高等数学引论

第二卷　第一分册

华罗庚

科学出版社

高等数学引论

第二卷 第一分册

华 罗 庚

科 学 出 版 社

1 9 8 1

内 容 简 介

本书主要介绍复变函数论的一般理论．书中涉及的方面较多，例如第十一章求和法及第十二章适合各种边界条件的调和函数等内容，在一般的复变函数教材中均未论及．书中不少地方采用由特殊到一般的写法，有助于读者对问题的理解．

本书可作为高等学校教学参考用书．

高等数学引论

第二卷　第一分册

华罗庚 著

*

科学出版社出版

北京朝阳门内大街137号

中国科学院印刷厂印刷

新华书店北京发行所发行　各地新华书店经售

*

1981年6月第一版　开本：787×1092　1/16

1981年6月第一次印刷　印张：18 1/2

印数：精 1—6,160　平 1—6,720　插页：精3　平2

字数：427,000

统一书号：13031·1574

本社书号：2159·13—1

定价：布脊精装 3.75 元　平装 2.95 元

序　　言

本书是1963年我在中国科学技术大学讲授高等数学时所用的讲义，主要论述复变函数论的一般理论，作为《高等数学引论》的第二卷第一分册出版.

那本讲义在讲授后曾作过较大的修改，可惜修改稿在"四害"横行时已被遗失了. 这份稿子是由仅能找到的原来科大的印刷稿稍加校订而成的. 考虑到《高等数学引论》第一卷出版至今已有十五年，广大读者希望能早日看到第二卷的出版. 如果这一分册全部重新改写，我的工作情况和身体条件也许会使这一分册的出版再推迟很长时间. 好在现在的版本基本上能反映作者的一些观点，所以为了争取时间也就不揣冒昧，将这一分册以现在的形式呈献给读者，并希望阅读后提出宝贵意见，以便再版时修正.

无比感谢党和人民对我的关怀和期望. 我决心以毛主席"为人民服务"的教导严格要求自己，争取在有生之年，把这套书写完整，写到底，为党为人民多做些工作，以报答党的恩情于万一.

华　罗　庚

一九七八年一月十九日于北京医院

目　　录

第一章　复数平面上的几何

§1. 复数平面

一个复数可以写成为

$$z = x + yi. \tag{1}$$

这儿 x 与 y 都是实数，x 称为 z 的实数部分，y 称为 z 的纯虚部分，各以 $Rz(=x)$，$Iz(=y)$ 表之．如果两个复数的实部和纯虚部分别相等，我们就说这两个复数相等．$x-yi$ 称为 z 的共轭数，以 $\bar{z}$ 表之．

对复数的运算我们作如下规定：任给两个复数 $z_1 = x_1 + iy_1$，$z_2 = x_2 + iy_2$，

两数之和为
$$z_1 + z_2 = x_1 + x_2 + i(y_1 + y_2),$$
两数之积为
$$z_1 z_2 = x_1 x_2 - y_1 y_2 + i(x_1 y_2 + y_1 x_2).$$

在平面上取垂直坐标系．对应于一个复数(1)，我们有一点 P，它的坐标是 (x, y)，这点称为复数 z 的写象．这样就建立起复数与平面上的点之间的一一对应的关系．实数对应于 x 轴上的点，因此 x 轴有时也称为实轴．同样原因，y 轴也称为虚轴．今后我们不再区别复数与平面上的点，例如，如果我们说点 $1+i$ 就是指 $x=1$，$y=1$ 所代表的点．

从原点 O 到 P 作一线段，称为矢量 $\overrightarrow{OP}$．对应于一个复数有一个由原点出发的矢量，反之亦然．而且，复数的和对应于矢量之和．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 的长度

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{z\bar{z}}$$

称为 z 的绝对值或模，以 $|z|$ 表之．矢量 $\overrightarrow{OP}$ 与 x 轴的交角 θ 称为辐角，以 $\theta = \arg z$ 表之．度量的方向以反时针方向为正，显然有

$$z = x + yi = \rho(\cos\theta + i\sin\theta) = \rho e^{i\theta} = |z|e^{i\arg z}. \tag{2}$$

