

第 5 篇 自动控制理论

主编单位:

天津大学

主 编:

刘 豹

编 写 人:

汪德馨 卞继仁

1-2/100

常用符号表

c ——线性多项式各系数相除后之系数; 输出变量, 或作 $C(t)$	$P(\omega)$ ——实频特性函数或曲线
e ——反馈控制系统的误差, 或作 $e(t)$; 元件的输入信号	$Q(\omega)$ ——虚频特性函数或曲线
$e^*(t)$ ——对 $e(t)$ 采样后得到的采样值, 即在各采样瞬间的 $e(t)$ 之值	$Q(z)$ —— z 的多项式
$e_1(t)$ ——对 $e^*(t)$ 用零阶保持器后所得之值	$R(s)$ ——输入变量 $r(t)$ 的拉氏变换
$e^*/(nT)$ ——在 $(n-1)T$ 到 nT 时刻间信号之平均变化率	S ——逻辑加法器中的和数
$g(t)$ ——脉冲过渡函数(脉冲反应函数); 控制通道的脉冲过渡函数	T ——一段时间; 采样间隔; 采样周期
$i(t)$ ——脉冲序列	T_1 ——时间常数;
$k(Y)$ ——单位脉冲序列	Z —— Z 变换运算符
$l(t)$ ——干扰通道脉冲过渡函数	X —— x 之拉氏变换; x 之脉冲序列; 正弦波输入之幅值
$n(t)$ ——干扰输入	Y —— y 之拉氏变换; y 之脉冲序列
p ——传递函数的极点	$A(t)$ ——系数矩阵
$r(t)$ ——反馈控制系统输入变量	$B(t)$ ——系数矩阵
s ——拉氏变换变量的符号; 传递函数的极点	$C(t)$ ——系数矩阵
t_s ——调整时间; 或称过渡过程时间	$H(t)$ ——测量矩阵
$u(t)$ ——控制作用; 输入变量	K ——鉴别线性定常系统可控性的矩阵
v ——测量误差, 或作 $v(t)$	L ——鉴别线性定常系统可测性的矩阵
w ——干扰变量, 或作 $w(t)$	F ——表示线性状态(或外输出)反馈调节器的输入输出关系的矩阵
x ——位移; 系统或元件的输入变量或输出变量	R ——权矩阵
$x(t)$ ——常用变量; 输入变量或输出变量	x ——状态向量
$y(t)$ ——常用变量; 输出变量	u ——控制向量
z —— Z 变换中的变量符号; 输出变量, 或作 $z(t)$; 传递函数的零点	w ——干扰向量
C ——逻辑加法器的进位	z ——观测向量
$C(s)$ ——输出变量 $C(t)$ 的拉氏变换	$\phi(t-t_0)$ ——状态转移矩阵
D ——延迟一拍的运算符	$\delta(\tau)$ ——单位脉冲函数; 单位脉冲
$E(s)$ —— $e(t)$ 的拉氏变换	$\varphi(\tau)$ ——相关函数
$E(z)$ —— $e(t)$ 的 Z 变换	$\varphi_{xx}(\tau)$ —— x 的自相关函数
$E'(z)$ ——单位脉冲函数的 Z 变换	$\varphi_{yx}(\tau)$ —— x 对 y 的互相关函数
F ——逻辑函数式	$\varphi(\omega)$ ——相频特性(曲线)
$G(s)$ ——具有脉冲过渡函数 $g(t)$ 的对象或系统的传递函数	λ ——时间代换量; 矩阵的特征值
$G(j\omega)$ ——具有脉冲过渡函数 $g(t)$ 的对象或系统的频率特性; 控制通道频率特性	ν ——积分总和的近似计算中计算点的序数; 控制系统的无差度
$H(s)$ ——保持器的传递函数; 反馈网络传递函数	μ ——积分总和的近似计算中估计 τ 的序数
J ——逻辑加法器前一位的进位数	γ ——相位裕量
K ——系统的放大系数, 或叫增益	σ ——均方根误差; 极点之实部; 百分率超调量
K_p ——增益裕量的倒数	τ ——延迟时间; 时间代换值; 元件的时间常数
$\mathcal{L}$ ——拉氏变换运算符	ζ ——二阶系统中的阻尼系数; 阻尼比
M_p ——谐振峰值	ω ——角频率
$M(\omega)$ ——幅频特性(曲线)	ω_a ——信号频谱中的最大频率; 增益交界频率
N ——次数; 个数; 总格(步)数; 非线性描述函数	ω_c ——截止频率; 系统的带宽
	ω_r ——谐振频率
	ω_s ——采样频率
	ω_n ——无阻尼自振频率
	ω_φ ——相位交界频率
	ϕ ——相位移; 逻辑式中的多余组合
	$\phi_{xx}(\omega)$ ——变量 $x(t)$ 的频谱密度
	ψ ——衰减率

概 论

自动控制就是用各类自动装置和仪表(包括控制计算机)代替帮助人去控制生产机器或设备。生产愈发展,生产机器和设备的运行要求(如单位时间内必需处理的物料量、工艺条件的允许变化范围、物料的反应速度、产品的质量……等)就愈高,也就愈需要以自动控制去代替人工操作。在简单生产过程中,需要加以控制的生产变量(化工反应中的温度、压力、成分、流量;机械加工中的位移、转速等)数目较少、变化缓慢、允许波动范围较宽,这时自动控制的主要作用是减轻劳动强度、保证安全生产和提高劳动生产率。但随着生产过程发展,需要加以检测的变量大大增多,它们的变化速度也大大提高,允许波动的范围也大大缩小,在这种情况下,不用自动控制就根本无法进行生产。因而,自动控制就成了现代化生产的必要条件之一。

用自动控制的生产过程系统,就是生产过程自动化系统,它是自动控制系统中最广泛的一类。其他还有许多非生产性的自动控制系统,如雷达搜索系统、武器的自动瞄准系统、射电望远镜的跟踪系统等。此外,用以实现自动化的许多自动装置和仪表本身也是一种小型的自动控制系统。

自动控制系统就其控制的对象或控制的具体过程来说种类繁多,不胜枚举,但就其所控制的变量的性质来说,不外乎连续和断续的两大类。连续控制系统是指被控制变量(被控量)不管干扰多大,都紧跟给定值连续变动的系统。如系统给定值经常改变,这就是随动系统;如给定值基本不变,这就是定值调节系统;如给定值按预先安排的程序变化,这就是程序控制系统。连续系统的变量也可以采样测取成为时间的离散量,也可以再进一步量化成数字量,前者构成了采样控制系统;后者则形成数字控制系统。断续控制系统的变量是开关量,例如电量的有或无、大或小;机械部件的进或退、动或停。如果控制系统是纯然按若干事件的逻辑关系而决定其各输出变量的有或无的,这系统就是组合逻辑控制系统;如果控制系统还进一步同时考虑若干事件发生的顺序来决定输出变量的有或无,则为顺序控制系统。

自动控制理论是研究自动控制系统运动规律的理论,运用这些理论可以正确地分析、综合和设计自动控制系统。对上述两大类自动控制系统的研究形成了相应的两类自动控制理论。或更确切地说,研究连续自动控制系统运动规律的理论,一般都叫反馈控制理论,包括近十多年来提出的所谓近代控制理论。研究断续自动控制系统运动规律的理论叫继电或开关控制理论或逻辑控制理论。

反馈控制理论以数学方法(包括解析法和图解法)研究不同特性元部件以不同方式构成闭环系统条件下,系统的输出变量(往往就是被控变量)和各类输入变量间随时间变化的关系,并且按实际工程需要研究并指定某些表示系统动态品质的指标。在确定的元件和系统构成方式下,计算或寻找输出输入变量间的关系,并从这些关系说明系统的品质,这就是系统的“分析”工作。在一定品质指标要求下,反过来选取构成系统的可调元件的参数及其构成方式,这就是调节器参数“整定”及系统的“综合”工作。在一定品质指标要求下,确定全系统的结构,并选取不同类型元部件的构成方式及其具体参数,这是自动控制系统的设计工作。

