或負值，故可得

$$-\frac{1}{2}<y-2<\frac{1}{2}$$

兩邊同加2，再化簡，得

$$\frac{3}{2}<y<\frac{5}{2}$$

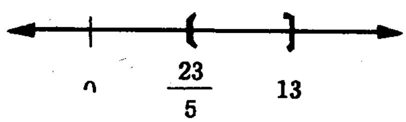



此式代表一無限長帶子與第一式所代表帶子構成一矩形並交於四點：( 2

$,\frac{3}{2})$，$(3,\frac{3}{2})$，$(3,\frac{5}{2})$，及 $(2,\frac{5}{2})$，因邊長相等，事實上爲一正方形。

故所有位於正方形內之點及包括在 $x=2$（左邊邊界）上所有點均爲其解，但上述四點除外。

**2－27** 解 $\left|\frac{2x-5}{x-6}\right|<3$。




**解**：原式可化爲 $-3<\frac{2x-5}{x-6}<3$，分兩種情況討論：

(1) $x-6>0$，同乘 $(x-6)$，得

$$-3(x-6)<2x-5<3(x-6)$$

再分兩式　$2x-5<3(x-6)$，化簡爲　$13<x$

$-3(x-6)<2x-5$，化簡爲　$\frac{23}{5}<x$

但已假設 $x-6>0$，即 $x>6$，故三式交集爲 $x>13$，即其解爲一區間 $(13,\infty)$。

(2) $x-6<0$，同乘 $(x-6)$，改變不等式方向，得

$$-3(x-6)>2x-5>3(x-6)$$

仿上列解法可得：

$$x-6<0,\ \frac{23}{5}>x,\ \text{及}\ 13>x$$

其交集爲 $x<\frac{23}{5}$，故其解爲一區間 $\left(-\infty,\frac{23}{5}\right)$。故本題之解爲所有不屬於封閉區間 $\left[\frac{23}{5},13\right]$ 內之所有實數。

**2－28** 求 $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right|\leq 4$ 中 $x$ 值可能範圍。

**解**：原式可化爲 $-4\leq\frac{3-2x}{2+x}\leq 4$　仿上例

(1) $2+x>0$，即 $x>-2$ 及 $-4(2+x)\leq 3-2x\leq 4(2+x)$