不难证明：在此表示法下，两复数 $z_1 = \rho_1 e^{i\theta_1}$，$z_2 = \rho_2 e^{i\theta_2}$ 之积为 $z_1 z_2 = \rho_1\rho_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}$．必须注意辐角是不唯一的．$(\rho, \theta)$ 固然代表 z，而 $(\rho, \theta + 2\pi)$ 也代表 z．更一般地说

$$\varphi = \operatorname{Arg} z = \begin{cases} \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + 2k\pi \ (\text{如果 } z \text{ 在 I, IV 象限}) \\ \\ \operatorname{arctg}\dfrac{y}{x} + (2k+1)\pi \ (\text{如果 } z \text{ 在 II, III 象限}) \end{cases}$$

这儿 k 是任意整数，而 arctg 表示适合于

$$-\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg}\frac{y}{x} \leqslant \frac{\pi}{2}$$

的反正切函数．适合于

$$-\pi < \varphi = \arg z \leqslant \pi$$

的 φ 称为主值，以 $\arg z$ 表之．

这样表示复数的平面称为 Argon 平面或 Gauss 平面，或迳称为复平面．

以 c（复数 $\beta + i\gamma$）为圆心，以 ρ（实数）为半径的圆的方程式是

$$|z - c| = \rho, \tag{3}$$

也就是 $(z-c)(\overline{z-c}) = \rho^2$，即

$$z\bar{z} - \bar{c}z - c\bar{z} + c\bar{c} = \rho^2.$$

更一般些，考虑

$$\alpha z\bar{z} - c\bar{z} - \bar{c}z + \delta = 0, \tag{4}$$

这儿 α，δ 是实数，当 $\alpha = 0$ 时，(4) 代表直线

$$\beta x + \gamma y - \frac{\delta}{2} = 0.$$

这是一般的直线方程．如果 $\alpha \neq 0$，则由 (4) 得

$$\left(z - \frac{c}{\alpha}\right)\left(\overline{z - \frac{c}{\alpha}}\right) = \frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}.$$

如果 $c\bar{c} > \delta\alpha$，则 (4) 代表以 $\frac{c}{\alpha}$ 为圆心，$\sqrt{\frac{c\bar{c}}{\alpha^2} - \frac{\delta}{\alpha}}$ 为半径的圆．当 $c\bar{c} = \delta\alpha$ 时，(4) 所代表的圆化为一点 $\frac{c}{\alpha}$，称为点圆． 当 $c\bar{c} < \delta\alpha$ 时，(4) 没有实轨迹，则 (4) 代表一个虚圆．

附记．把 (4) 的系数列成为

$$H = \begin{pmatrix} \alpha & -\bar{c} \\ -c & \delta \end{pmatrix}.$$

这是一 Hermitian 方阵．一个 Hermitian 方阵代表一个圆，反之，不同的 Hermitian 方阵可能代表同一圆． 不难证明，两个 Hermitian 方阵代表同一圆的条件是它们相差一个实数因子．

如果H的行列式是正的，则它代表虚圆；负的，代表实圆；0 代表点圆．

§2. 复平面上的几何学

考虑变换(或称变形)

$$w = az + b, \quad a \neq 0. \tag{1}$$

(a, b 是复的常数)对应于一个复数 z，我们有一个复数 w，并且可以解得

$$z = \frac{1}{a}w - \frac{b}{a}. \tag{2}$$

而对应于一个 w，也有唯一的一个 z，因此变换 (1) 把复平面一一对应地变为其自己．又如

$$z = a_1 z_1 + b_1, \quad a_1 \neq 0,$$

则得

$$w = a(a_1 z_1 + b_1) + b = aa_1 z_1 + ab_1 + b.$$

依旧如 (1) 的形式，即连续施行两次形如 (1) 的变形依然是形如 (1) 的变形，这些性质可以概括为“群”的概念．所有的形如 (1) 的变换称为成一整线性变换群．

我们现在先研究在此变换群之下的“几何学”．

首先，任何一点可以变为任何一点，即如果给了任何二点 z_0 及 w_0 我们可以找到一个

形如 (1) 的变换把 z_0 变为 w_0. 显然

$$w = z + (w_0 - z_0)$$

有此功能,这一性质称为可递性,即在整线性变换群下,复平面成一可递集合.

其次,任何两点可以变为任何两点,例如变形

$$w = \frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} \tag{3}$$

可以把 z_1 变为 w_1, 把 z_2 变为 w_2.