逻辑控制理论研究实现一定逻辑动作时各种逻辑元件的组成规律,并从工程角度提出和研究构成逻辑动作的典型门电路线路及其最简化和可靠性问题。已知逻辑线路求其输出动作规律是分析;反之,按一定动作规律的要求来构成相应的逻辑控制线路就是综合或设计。

反馈控制理论的内容相当丰富,它的基础是“线性连续反馈控制理论”。第一,反馈控制理论其他部分不少是在线性理论的基础上发展起来的,例如采样控制系统,是将变量在数学上作某些处理后,仍用线性反馈控制理论的基本方法运算分析的。第二,线性反馈控制理论的分析方法多、运算方便、实用价值大。在某些特定条件下,往往可以把实际的非线性系统化或线性系统来运算;或在牺牲一定精度的代价下,用准线性化方法把非线性系统当作线性系统来处理。线性反馈控制理论(包括近代控制理论

部分)在目前是自动控制理论中实用价值最大的部分,用它可以解决自动控制系统中大量的分析、综合和设计问题。

在“经典”线性反馈控制理论中目前最通用的两种方法是频率法和根轨迹法。在本世纪四十年代后期,线性控制理论中的频率方法已十分完善,它的特点是可以从实验结果得到系统元部件或整个系统的动态表达式(频率特性曲线),从而可以在实验基础上来综合自动控制系统。这对于设计随动系统是特别方便的。此外,频率法直接给出了一定系统上输入输出变量的频率范围,对系统能通过的信号频带的概念十分明确,有利于一些自动测试仪表和随动系统的设计。本世纪四十年代末提出了根轨迹法,它的着眼点是系统的动态特性(稳定性、稳定余量、阻尼比等)和系统零极点的分布密切相关,而在系统大部分元部件已确定,只能调整校正装置部分几个参数时,这些参数对零极点分布的影响用根轨迹表示最直接而方便。这种方法无论从分析和综合角度来说都很简便明了,而且在分析采样控制系统和研究系统灵敏度时都有可取之处。

对于具有严重非线性特性的系统,例如两位调节系统,就一定要用非线性方法。非线性特性往往是系统产生自振的根源,在分析一个反馈控制系统的自振现象时,应当从非线性观点着手。非线性特性对改善系统动态特性是有特殊功用的。上述这些问题都需用非线性控制理论来解决。

采样控制理论是研究多点控制和计算机控制系统动作规律的理论。如果只着眼于变量在采样点上的变化关系,那么只要用 Z 变换代替拉氏变换,全部线性反馈控制理论的结论都可以应用。

反馈控制理论从四十年代发展到现在,已有“经典”和“现代”两大类之分。所谓“经典”自动控制理论是指在五十年代前期已得到充分发展的主要是解决单变量线性反馈系统分析和设计问题的自动控制原理。到六十年代,由于空间技术和武器控制系统的发展,要求精确地处理各种多变量非线性系统的控制问题。这些系统往往要考虑到许多随机信息,为了能够迅速及时地处理大量运算数据,一定要用计算机工作,所以必须考虑到采样问题。这样就形

成了现代控制理论。它的特点是以状态变量表示系统的动态变量,以连续或离散形式用矩阵方法作为运算的基础,以便于直接应用计算机。现代控制理论在设计系统时往往以某些指标最优(极大或极小)为依据,因而最优控制是它的主要内容之一。设计计算的结果是一个能满足一定指标和某些约束条件的最优控制向量。这一最优控制向量可以在系统之外用计算机算出后再加到系统的输入端去,更实用的是以在线控制计算机直接作最优控制。用计算机进行最优控制的首要条件是要知道被控制对象的数学模型,在现代控制理论中寻找对象数学模型的方法——“辨识和参数估计”正在发展。在运行中有些对象的数学模型是会随工作条件而改变的,这时可以随时辨识对象的数学模型,并随时按最优指标计算最优控制,使控制系统自己适应条件随时保持最优,这就是自适应控制系统的概念。自适应系统是根据现代控制理论用辨识和参数估计方法设计计算的。现代控制理论在生产过程自动化系统中的应用研究工作正在展开,它的工业应用在不久将会得到普遍推广。

逻辑控制从最初采用有接点继电器元件开始,经历了无接点的电子管、晶体管元件的时期直到数字集成电路的出现,它在自动控制领域也是一个重要方面,尽管逻辑元件的结构性能、技术指标在不断改进,集成度在不断增加,但逻辑控制理论仍然是普遍适用的。现代逻辑控制系统日趋复杂庞大,对逻辑电路的快速性、可靠性和经济性等方面提出了更高要求。不运用逻辑控制理论就难以作出好的设计,即使是多功能的集成元件,如全加器、触发器、译码器等也是基本门电路的不同组合,它也完全服从门电路的逻辑规律。

逻辑控制理论近十年来随着大规模数字集成电路的出现而进一步发展着。在设计大型逻辑控制电路时,主要问题不在于如何用最少元件构成线路,而是如何更方便地选用标准逻辑电路。同时要研究更简炼的表达逻辑关系的方式。然而,对于中小型逻辑控制电路的设计,最简化逻辑电路的设计仍然是一种实用的方法。

第1章 线性连续反馈控制系统

1 基本知识

1.1 名词术语

a. **被控(或被调)对象** 系指要求实现自动控制的机器、设备或生产过程,例如飞机发动机、锅炉、加热炉、反应器、机床以及石油化工生产过程等。

b. **输入量(或称输入变量、输入信号)** 是指作用于一个元件、装置或系统输入端的物理量,它可以是电量,也可以是非电量,但它们一般都是对时间的函数(已知或未知规律的确定函数或随机函数)。这里指的不是物料或能量,而是信息或信号(包括各种干扰及有用的信号)。

c. **输出量(或称输出变量、输出信号)** 输出量是指被控制的元件、装置或系统运动状态的物理变量,它是在元件或系统输出端出现的电量(电压、电流或频率)或非电量(温度、压力、成分或位移等)。在自动控制系统中,对象的被控量就是要求控制的输出量。它是系统初始状态和输入量的函数。

d. **被控量** 系指被控对象内要求保持给定数值或按一定规律变化的物理量,它通常是决定对象工作状态的主要变量,如水槽的水位、加热炉的温度、电机的转速等。被控量亦称对象或系统的输出量。

e. **控制量** 也称调节量。系指调节器的输出量,它通过执行器改变输入于被控对象的物料或能量(如温度对象的进出物料、加热蒸汽或燃料的流量、电动机转速控制系统中发电机励磁电流等),从而对被控对象进行控制。

f. **干扰** 在自动控制中干扰又称扰动。被控对象及自动控制系统各个环节都存在着干扰。除控制量之外引起被控量变化的所有变量以及影响各环节输出量变化的因素都可视为干扰,如电源电压的振幅和频率的变化,环境温度、湿度、气压的变化以及负载的变化等。合理的自动控制系统应具有补偿和克服内外干扰变化的能力,使被控量与给定值的偏差尽可能地小。

1.2 反馈的概念

所谓反馈是通过某种方式把系统的输出信号送回到输入端和输入信号相减(或加)的过程。凡使输出信号减弱者,称负反馈;凡使输出信号增强者称正反馈。

负反馈能增加系统的稳定性,减少畸变与失真,改善频率特性,减小元件参数或特性的变化对系统品质的影响以及减小某些非线性因素的影响等。正反馈能提高系统的灵敏度和选择性,但它是产生振荡的主要原因。在自动控制系统中,偏差信号的产生和被控量的控制都是由负反馈实现的,这种反馈称为主反馈。为了改善系统的品质,常常把某一部件的输出量反馈到它的输入端,形成局部反馈。若反馈信号与输出量成比例,则称为硬反馈或刚性反馈。若反馈信号与输出量的变化速度有关,则称为软反馈或柔性反馈。软反馈只是在过渡过程中起作用,而在稳定状态下,反馈作用就消失了。而硬反馈不仅在过渡过程中,而且在稳定状态下也起作用。

