现代电信理论与系统

〔美〕H. 斯塔克　F. B. 屠特尔　著

郭庆勋　等译

下

高等教育出版社

现代电信理论与系统

下　册

〔美〕H. 斯塔克　F. B. 屠特尔 著
郭庆勋 等译

高等教育出版社

本书是美国七十年代无线电类研究生和大学生用的无线电系统方面的教科书。它紧凑地概括了傅里叶分析、线性系统理论与概率论等基本理论及通信、电视、雷达、图象处理等领域的基本课题。

全书共十三章，译文分为上、下两册出版。上册包括导言、傅里叶方法、线性电路和滤波器、取样和脉冲调制、离散系统理论、幅度调制系统和电视、角度调制；下册包括概率初步、随机变量、随机过程、信号处理、雷达和声纳、图象处理系统和二维变换。书中着重基本概念和数学分析。系统用方框图、波形图和频谱图等说明，不涉及具体电路和设备。分析精炼概括，对于已成熟的系统的性能作了分析归纳，还介绍了 VCO、锁相、有源滤波器及数字技术、信号处理、图象处理和二维变换等新兴技术。全书配备大量习题，作者把一些公式的推导留给读者作为练习，使全书内容虽然领域宽广但却很精炼。

本书可供无线电类研究生作一个学期或大学本科生作一学年选用的教材，也可供科技人员作为了解现代无线电通信系统方面的参考书。

MODERN ELECTRICAL COMMUNICATIONS

Theory and Systems

Henry Stark/Franz B. Tuteur

Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N. T., 1979.

责任编辑　李永和

现代电信理论与系统

下　册

〔美〕H. 斯塔克　F. B. 屠特尔 著

郭庆勋　等译

*

高等教育出版社出版

新华书店北京发行所发行

人民教育出版社印刷厂印装

*

开本 850×1168 1/32　印张 9.5　字数 229.000

1982 年 6 月第 1 版　1983 年 10 月第 1 次印刷

印数 00,001— 8,500

书号 15010·0412　定价 1.50 元

目　　录

第八章 概率初步

8.1 引言

在本章中我们介绍概率论的一些基本概念。我们假定读者具有集论的入门知识且略懂一些集合的概念和运算等。本章的内容是完全标准化的，在一些出色的书如帕尔真 [8-1] 和帕普里斯 [8-2]的著作中有更深入的论述。

概率作为出现频率的量度

要定义某事件E的概率，方法之一是进行n次试验，若以n_E代表事件E发生的次数，则事件E发生的概率定义为

$$P(E)=\lim_{n\to\infty}\frac{n_E}{n} \tag{8.1-1}$$

十分明显，由于$n_E\leqslant n$，因此必有$0\leqslant P(E)\leqslant 1$。这个方法的一个困难在于我们不可能实现无限多次试验，因而只能利用有限次试验的数据去估计 $P(E)$ 的值。其次，我们假定了当n趋于无限大时n_E/n在某种意义上趋于一个极限。但是如果考虑当抛掷一枚匀称的硬币 1000 次时，刚好有 500 次出现正面①的可能性是十分小的；事实上，如果抛掷 10000 次，则正面刚好出现 5000 次的可能性更小了；当$n\to\infty$，则正面刚好出现$n/2$次的可能性变得几乎为零了。对一枚匀称的硬币，我们凭直觉便要求P(正面)$=1/2$。假如我们任选一个数字$\delta>0$，如果硬币的确是匀称的，则我们从试

① 原文 Head 意译为“正面”，下文中 Tail 意译为“反面”。——译注

验中会发现当 n 变大时，满足式

$$\left|\frac{n_E}{n}-\frac{1}{2}\right|>\delta \qquad (8.1\text{-}2)$$

的次数将变得十分少。这样，虽然在这个试验的各个阶段(尤其是当 n 很大时)，n_E/n刚好为1/2的情况极为少见，但是这个比值却是在 1/2 附近徘徊的，而在式(8.1-2)的意义上远离 1/2 的次数将变得十分少。

虽然用频率来定义概率存在上述这些问题，但是在把概率论应用于物理世界方面，相对频率的观念还是很重要的。

概率作为有利次数与总次数的比值

这种定义概率的方法不是依靠试验，而是依靠于先验方式①计算事件的概率。具体地说，就是计算在总数为N的各个可能的结果之中，事件E发生的结果的个数 N_E，然后把比值 N_E/N 作为事件E 的概率；这里的大前提是，认为所有N个可能结果的出现具有相同可能性。由于“相同可能性”是相等概率的同义语，所以这个推导在某种意义上说是循环的。假设我们投掷两颗均匀的骰子，现来求所出现的总点数为 7 的概率。在表 8.1-1 中，把掷得的结