再次考虑三个点的问题,并不是任意三点都能变为任意三点. 三点 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3 的条件是

$$\frac{w_2 - w_1}{w_3 - w_1} = \frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}. \tag{4}$$

显然 (3) 把 z_1, z_2 变为 w_1, w_2. 又由 (4) 可知

$$\begin{aligned}\frac{w_1 - w_2}{z_1 - z_2} z_3 + \frac{z_1 w_2 - z_2 w_1}{z_1 - z_2} &= w_1\left(\frac{z_3 - z_2}{z_1 - z_2}\right) + w_2\left(\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right) \\ &= w_1\left(\frac{w_3 - w_2}{w_1 - w_2}\right) + w_2\left(\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right) = w_3,\end{aligned}$$

即如果条件 (4) 适合,则 (3) 就把 z_1, z_2, z_3 依次变为 w_1, w_2, w_3. 反之,如果

$$w_i = a z_i + b,$$

则得

$$\begin{vmatrix} w_1 & z_1 & 1 \\ w_2 & z_2 & 1 \\ w_3 & z_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

这等价于 (4). 概括起来可以作如下的说法: 三点定一比 $\left(\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1}\right)$, 三点可以依次变为另三点的必要且充分条件是比值相等.

比值的几何意义是什么? 命

$$\frac{z_2 - z_1}{z_3 - z_1} = \rho e^{i\theta}.$$

ρ 是三角形两边边长之比, 而 θ 是夹角, 也就是如果两个三角形有一角相等, 夹这角的两边的比例相等,则可以由整线性变换把其一变为另一.

刚才是以点为对象的几何学,现在以直线及圆为对象来进行研究,变形 (1) 显然变直线为直线,变圆为圆.

直线的一般形式是

$$I(cz + d) = 0. \tag{5}$$

变换 $w = cz + d$ 把直线 (5) 变为 $Iw = 0$, 即变为实轴, 因此复平面上的任一直线可经过整线性变换变为实轴, 也就是直线成一可递集合.

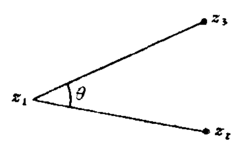

图 1

两条直线可以变为两条直线的必要且充分条件是前二直线的夹角等于后二直线的夹角,读者试自证之.

圆的一般形式是

$$(z-c)(\overline{z-c})=\rho^2.$$

经变换 $z-c=\rho w$ 可以变为 $w\bar{w}=1$，即以原点为中心的单位圆．因此，任何(实)圆都可以变为单位圆，也就是在整线性变换群之下，(实)圆成一可递集．

读者试自求出两圆变为两圆的必要且充分条件，先分相交不相交，相交的看交角，不相交的看什么？

§3. 线性变形（Möbius 变形）

现在研究比整线性变换群更一般的群：这群是由形如

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0 \tag{1}$$

的变换所组成的，特别当 $c=0$ 时这就是整线性变换．由所有的形如 (1) 的变换所成的集合称为线性变换群．变换 (1) 称为线性变换或 Möbius 变换或称射影变换．显然 (1) 有逆变换

$$z=(dw-b)/(-cw+a). \tag{2}$$

也不难证明连续施行两次形如 (1) 的变换其结果仍然是形如 (1) 的变换，所得出的变换称为前两变换之积．

但有一点需注意，(1) 并不把复平面一对一地变为其自己，由 (1) 可见并无 w 与 $z=-\dfrac{d}{c}$ 对应，由 (2) 可见并无 z 点可以对应于 $w=\dfrac{a}{c}$．

如果要求一一对应，我们势必要扩充我们的复平面．加上一个无穷远点，即 (1) 把 $-\dfrac{d}{c}$ 变为无穷远点 $w=\infty$．而 $z=\infty$ 这一点经 (1) 而变为 $\dfrac{a}{c}$．

加上无穷远点的平面称为函数论平面或称一维复射影空间．一维复射影几何学就是研究在一维射影群下，一维射影空间的性质．

较严格的定义如下考虑：非全为零的一对复数 (z_1, z_2)，如果有一个复数 $p(\neq 0)$ 使

$$z_1=pw_1,\quad z_2=pw_2,$$

则两个复数对 (z_1, z_2) 及 (w_1, w_2) 称为等价，用符号

$$(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$$

表之．等价关系显然有以下的三性质：

(i) $(z_1, z_2)\sim(z_1, z_2)$；

(ii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，则 $(w_1, w_2)\sim(z_1, z_2)$；