1.3 反馈控制系统的工作原理

反馈控制系统是利用自动装置将被控对象的输出信号(被控量)送回到输入端,并与给定值进行比较,形成偏差信号,调节器对偏差信号进行运算,根据运算结果发出信号去控制被控对象的输出量,使输出量与给定量的偏差保持在容许的范围之内。

图 5-1-1 所示的电子自动平衡电位差计是反馈控制系统的一例。它的输入信号是电压 U_x (毫伏),输出信号是指针的位移 x ,通过反馈补偿桥路将 x 转换成电压 U_{ob} ,并与输入电压 U_x 比较,当 $U_x = U_{ob}$ 时,偏差电压 $\Delta u = 0$,可逆电机的控制电压为零,可逆电机停转,指针指示 U_x 的值。当系统中出现干扰(如放大器的漂移、电源电压波动、电机负载的变动等)而引起指针位置的变动时, U_{ob} 也变动了, U_x 与 U_{ob} 之间出现了偏差 Δu ,经放大器放大后成 U_k 加到可逆电机的控制绕组上,可逆电机向 U_{ob} 趋于 U_x 的方向转动,直至 $U_{ob} = U_x$ 时为止。

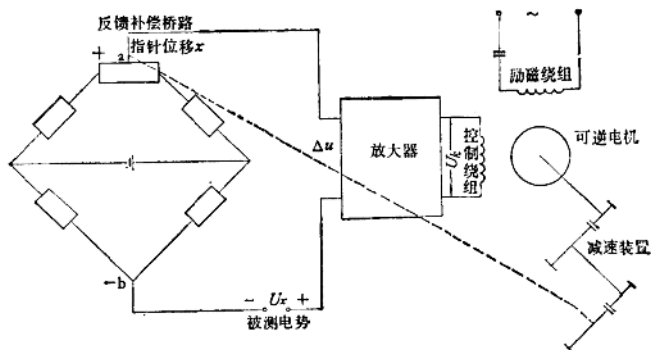


图 5-1-1 反馈控制系统实例——电子自动平衡电位差计原理图

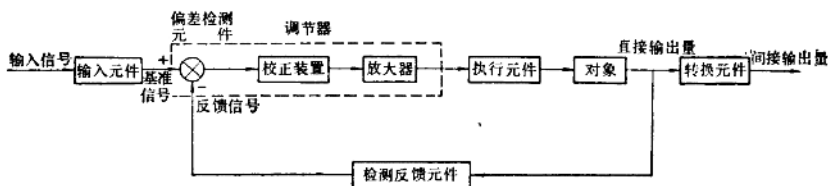


图 5-1-2 反馈控制系统的组成方框图

基于反馈原理构成的闭环控制方式在电力传动控制系统;石油化工、冶金、电力、轻工等连续生产工艺过程的自动控制系统;各种自动检测仪表、自动显示仪表、调节仪表、执行器中以及仿型机床中得到了广泛的应用。

反馈控制系统的特点是利用负反馈原理按偏差进行控制的,因此,由于不可预测的内外干扰而引起的偏差均能得到及时的纠正。

1.4 反馈控制系统的组成部件

一个反馈控制系统通常有以下几部分按图 5-1-2 组成。

- (1) 对象;
- (2) 输入元件;
- (3) 误差检测元件;
- (4) 放大器;
- (5) 校正装置;
- (6) 执行元件(或称执行器);
- (7) 检测反馈元件。

1.5 反馈控制系统的分类

按给定信号的特点可以分成定值控制系统;程序控制系统;随动系统三类。

定值控制系统的基本任务是在干扰作用下,实际的输出信号能控制在希望的给定值上。例如连续生产过程中的温度、压力、流量、液面、pH 值等工艺参数要求保持不变,轧钢中的厚度、电站的电流频率也要求保持在某个常数值上。

程序控制系统的特点是被控量的给定值不是一个固定不变的常数,而是一个已知的时间函数,或是某个变量的给定函数,例如加热炉及热处理炉的温度控制,要求温度按一定的时间程序和规律变化(自动升温、保温及降温等)。

随动系统(或称跟踪系统、伺服系统)是指给定值为未知的时间函数,要求输出量精确地随着给定值变化而变化。例如自动检测仪表是一个随动系统,它要求仪表或变送器的输出能精确地反应输入物理量的变化。

1.6 反馈控制系统的设计要点

一个性能良好的反馈控制系统至少必须符合:

- (1) 稳定的要求,并且有一定稳定裕量。
- (2) 静态精度(又称稳态精度)要求。它是指系统处于平衡状态时输出量与给定值之间的偏差。
- (3) 动态性能要求。通常是要求过渡过程曲线的形状、系统的零点和极点分布或频率特性满足一

定要求。

所谓过渡过程是指系统受到输入信号作用后, 输出量从一个平衡状态变化到另一个平衡状态之间的变化过程。

在设计一个自动控制系统时, 首先应取得对象的数学模型, 确定控制方案, 选择元部件, 有了这些原始资料之后就可以进行分析、综合和设计, 包括:

1. 稳定性的分析;
2. 静态精度的分析计算;
3. 动态品质的分析计算;
4. 校正装置的选择及参数计算。

2 拉氏(拉普拉斯)变换

拉氏变换是一种解线性微分方程的简便运算方法。利用拉氏变换能将线性微分方程转换成复变量的代数方程。微分方程的解可用拉氏变换表(表 5.1-1)或者用部分分式展开式(表 5.1-3)求出。获得的解是瞬态分量和稳态分量两部分。

利用拉氏变换再引进传递函数的方法, 就无需直接去解系统的微分方程, 而只要用图解法就能设

计分析系统。

我们规定

$f(t)$ ——时间 t 的函数, 而且当 $t < 0$ 时 $f(t) = 0$;

s ——复变量, $s = \sigma + j\omega$, σ 为实部, $j\omega$ 为虚部;

$\mathcal{L}$ ——运算符号, 放在某量之前, 表示对该量进行拉氏变换;

$F(s)$ —— $f(t)$ 的拉氏变换。

于是, $f(t)$ 的拉氏变换被定义为:

$$\mathcal{L}[f(t)] = F(s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st} dt$$

由复变量表达式 $F(s)$ 求对应的时间函数 $f(t)$ 的数学运算称做拉氏反变换, 用符号 $\mathcal{L}^{-1}$ 表示

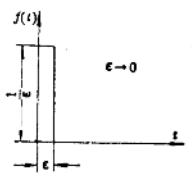
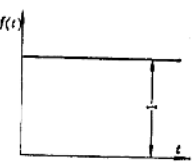
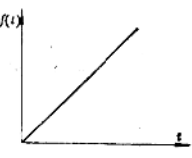
$$\mathcal{L}^{-1}[F(s)] = f(t)$$

表 5.1-1 给出常用函数的拉氏变换对照表, 应用这个表可以得到给定时间函数的拉氏变换, 或者由拉氏变换找到对应的时间函数。

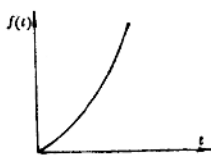
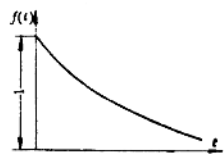
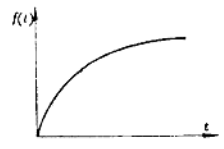
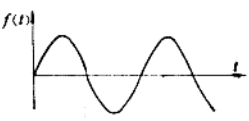
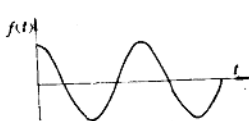
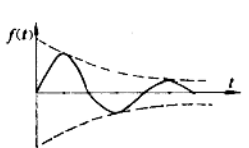
表 5.1-2 是拉氏变换的基本定理, 在线性系统的分析计算中很有用处。