表 8.1-1

		骰子I					
		1	2	3	4	5	6
骰子II	1	2	3	4	5	6	7
	2	3	4	5	6	7	8
	3	4	5	6	7	8	9
	4	5	6	7	8	9	10
	5	6	7	8	9	10	11
	6	7	8	9	10	11	12

① 先验方式 (a priori) 是指由不言而喻的命题或试验前的预先假定来进行推理的方式；而后验方式(a posteriori)则意味着是由观测到的事实进行推理的方式。

果划分为36个可能的等概的结果，每一项是一种可能结果，这里我们认为这两粒骰子是可区分的，这样，可能的结果的总数 $N=36$，而总点数为 7 的结果的数目则为 $N_7=6$，于是得到

$$P(\text{总点数为 }7)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$$

举例

把一枚匀称的硬币抛掷两次(请注意，因为不希望牵涉到要进行物理实验，所以把硬币假定为理想地匀称是毫无问题的)。各个可能的结果为 HH(正正)、HT(正反)、TH(反正)、TT(反反)。至少出现一个反面的概率可计算如下：设事件E代表“至少出现一个反面”，则事件E显然是下列三个结果的集合：

$$E=\{HT,TH,TT\}$$

E 包含元素的个数 $N_E=3$，可能的结果的总数 $N=4$，因此得到

$$P(\text{至少出现一个反面})=\frac{N_E}{N}=\frac{3}{4}$$

公理化的方法

在大部分现代的概率论教科书中都采用了这一种方法。为了便于叙述，我们先来定义一些概念。

所谓一个随机事件或具有随机的结果的试验的样本空间或样本描述空间 S，就是描述这个试验的所有可能的基本结果的空间。

举例

1. 试验是将一枚硬币抛掷两次，则 $S=\{HT,TH,HH,TT\}$。

2. 试验是随机地选一个人来数出他(或她)的头发的根数。于是，$S=\{0,1,\cdots\}$，这是一个非负整数集。事件E是S的子集记为$E\subset S$，既然 E①$\subset S$，所以S也是一个事件，称为必然事件，因而 S

① 原文误为S。

既是样本空间也是必然事件。

3．试验是将一硬币抛掷二次，于是，$S=\{HH, HT, TH, TT\}$，"至少出现一个反面"这一事件E为

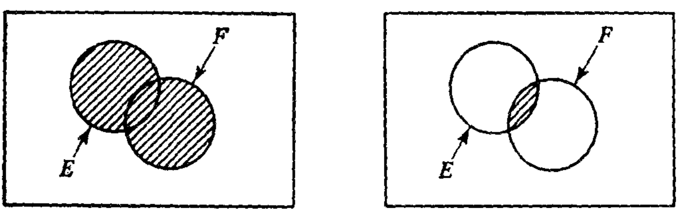
$$E=\{HT, TH, TT\}\subset S$$

空集（即是不含有S中所描述的集）是一个不可能事件，记为$\varnothing$。如果S包含有n个离散的基本事件，亦即样本点为S_i，$i=1, \cdots, n$，则在S中便可定义2^n个不同的事件，例如，当$S=\{H, T\}$（将一枚硬币抛掷一次），则事件族为

$$\{H\}, \{T\}, \{S\}, \{\varnothing\}$$

练习：证明在S上可定义$m=2^n$个事件。

在给出概率的公理化定义之前，我们先共同复习一下：两个集的并集（和集）是由至少属于这两个集中之一的全体元素所构成的集合；两个集合的交集（积集）是由同时属于这两个集合的全体元素所构成的集合。利用维恩图表，可用$\cup$表示并，用$\cap$[①]表示交。在图 8.1-1(*a*)中，集E和F的并集为图中的阴影区域，在图 8.1-1



(*a*) $E\cup F$　　　(*b*) EF

图 8.1-1

(*b*)中，集E和F的交集为图中的阴影区域。我们需要建立的另一个概念是波莱尔域$\mathfrak{B}$。一般地说，一个域$\mathfrak{M}$就是具有下列性质的一个集类：

① A和B的交$A\cap B$也可记作AB。

1. 若 $A \in \mathfrak{M}$，则 $A^c \in \mathfrak{M}$（A^c 是 A 的补集，它是由不属于 A 的全体元素组成的集）。

2. 若 $A \in \mathfrak{M}$ 且 $B \in \mathfrak{M}$，则 $A \cup B \in \mathfrak{M}$，$AB \in \mathfrak{M}$，且 $\varnothing \in \mathfrak{M}$。