(iii) 若 $(z_1, z_2)\sim(w_1, w_2)$，$(w_1, w_2)\sim(u_1, u_2)$，则 $(z_1, z_2)\sim(u_1, u_2)$．

依等价关系把所有的非 0 复数对分类，凡等价的归一类，不同类的对一定不等价．每一类定义一点，这些点的集合便成一维射影空间．如果 $z_2\neq 0$，则 $\dfrac{z_1}{z_2}=z$ 就是普通复平面上的点，而 (z_1, z_2) 称为点 z 的齐次坐标，这说明与 (z_1, z_2) 同一类的 (pz_1, pz_2) 也代表同一点 z．如果 $z_2=0$，则 (z_1, z_2) 代表无穷远点，由于 $(z_1, 0)\sim(1, 0)$，所以无穷远点是唯一的．

在齐次坐标下线性变换也可以写成为

$$\begin{cases} w_1 = az_1 + bz_2, \\ w_2 = cz_1 + dz_2, \end{cases} \quad \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0, \tag{3}$$

用矩阵符号可以写成为

$$(w_1, w_2) = (z_1, z_2)\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}.$$

注意,并不是对应于一个方阵 $\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 就有一个变换.

由于等价关系,对任一 $p(\neq 0)$, $\begin{pmatrix} ap & cp \\ bp & dp \end{pmatrix}$ 也代表相同的变换,这一点从 (1) 也显然可以看出,因为分子分母同乘一数 p, 其值不变.

方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$$

也称为变形 (1) 的方阵,但需注意,对任一 $p \neq 0$, $p\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ 都是代表同一变换.

对应于方阵

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix}$$

的两个变形之积的方阵等于所对应的方阵之积

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & c_1 \\ b_1 & d_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aa_1 + b_1c, & ac_1 + cd_1 \\ ba_1 + db_1, & c_1b + dd_1 \end{pmatrix}.$$

§4. 群 与 分 群

定义 1. 如果一个线性变换的集合适合于以下的三条件则称为成一个群:

(i) 包有单位变换: $w = z$.

(ii) 包有逆变换: 即如果它包有 $w = (az + b)/(cz + d)$, 则也包有

$$w = (dz - b)/(-cz + a).$$

(iii) 包有其中任二变换之积: 即如果它包有

$$w = (az + b)/(cz + d),\ w = (a_1z + b_1)/(c_1z + d_1),$$

则也包有

$$\begin{aligned} w &= [a(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + b]/[c(a_1z + b_1)/(c_1z + d_1) + d] \\ &= [(aa_1 + bc_1)z + (ab_1 + bd_1)]/[(ca_1 + dc_1)z + (cb_1 + dd_1)]. \end{aligned}$$

定义 2. 一个群的一部分如果也成一群,则这部分称为原群的分群(或子群).

例 1. 所有的线性变换成一群.

例 2. 所有的整线性变换成一群,这是线性变换群的分群.

例 3. 所有的形如 $w = z + a$ 的变换成一群,称为平移群,它是整线性变换群的分群. 整线性变换群之另一分群是

$$w = az,\ a \neq 0.$$

而这个群又有两个重要分群. 对正数 k, 所有的形如 $w = kz$ 的变换所成的群, 称为放

大缩小群．对所有的绝对值等于1的数 $e^{i\theta}$, $w=e^{i\theta}z$ 成一个群，称为旋转群．

例 4. 对实数 a, b, c, d,

$$w=(az+b)/(cz+d),\quad ad-bc\neq 0$$

也成一群，称为实群．适合于 $ad-bc=1$ 的成一实群的分群．

例 5. 形如

$$w=(az-b)/(\bar{b}z+\bar{a}),\quad a\bar{a}+b\bar{b}=1$$

的变形也成一群，称为酉群．

例 6. 形如

$$w=az+b,\quad |a|=1$$

的变换成一群．如果写成实数的形式，即命

$$w=u+iv,\quad z=x+iy,\quad a=e^{i\theta},\quad b=p+iq,$$

则得

$$u=x\cos\theta-y\sin\theta+p,$$
$$v=x\sin\theta+y\cos\theta+q.$$

这就是我们所习知的刚体运动，即旋转与平移，因此这群也可以称为刚体运动群．

例 7. 形如

$$w=e^{i\theta}\frac{z-a}{1-\bar{a}z}$$

的变形也成一群．这群称为非欧运动群，或称 Лобачевский 群．

例 8. 所有的形如

$$w=z+\omega k,\quad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots$$

的变换成一群，称为以 ω 为周期的群．它是以下的双周期群的子群，

$$w=z+\omega l+\omega' k,\quad l, k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots.$$