表 5.1-3 是由一般的 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的计算式。

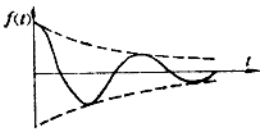
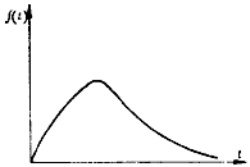
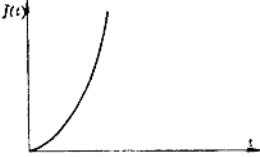
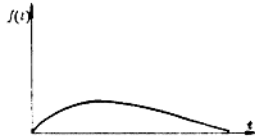
表 5.1-1 常用函数的拉氏变换和 Z 变换

序号	原函数 $f(t)$	$f(t)$ 的 波形 图	象 函 数 $F(s)$	Z 变 换 $F(z)$
1	$\delta(t)$ 单位脉冲函数		1	1 或 z^{-0}
2	$1(t) = 1, t \geq 0$ $1(t) = 0, t < 0$ 单位阶跃函数		$\frac{1}{s}$	$\frac{z}{z-1}$
3	t		$\frac{1}{s^2}$	$\frac{T_1 z}{(z-1)^2}$

(续)

序号	原函数 $f(t)$	$f(t)$ 的 波 形 图	象 函 数 $F(s)$	Z 变 换 $F(z)$
4	$\frac{1}{2}t^2$		$\frac{1}{s^3}$	$\frac{T_1^2 z(z+1)}{2(z-1)^3}$
5	e^{-at}		$\frac{1}{s+a}$	$\frac{z}{z-e^{-aT_1}}$
6	$1-e^{-\frac{t}{T}}$		$\frac{1}{s(Ts+1)}$	$\frac{(1-e^{-\frac{T_1}{T}})z}{(z-1)(z-e^{-\frac{T_1}{T}})}$
7	$\sin \omega t$		$\frac{\omega}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z \sin \omega T_1}{z^2 - 2z \cos \omega T_1 + 1}$
8	$\cos \omega t$		$\frac{s}{s^2+\omega^2}$	$\frac{z(z - \cos \omega T_1)}{z^2 - 2z \cos \omega T_1 + 1}$
9	$e^{-at} \sin \omega t$		$\frac{\omega}{(s+a)^2+\omega^2}$	$\frac{ze^{-aT_1} \sin \omega T_1}{z^2 - 2ze^{-aT_1} \cos \omega T_1 + e^{-2aT_1}}$

(续)

序号	原函数 $f(t)$	$f(t)$ 的 波形 图	象 函 数 $F(s)$	Z 变 换 $F(z)$
10	$e^{-at} \cos \omega t$		$\frac{s+a}{(s+a)^2 + \omega^2}$	$\frac{z^2 - ze^{-aT_1} \cos \omega T_1}{z^2 - 2ze^{-aT_1} \cos \omega T_1 + e^{-2aT_1}}$
11	te^{-at}		$\frac{1}{(s+a)^2}$	$\frac{T_1 ze^{-aT_1}}{(z - e^{-aT_1})^2}$
12	t^n		$\frac{n!}{s^{n+1}}$	$\lim_{\alpha \rightarrow 0} (-1)^n \frac{\partial}{\partial \alpha^n} \left(\frac{z}{z - e^{-\alpha T_1}} \right)$
13	$\frac{1}{\gamma - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\gamma t})$		$\frac{1}{(s+\alpha)(s+\gamma)}$	$\frac{1}{\gamma - \alpha} \left[\frac{z}{z - e^{-\alpha T_1}} - \frac{z}{z - e^{-\gamma T_1}} \right]$

注: 1. Z变换用于采样控制系统。式中 T_1 是采样函数的采样周期, 详见第4章。较详细的Z变换表可查阅有关采样控制理论书籍, 例如, 后列参考文献[4]。

2. 较详细的拉氏变换表可查阅专门手册。

表 5-1-2 拉氏变换的基本定理

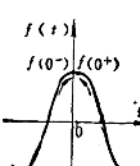
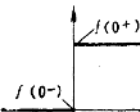
定 理	原 函 数 $f(t)$	象 函 数 $F(s)$	备 注
线 性	$Af_1(t) \pm Bf_2(t)$	$AF_1(s) \pm BF_2(s)$	$f(0^+)$ 的意义如下图所示
微 分	$\frac{df(t)}{dt}$	$SF(s) - f(0^+)$	
	$\frac{d^2f(t)}{dt^2}$	$S^2F(s) - Sf(0^+) - f'(0^+)$	
	$\frac{d^nf(t)}{dt^n}$	$S^nF(s) - S^{n-1}f(0^+) - S^{n-2}f'(0^+) - \dots - f^{(n-1)}(0^+)$	
积 分	$\int f(t)dt$	$\frac{F(s)}{S} + \frac{1}{S} \left[\int f(t)dt \right]_{t=0^+}$	
	$\int_0^t f(t)dt$	$\frac{F(s)}{S^2} + \frac{\left[\int f(t)dt \right]_{t=0^+}}{S^2} + \frac{\left[\int_0^t f(t)dt \right]_{t=0^+}}{S}$	
延 滞	$f(t-\tau)=0, 0 < t < \tau$ $f(t-\tau)=f(t), t \geq \tau$	$e^{-s\tau}F(s)$	
时 间 比例尺	$f\left(\frac{t}{a}\right)$	$aF(as)$	
初 值	$\lim_{t \rightarrow 0} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow \infty} sF(s)$	
终 值	$\lim_{t \rightarrow \infty} f(t)$	$\lim_{s \rightarrow 0} sF(s)$	
位 移	$e^{at}f(t)$	$F(s \mp a)$	
卷 积	$\int_0^t f_1(t-\tau)f_2(\tau)d\tau$ $= \int_0^t f_1(\tau)f_2(t-\tau)d\tau$	$F_1(s)F_2(s)$	

表 5-1-3 由一般的 $F(s)$ 求 $f(t)$ 的计算式

$F(s)$ 分母多项式根的类型	象 函 数 $F(s)$	原 函 数 $f(t)$	系数 c 的计算式
单 根	$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ $= \frac{A(s)}{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)}$ $= \frac{C_1}{s-r_1} + \frac{C_2}{s-r_2} + \dots + \frac{C_n}{s-r_n}$	$f(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}$	$c_1 = \lim_{s \rightarrow r_1} [(s-r_1)F(s)]$ $c_2 = \lim_{s \rightarrow r_2} [(s-r_2)F(s)]$ $\vdots$ $c_n = \lim_{s \rightarrow r_n} [(s-r_n)F(s)]$
重 根	$F(s) = \frac{A(s)}{B(s)}$ $= \frac{A(s)}{(s-r_1)(s-r_2)\dots(s-r_n)(s-r_j)^k}$ $= \frac{C_1}{s-r_1} + \frac{C_2}{s-r_2} + \dots + \frac{C_n}{s-r_n}$ $+ \left[\frac{c_{k1}}{(s-r_j)^k} + \frac{c_{k2}}{(s-r_j)^{k-1}} + \dots + \frac{c_{kk}}{(s-r_j)} \right]$	$f(t) = c_1 e^{r_1 t} + c_2 e^{r_2 t} + \dots + c_n e^{r_n t}$ $+ \left[\frac{c_{k1}}{(k-1)!} t^{(k-1)} + \frac{c_{k2}}{(k-2)!} t^{(k-2)} + \dots + c_{kk} \right] e^{r_j t}$	$c_1, c_2, \dots, c_n \text{ 按单根确定}$ $c_{k1} = [F(s)(s-r_j)^k]_{s=r_j}$ $c_{k2} = \frac{d}{ds} [F(s)(s-r_j)^k]_{s=r_j}$ $\vdots$ $c_{kk} = \frac{1}{(k-1)!} \left\{ \frac{d^{k-1}}{ds^{k-1}} [F(s)(s-r_j)^k] \right\}_{s=r_j}$

3 动态特性的数学描述

系改(或元件)受输入作用后,输出从一种状态变化到另一种状态,这种状态随时间的变化过程反映了系统(或元件)的动态特性。输入输出在变动状态时的关系称为动态特性。

线性元件或系统的动态特性可以用微分方程、脉冲过渡函数、阶跃过渡函数、传递函数、频率特性表示。

3.1 微分方程

控制系统可能由各种类型的元件或装置组成的,如电的、气动的、液压的、机械的、热力的、或者是混合式的,这些都可以用微分方程来加以描述。元件或装置以及系统的微分方程可以根据支配着具体系统的物理学定律列出,例如,机械系统中的牛顿定律;电系统中的克希霍夫定律和欧姆定律;气动、液压、热力系统中物料平衡定律和能量守恒定律等。

列出的若是常系数线性微分方程,则它所描述的系统称做线性系统。

〔例〕列写自动控制系统中作功率放大的直流发电机的微分方程。原理线路如图5-1-3所示,符号 R_f 、 L_f 、 R_g 、 L_g 分别表示励磁和电枢回路的电阻和电感。

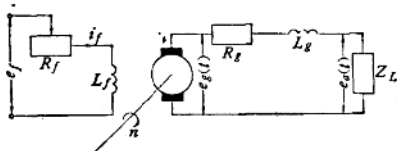


图 5-1-3 直流发电机原理线路图

根据电学的基本定律,列出励磁回路的微分方程,励磁电压 $e_f(t)$ 和励磁电流 $i_f(t)$ 有如下关系

$$e_f(t) = R_f i_f + L_f \frac{di_f}{dt} \quad (5.1-1)$$

感生的电枢电压 $e_g(t)$ 和励磁电流 i_f 有如下关系

$$e_g(t) = K_g i_f \quad (5.1-2)$$

式中 K_g 是发电机常数。

如取励磁电压 $e_f(t)$ 作输入,发电机电枢电压 $e_g(t)$ 作输出,把(5.1-2)代入(5.1-1)消去中间变量 i_f ,可得励磁电压 $e_f(t)$ 和发电机电枢电压 $e_g(t)$ 的关系式:

$$\frac{L_f}{R_f} \frac{de_g(t)}{dt} + e_g = \frac{K_g}{R_f} e_f(t) \quad (5.1-3)$$

实际系统中经常存在一些非线性因素,如两相交流可逆电动机转速 n 和转矩 T 的关系如图5.1-4,它是非线性的。

若电动机在额定转速 n_0 附近变动很小,这样,

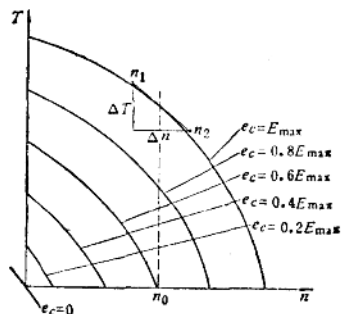


图 5.1-4 两相交流可逆电动机转速 n 和转矩 T 的关系曲线

在额定点附近的曲线可用过额定点的切线 $n_1 n_2$ 来近似。数学方法就是在额定工作点附近展开成泰勒级数并忽略高阶项,得到的就是线性方程。这是非线性系统线性化的方法。关于一般线性化的方法,可查后列参考文献[1]。

3.2 传递函数

用于描述线性常系数系统中给定的一对输入输出的动态特性。

3.2.1 定义

初始条件为零时,元件或系统的输出量的拉氏变换与输入量的拉氏变换之比称为传递函数。用符号 $G(s)$ 表示。

3.2.2 求取的方法

a. 由描述运动规律的微分方程来求取 设线性系统的运动方程有如下 n 阶常系数线性微分方程的形式:

$$\begin{aligned} a_n \frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \cdots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x \\ = b_m \frac{d^m u}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} u}{dt^{m-1}} + \cdots + b_1 \frac{du}{dt} + b_0 u \end{aligned}$$

对等式两边各项进行拉氏变换,考虑到初始条件为零,经过整理可得:

$$\begin{aligned} (a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0) X(s) \\ = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0) U(s) \end{aligned}$$

就可得系统的传递函数是

$$G(s) = \frac{X(s)}{U(s)} = \frac{b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_1 s + b_0}{a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0}$$

〔例〕求直流发电机的传递函数。(5.1-3)式是它的微分方程。

对(5.1-3)式等式两边进行拉氏变换得

$$\frac{L_f}{R_f} [sE_g(s) - e_g(0)] + E_g(s) = \frac{K_g}{R_f} E_f(s)$$

式中 $E_g(s)$ —— $e_g(t)$ 的拉氏变换

$E_f(s)$ —— $e_f(t)$ 的拉氏变换

$e_g(0)$ —— $e_g(t)$ 的初始值

根据传递函数定义得

$$G(s) = \frac{E_g(s)}{E_f(s)} = \frac{\frac{K_g}{R_f}}{\frac{L_f}{R_f}s + 1} = \frac{K_{FL}}{T_{FL}s + 1}$$

式中 $T_{FL} = \frac{L_f}{R_f}$ 是发电机电磁绕组的时间常数

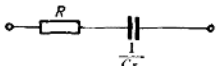
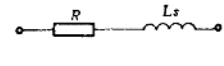
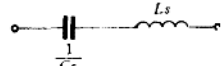
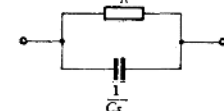
$K_{FL} = \frac{K_g}{R_f}$ 是发电机电压放大系数

b. 电路传递函数的列写方法(算子阻抗法)

以电流的拉氏变换为输入量, 电压的拉氏变换为输出量, 电阻 R 、电容 C 、电感 L 的传递函数为:

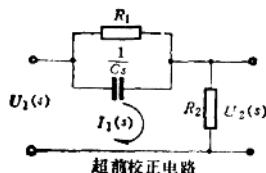
元件名称	传递函数 (算子阻抗)
电阻 R	$\frac{U(s)}{I(s)} = R$
电容 C	$\frac{U(s)}{I(s)} = \frac{1}{Cs}$
电感 L	$\frac{U(s)}{I(s)} = Ls$

算子阻抗的串联、并联的计算方法和一般电阻的串并联计算方法相同。如

形式	电 路	传递函数
串 联		$R + \frac{1}{Cs}$
串 联		$R + Ls$
串 联		$\frac{1}{Cs} + Ls$
并 联		$\frac{R \cdot \frac{1}{Cs}}{R + \frac{1}{Cs}}$

[例] 求下图所示的超前校正电路的传递函数

$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)}$, 输入量为 $U_1(s)$, 输出量为 $U_2(s)$ 。



根据电学定律和算子阻抗得

$$U_1(s) = U_2(s) + I_1(s) \frac{R_1 \frac{1}{Cs}}{R_1 + \frac{1}{Cs}} \quad (5.1-4)$$

$$I_1(s) = \frac{U_2(s)}{R_2} \quad (5.1-5)$$

将式(5.1-5)代入(5.1-4)得

$$U_1(s) = U_2(s) \left(1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{CR_1s + 1} \right)$$

$$F(s) = \frac{U_2(s)}{U_1(s)} = \frac{1}{1 + \frac{R_1}{R_2} \frac{1}{CR_1s + 1}} = \frac{1}{\gamma} \frac{\tau s + 1}{\tau s + 1}$$

$$\text{式中 } \tau = R_1C \quad \gamma = \frac{R_1 + R_2}{R_2}$$

3.2.3 特 点

传递函数是一种运算工具, 它把微分方程的运算转换成代数运算。已知系统的传递函数 $G(s)$ 后, 从它输入量的拉氏变换 $U(s)$ 就可以求出它的输出量的拉氏变换 $X(s)$

$$X(s) = G(s)U(s)$$

传递函数可以分解如下:

$$G(s) = K \frac{(s - z_1)(s - z_2)(s - z_3) \cdots (s - z_m)}{(s - p_1)(s - p_2)(s - p_3) \cdots (s - p_n)}$$

$$= \frac{M(s)}{D(s)}$$

它的分母部分等于零就是系统的特征方程式

$$D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_1 s + a_0 = 0$$

其根 $p_1, p_2, \cdots, p_n$ 为 $G(s)$ 的极点; 传递函数 $G(s)$ 的分子 $M(s) = 0$ 的根 $z_1, z_2, \cdots, z_m$ 称为零点。