例 9. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的整数，则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的线性变换也成一群，称为模群．

例 10. 如果 a, b, c, d 是适合于

$$ad-bc=1$$

的复整数（如果 α_1, α_2 都是整数，$a=\alpha_1+\alpha_2 i$ 称为复整数．），则形如

$$w=(az+b)/(cz+d)$$

的变形也成一群．

定义． 在一群 G 中如果可以找出一批变换，使 G 中任一变换都可表为这些变换及其逆变换之积，则这批变换称为群的演出元素．

例 11. 例 8 中所给的群，以

$$w=z+\omega$$

为周期群的演出元素．而双周期群以

$$w=z+\omega,\quad w=z+\omega'$$

为其演出元素.

例 12. 整线性变换所成的群,可以由以下诸元素演出之:

(i) $w = z + b$, (平移),

(ii) $w = e^{i\theta}z$, (旋转),

(iii) $w = kz$, (放大缩小), $k > 0$.

“放大缩小”或称“仿射”. 演出元素有以下的功用: 任何一个性质经平移,旋转,仿射而不变,则经整线性变换也不变. 例如,两直线的夹角. 反之,如两点间的距离虽经平移与旋转不变,但它经仿射而变化,因此距离在整线性变换群下是可能变化的.

例 13. 再看线性群,由于

$$w = (az + b)/(cz + d),\ c \neq 0$$

可以变为

$$w = \frac{a}{c} + z',\ z' = \frac{1}{z''},\ z'' = \frac{c(cz + d)}{bc - ad}$$

之积,因此这群可由整线性变换群添加 $w = \frac{1}{z}$ 而得之. (如果 $c = 0$, 则本身就是整线性变换,毋待多论.)因此,线性变换可以由平移,仿射,旋转及 $w = \frac{1}{z}$ 演出之.

§ 5. Neumann 球

为了把无穷远点讲得更清楚,我们引进球面投影法,建立起球面与平面的关系.

作一球, 其半径为 1, 其球心在原点. 设球面动点为 $P(\xi, \eta, \zeta)$, 则此球面的方程式是

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1. \tag{1}$$

从点 $N = (0, 0, 1)$ 把球上之一点 $P = (\xi, \eta, \zeta)$ 投影于 ξ-η 平面上之一点 $Q = (x, y)$. 命 T 为以 ON 与 OQ 为边的矩形的另一顶点. 命 SPF 平行于 NO, 命 FG 与 QH 平行于 η 轴, 则 $OG = \xi$, $FG = \eta$, $PF = \zeta$, $OH = x$, $QH = y$. 由于三角形 NSP 与 NTQ 的相似性,可知

$$(1 - \zeta):1 = SP:TQ = NS:NT = OF:OQ = \eta:y = \xi:x.$$

所以

$$x = \frac{\xi}{1 - \zeta},\ y = \frac{\eta}{1 - \zeta}. \tag{2}$$

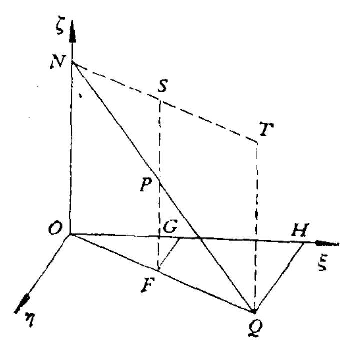

图 2

由 (1) 可知

$$1 + x^2 + y^2 = \frac{(1 - \zeta)^2 + \xi^2 + \eta^2}{(1 - \zeta)^2} = \frac{1 - 2\zeta + 1}{(1 - \zeta)^2} = \frac{2}{1 - \zeta}.$$

因此

$$\xi = \frac{2x}{r},\ \eta = \frac{2y}{r},\ \zeta = 1 - \frac{2}{r},\ r = 1 + x^2 + y^2. \tag{3}$$