传递函数是在复变量 s 域内描述系统的数学表达式, 因此只要知道传递函数 $G(s)$ 的零极点的分布位置就可以确定该系统的动态品质。

3.3 频率特性

3.3.1 物理意义

在线性元件(或系统)输入端加正弦信号, 它的稳态输出具有与输入同一频率的正弦信号, 但是输出的振幅、相角与输入不一定相同, 与系统结构参数

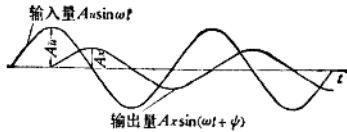


图 5-1-5 系统在正弦信号作用下的输出波形图

及输入信号的频率有关,见图 5-1-5。振幅变化的情况用输出正弦信号的振幅 A_x 与输入正弦信号的振幅 A_u 之比来表示

$$M(\omega) = \frac{A_x}{A_u}$$

称做幅频特性。

相角移动的情况用正弦输出对正弦输入的相移来表示,称做相频特性,记作 $\varphi(\omega)$,负相角称为相角滞后,正相角称为相角超前。

根据富利叶积分,一个脉冲信号或阶跃信号或周期性的非正弦信号可以看成是由各种频率的正弦波叠加而成的。而系统对输入信号的响应,也可看成是对各次输入谐波的响应之叠加。因此,为了在频率域中对线性系统全面的描述,必须掌握作为 ω 的函数的幅频特性和相频特性。作为频率特性的总体而言是反映动态特性的。

3.3.2 求取的方法

a. 从系统微分方程或传递函数求取 把传递函数 $G(s)$ 中的 s 用 $j\omega$ 代替,传递函数就转化成了频率特性 $G(j\omega)$ 。

b. 用实验方法测试 一般用超低频系列仪器测试,参阅参考文献[2]。

3.3.3 表示方法

频率特性是以频率为自变量的复变函数,它与系统的参数、结构有关,其数学表达式为

$$G(j\omega) = M(\omega)e^{j\varphi(\omega)} = P(\omega) + jQ(\omega)$$

其中 $G(j\omega)$ ——幅相频率特性

$M(\omega)$ ——幅频特性

$\varphi(\omega)$ ——相频特性

$P(\omega)$ ——实频特性

$Q(\omega)$ ——虚频特性

$$M(\omega) = \sqrt{P^2(\omega) + Q^2(\omega)}$$

$$\varphi(\omega) = \arctan \frac{Q(\omega)}{P(\omega)}$$

$M(\omega)$ 和 $\varphi(\omega)$ 通常采用极坐标图、对数坐标图、对

数幅相图三种图示法。

a. 极坐标图(或称奈奎斯特图) 是当 ω 由零变化到无穷大时矢量 $|G(j\omega)|/|G(j\omega)|$ 的轨迹。如图 5-1-6 所示。

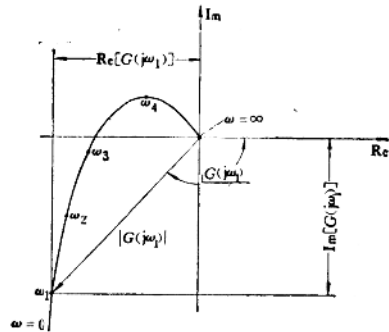


图 5-1-6 $G(s) = \frac{K}{s(T_1s+1)(T_2s+1)}$ 的极坐标图(正相角规定为从正实轴开始,以反时针旋转的相角)

用实验方法测试频率特性时采用极坐标图较为合适。

b. 对数坐标图(或称伯德图) 对数坐标图是由两张图所组成:一张纵坐标为 $20 \log |G(j\omega)|$,其中对数是以 10 为底,采用单位是分贝,它是均匀分度的;横坐标为 $\log \omega$,均匀分度,若用对数分度绘制,标以 ω [弧度/秒]。另一张纵坐标

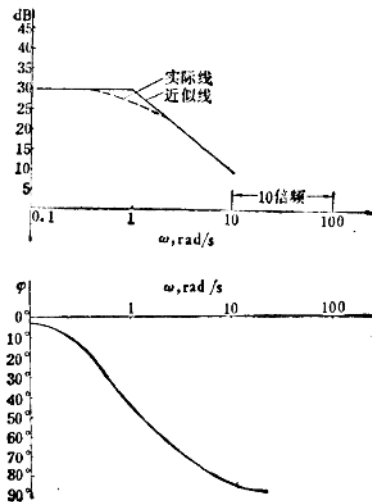


图 5-1-7 频率特性的对数坐标图(伯德图)

为角度[度]是均匀分度的。横坐标为 $\lg \omega$ 。如果采用对数分度, 标以 ω [弧度/秒]。如图 5-1-7 所示。

c. 对数幅相图(又名尼柯尔图) 这是可由开环对数频率特性求闭环对数频率特性的一种图线。它的纵坐标是开环幅值 $20\lg|G(j\omega)|$, 单位为分贝 [dB], 横坐标是开环相角 $\angle G(j\omega)$, 单位为[度], 如图 5-1-8 所示, 图中标有 dB 的曲线是闭环的幅值, 标有[度]的曲线是闭环的相角。尼柯尔图只适用于单位反馈控制系统, 即反馈回路的传递函数 $H(s)=1$ 的系统, 这时闭环传递函数 $\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)}$ 。如果不是单位反馈控制系统, 即 $H(s) \neq 1$, 这时闭环系统的传递函数为

$$\frac{C(s)}{R(s)} = \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)}$$

为了使用尼柯尔图, 把它的传递函数变化成

$$\begin{aligned} \frac{C(s)}{R(s)} &= \frac{G(s)}{1+G(s)H(s)} \\ &= \frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)} \cdot \frac{1}{H(s)} \end{aligned}$$

其中 $\frac{G(s)H(s)}{1+G(s)H(s)}$ 就是单位反馈控制系统的传递函数, 此时其开环传递函数为 $G(s)H(s)$, 由尼柯尔图查得的闭环幅频特性减去 $|H(j\omega)|$ dB, 闭环相频减去 $\angle H(j\omega)$ 后就得到所需的闭环特性。

使用尼柯尔图以前, 先绘制开环对数幅频、对数相频线(伯德图), 然后把不同频率下的开环幅值[dB]、开环相角[度]点绘在尼柯尔图上, 并把每一点的频率值标上, 再找出每个频率下的闭环幅值、闭环相角。例如有一单位反馈控制系统, 其开环传递函数为

$$G(s) = \frac{11.7}{s(1+0.05s)(1+0.1s)}$$

根据它的开环伯德图点绘出它的尼柯尔图, 如图 5-1-8 中的 $G(j\omega)$ 线。从尼柯尔图找出闭环幅频和闭环相角, 例如 $\omega=2$ 处, $G(j\omega)$ 曲线与等 $+0.10$ dB, 等 -10° 曲线相交, 因此 $\omega=2$ 的闭环幅值是 $+0.10$ dB, 闭环相角是 -10° 。其它频率下的

闭环幅值, 闭环相角用同样的方法查到。由此获得闭环的伯德图。

判断多环系统的稳定性需要用到尼柯尔图, 可参阅文献[1], 系统的分析、设计也可以在尼柯尔图

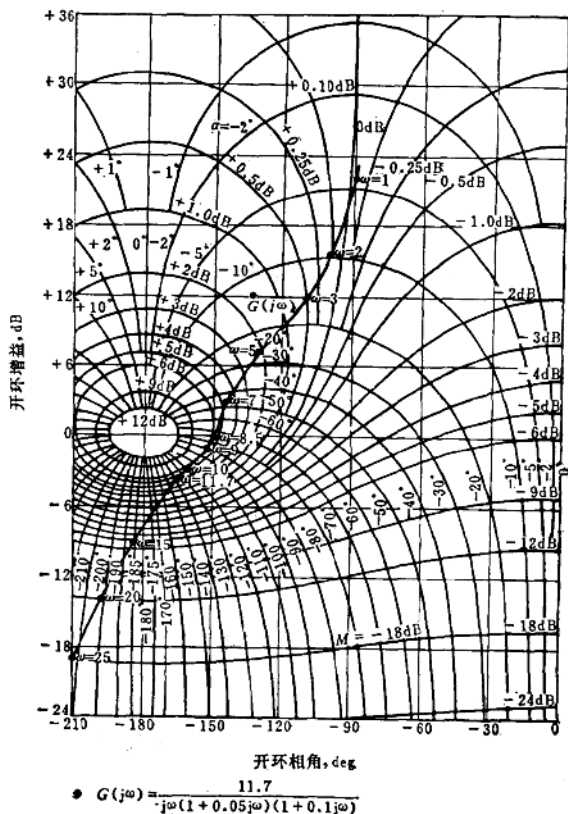


图 5-1-8 对数幅相图(尼柯尔图)

上进行, 可参阅文献[3]。

3.3.4 对数频率特性曲线的绘制

大多数传递函数都是由一些基本因子相乘而成的, 它的幅值等于每一基本因子的幅值的乘积, 相角为每一基本因子的相角代数和, 即

$$\begin{aligned} |G(j\omega)| &= |G_1(j\omega)| |G_2(j\omega)| \cdots |G_n(j\omega)| \\ \varphi(\omega) &= \varphi_1(\omega) + \varphi_2(\omega) + \cdots + \varphi_n(\omega) \end{aligned}$$

这些基本因子是: 增益放大系数 K ; 积分和微分因子 $(j\omega)^{\pm 1}$; 一阶因子 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$; 二阶因子

$$\left[1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-1}$$

由于这些数的对数相加等于这些数的乘积,所以

$$\begin{aligned} 20 \lg |G(j\omega)| &= 20 \lg |G_1(j\omega)| \\ &+ 20 \lg |G_2(j\omega)| \\ &+ 20 \lg |G_3(j\omega)| \\ &+ \cdots + 20 \lg |G_4(j\omega)| \end{aligned}$$

因此,就可以利用某传递函数中包含的基本因子绘制的曲线,按作图方法相加起来而制成该传递函数的对数坐标图。

a. 增益(放大系数)K 其对数幅值曲线是一条 $20 \lg K$ 分贝的水平直线,相角曲线是一条相角为零的水平直线,如图 5-1-9 所示。

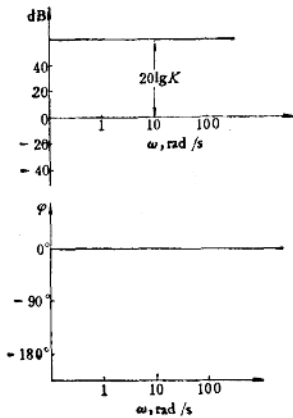


图 5-1-9 增益(放大系数)K的对数幅值曲线及相角曲线

b. 积分和微分因子 $(j\omega)^{\pm 1}$ 积分因子 $\frac{1}{j\omega}$ 的对数幅值为

$$20 \lg \left| \frac{1}{j\omega} \right| = -20 \lg \omega \text{ dB}$$

是一条斜率为 -20 分贝/十倍频程,经过 $\omega=1$ 时为零分贝的点的斜线。相角为一定值,等于 -90° ,如图 5-1-10 中曲线 a 所示。

微分因子 $j\omega$ 的对数幅值为

$$20 \lg |j\omega| = 20 \lg \omega$$

是一条斜率为 $+20$ 分贝/十倍频程,经过 $\omega=1$ 时幅值为零分贝的点的斜线。相角为一定值,等于 $+90^\circ$,如图 5-1-10 中曲线 b 所示。

如果传递函数包含 $(1/j\omega)^n$ 或 $(j\omega)^n$ 因子,其对数幅值分别为

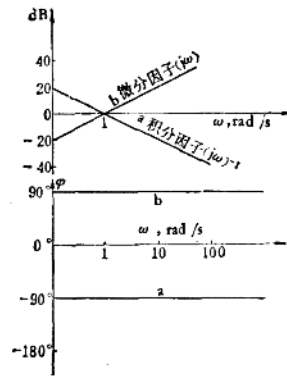


图 5-1-10 $(j\omega)^{\pm 1}$ 的对数幅值曲线及相角曲线

$$20 \lg \left| \frac{1}{(j\omega)^n} \right| = -20n \lg \omega \text{ dB}$$

及 $20 \lg |(j\omega)^n| = 20n \lg \omega \text{ dB}$
它们是斜率分别为 $-20n$ 分贝/十倍频程和 $+20n$ 分贝/十倍频程,经过 $\omega=1$ 时幅值为零分贝的斜线。
 $(\frac{1}{j\omega})^n$ 的相角在整个频率范围都等于 $-90^\circ \times n$,而
 $(j\omega)^n$ 的相角在整个频率范围内都等于 $90^\circ \times n$ 。

c. 一阶因子 $(1+j\omega T)^{\pm 1}$

一阶因子 $\frac{1}{1+j\omega T}$ 的对数幅值为

$$20 \lg \left| \frac{1}{1+j\omega T} \right| = -20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2} \text{ dB}$$

它的对数幅值渐近线由二条直线组成,低频段即 $\omega \ll \frac{1}{T}$ 时,其幅值为

$$-20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \lg 1 = 0 \text{ dB}$$

是一条零分贝的水平线。高频段,即 $\omega \gg \frac{1}{T}$ 时,其幅值为

$$-20 \lg \sqrt{1+\omega^2 T^2} \approx -20 \lg \omega T \text{ dB}$$

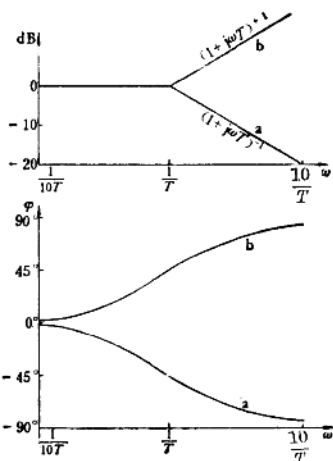
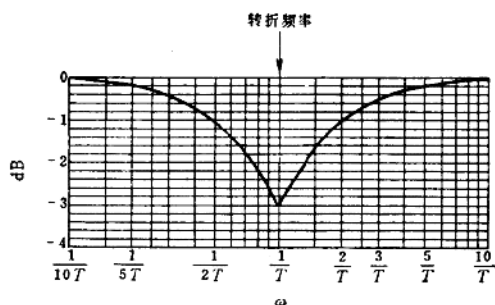
是一条经过 $\omega = \frac{1}{T}$ 时幅值为 0 分贝的斜率为 -20 分贝/十倍频程的斜线。如图 5-1-11,曲线 a 所示。

两条渐近线相交处的频率称为转折频率(或称交接频率)。

由于采用渐近线而在幅值曲线上产生的误差如图 5-1-12 所示。

一阶因子 $\frac{1}{1+j\omega T}$ 的精确相角为

$$\varphi(\omega) = -\arctan \omega T$$

图 5-1-11 $(1+j\omega T)^{-2}$ 对数幅值曲线及相角曲线图 5-1-12 $\frac{1}{1+j\omega T}$ 对数幅频渐近线所产生的误差

当频率由零增大到无穷大时, 其相角从 0° 变化到 -90° , 如图 5-1-11, 曲线 a 所示。

一阶因子 $1+j\omega T$ 的对数幅值和相角仅与 $\frac{1}{1+j\omega T}$ 相差一个负号, 它的高频渐近线的斜率为 $+20$ 分贝/十倍频程, 当频率由零增大到无穷大时, 其相角从 0° 变化到 $+90^\circ$ 。如图 5-1-11 曲线 b 所示。

d. 二阶因子 $\frac{1}{1+2\zeta(j\omega/\omega_n) + (j\omega/\omega_n)^2}$

其对数幅频特性为

$$20 \lg \left| \frac{1}{1+2\zeta \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2} \right|$$

$$= -20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

它的对数幅频渐近线由二条直线组成, 在低频段, 即

$\omega \ll \omega_n$ 时, 其幅值为

$$-20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

$$\approx -20 \lg 1 = 0 \text{ dB}$$

是一条 0 分贝的水平线。在高频段, 即

$\omega \gg \omega_n$ 时, 其幅值为

$$-20 \lg \sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2} \right)^2 + \left(2\zeta \frac{\omega}{\omega_n} \right)^2}$$

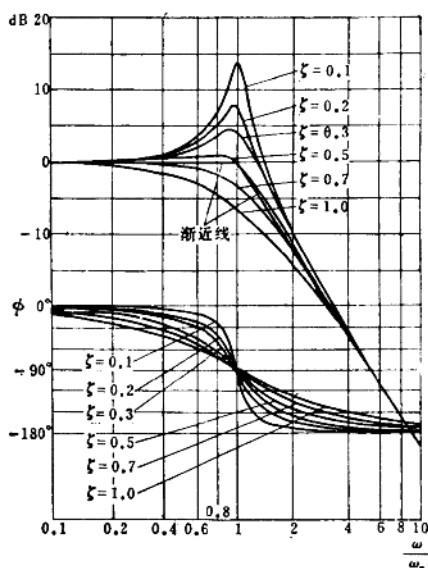
$$\approx -20 \lg \frac{\omega^2}{\omega_n^2} = -40 \lg \frac{\omega}{\omega_n} \text{ dB}$$

是一条经过 $\omega = \omega_n$ 时幅值为 0 分贝那一点的斜率为 -40 分贝/十倍频程的直线。转折频率为 ω_n , 如图 5-1-13 上部所示。

它的相角为

$$\varphi(\omega) = -\arctg \frac{2\zeta \frac{\omega}{\omega_n}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_n^2}}$$

对数相频特性曲线如图 5-1-13 下部所示。

图 5-1-13 二阶因子 $\frac{1}{1+2\zeta \frac{j\omega}{\omega_n} + \left(\frac{j\omega}{\omega_n} \right)^2}$ 对数

幅值曲线及相角曲线

e. 一般传递函数 它的对数频率特性曲线的绘制方法如下:

(1) 将传递函数分解成基本因子的乘积;

- (2) 定出放大系数和各基本因子的交接频率;
 (3) 绘制频率从0至最小交接频率的渐近线, 这渐近线是一条过 $\omega=1$ 时为 $20 \lg K$, 斜率为 $n \times \pm 20$ 分贝/十倍频程的直线, 若有 $\frac{1}{(j\omega)^n}$ 取 $-$, 有 $(j\omega)^n$ 取 $+$;
 (4) 过一交接频率渐近线就要改变斜率, 若 $(1+T_j\omega)^{\pm m}$, 要在原基础上再改变 $\pm m \times 20$ 分贝/十倍频程, 若

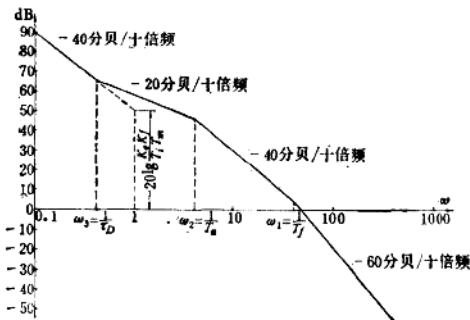
$$\left[1 + 2\zeta\left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right) + \left(\frac{j\omega}{\omega_n}\right)^2\right]^{-1}$$

要在原基础上再改变 $-l \times 40$ 分贝/十倍频程;

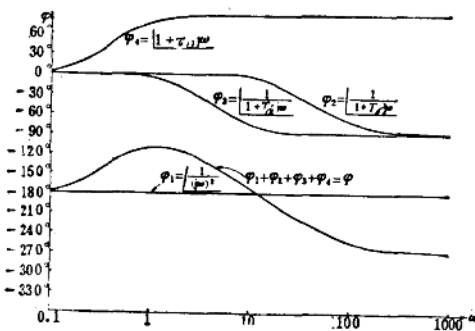
- (5) 整个相频曲线是由每个因子的相角相加而成的。

【例】绘制传递函数

$$G(s) = \frac{1+\tau_D s}{T_s s} \frac{K_\sigma}{1+T_\sigma s} \frac{1}{T_m s} \frac{K_f}{1+T_f s}$$



a) 对数幅频特性



b) 对数相频特性

图 5-1-14 $G(s) = \frac{1+\tau_D s}{T_s s} \frac{K_\sigma}{1+T_\sigma s} \frac{1}{T_m s} \frac{K_f}{1+T_f s}$ 的幅值曲线及相角曲线

- (1) 它是由放大系数 $K = \frac{K_\sigma K_f}{T_s T_m}$, 二个积分因子 $\frac{1}{(j\omega)^2}$, 二个相角落后的一阶因子 $\frac{1}{1+T_f j\omega}$, $\frac{1}{1+T_\sigma j\omega}$, 其交接频率分别为 $\omega_1 = \frac{1}{T_f}$, $\omega_2 = \frac{1}{T_\sigma}$, 一个相角超前的一阶因子 $1+\tau_D j\omega$, 其交接频率为 $\omega_3 = \frac{1}{\tau_D}$, 相乘而得的。假设 $\omega_1 > \omega_2 > \omega_3$ 。

- (2) 频率从 0 至 ω_3 的幅频渐近线是一条过 $\omega=1$ 时为 $20 \lg \frac{K_\sigma K_f}{T_s T_m}$, 斜率为 -40 分贝/十倍频程 (因为 $\frac{1}{(j\omega)^2}$), 直至 ω_3 , ω_3 相应的是相角超前的一阶因子的交接频率, 所以过 ω_3 以后渐近线由原来 -40 分贝/十倍频程改为 -20 分贝/十倍频程, 直至 ω_2 , ω_2 相应的是相角落后的一阶因子的交接频率, 所以过 ω_2 以后渐近线由原来的 -20 分贝/十倍频程改为 -40 分贝/十倍频程, 直至 ω_1 , ω_1 相应的是相角落后的一阶因子的交接频率, 所以过 ω_1 以后渐近线由原来的 -40 分贝/十倍频程改为 -60 分贝/十倍频程, 直至 $\omega \rightarrow \infty$ 。这样绘得完整的幅频特性曲线见图 5-1-14a。

- (3) 把每一个因子的相角在同一频率下相加得整个相频曲线。见图 5-1-14b。

3.4 脉冲过渡函数(脉冲反应函数、脉冲响应函数)

脉冲过渡函数是系统在单位脉冲输入作用下产生的输出过渡过程的数学描述。

从线性系统传递函数 $G(s)$ 、输出变量的拉氏变换 $X(s)$ 、输入变量的拉氏变换 $U(s)$ 的关系 $X(s) = G(s)U(s)$ 可知, 当输入为单位脉冲 $\delta(t)$ 时, (其拉氏变换等于 1) 则系统输出量的拉氏变换就是

$$X(s) = G(s)$$

脉冲过渡函数就等于传递函数的拉氏反变换

$$x(t) = g(t) = \mathcal{L}^{-1}[G(s)]$$

传递函数为 $G(s) = \frac{1}{Ts+1}$ 的一阶系统的脉冲过渡函数为(见图 5-1-15)

$$g(t) = \frac{1}{T} e^{-\frac{t}{T}}$$

传递函数为 $G(s) = \frac{\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2}$ 的二阶系统的脉冲过渡函数为(见图 5-1-17a)

$$0 \leq \zeta < 1 \quad g(t) = \frac{\omega_n}{\sqrt{1-\zeta^2}} e^{-\zeta\omega_n t} \sin(\omega_n \sqrt{1-\zeta^2} t)$$

$$\zeta = 1 \quad g(t) = \omega_n^2 t e^{-\omega_n t}$$