3. 推广一步得：若 $A_1, \cdots, A_n$ 属于 $\mathfrak{M}$，则并集 $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$ 和交集 $A_1 A_2 \cdots A_n$ 也属于 $\mathfrak{M}$。

所谓波莱尔域是这样的一个域：任意可数个集的并、交和组合都在域内，亦即域是封闭的。这样，如果 $A_1, \cdots, A_n$ 属于 $\mathfrak{B}$，则

$$\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \text{及} \prod_{i=1}^{\infty} A_i$$

也都属于 $\mathfrak{B}$。如果 S 有可数个元素，则 S 的任一个子集都是一个事件，因此 S 的全体子集便构成一个波莱尔域。然而，当 S 是不可数集，即当 $S=R=$ 实轴，则有一些 S 的子集却不能由可数个并集和可数个交集构成，这些子集叫作非概率化集，它不是事件，在不违反第 8.2 节的公理的条件下不可能定义这些集的概率测度，然而这样的集不出现在我们感兴趣的实际工程问题中。

8.2 概率的公理化定义

对于每一个 $E \subset S$，利用函数 $P(\cdot)$ 定义了一个数 $P(E)$，把 $P(E)$ 叫作 E 的概率，它满足下列各式：

(i) $P(E) \geqslant 0$ (8.2-1)

(ii) $P(S)=1$ (8.2-2)

(iii) $P(E \cup F)=P(E)+P(F)$

这里设 $EF=\varnothing$ (8.2-3)

注意 E 和 F 必须是事件，亦即它们必须是在 $\mathscr{B}$ 中的 S 的子集。概率空间 $\mathscr{K}$ 是指三元组

$$(\mathscr{S}, \mathscr{B}, \mathscr{P}) \qquad (8.2-4)$$

其中，$\mathscr{S}$是某一个随机现象的样本描述空间；$\mathscr{B}$是事件的波莱尔域;而$\mathscr{P}$则是概率测度，它的定义域为S，它取值于区间$[0,1]$上。

练习

1. 证明 $P(\varnothing)=0$。
2. 证明若 $E\in\mathscr{B}$, $F\in\mathscr{B}$, 则有 $P(EF^c)=P(E)-P(EF)$。
3. 证明 $P(E)=1-P(E^c)$。
4. 证明 $P(E\cup F)=P(E)+P(F)-P(EF)$。

举例

1. 试验是将一枚硬币抛掷一次，因此

$$S=\{H,T\}$$

波莱尔事件域包含下列各集：$\{H\},\{T\},\{S\},\{\varnothing\}$。

设 $P(H)=\frac{1}{2}=P(T)$，我们便得到

$$P(T)=P(H)=\frac{1}{2}, P(S)=1, P(\varnothing)=0$$

2. 试验是将一颗骰子抛掷一次，试验的结果是出现于骰子朝上那一面上的点数 n_i。集 S 为 $S=\{1,2,3,4,5,6\}$，波莱尔事件域包含有 2^6 个元素，如

$$\{\varnothing\},\{S\},\{1\},\{1,2\},\{1,2,3\},\{1,4,6\},\{1,2,4,5\}$$

等，我们指定

$$P(i)=\frac{1}{6}, i=1,\cdots,6\text{(这是一个假设)}$$

于是就可以根据所给定的基本事件的概率及利用概率的基本公理而计算出所有各个概率来。若设 $A=\{1\}$, $B=\{2,3\}$，则我们得到 $P(A)=\frac{1}{6}$；又因 $AB=\varnothing$，故又得到 $P(A\cup B)=P(A)+P(B)$，更进一步得 $P(B)=P(2)+P(3)=\frac{2}{6}$，于是得到

$$P(A\cup B)=\frac{1}{6}+\frac{2}{6}=\frac{1}{2}$$

3. 一瓮中盛有 12 个球，1～12 个序号分别标在各球上，试验为随机地取出一球，并且有

$$S=\{1,\cdots,12\}$$

设

$$A=\{1,\cdots,6\},B=\{3,\cdots,9\}$$

$$A\cup B=\{1,\cdots,9\},AB=\{3,4,5,6\}$$

$$AB^c=\{1,2\},B^c=\{1,2,10,11,12\}$$

$$A^c=\{7,\cdots,12\},A^cB^c=\{10,11,12\}$$

$$(AB)^c=\{1,2,7,8,9,10,11,12\}$$

因而得到

$$P(A)=P(1)+P(2)+\cdots+P(6)$$

$$P(B)=P(3)+\cdots+P(9)$$

$$P(AB)=P(3)+\cdots+P(6)$$

若设 $P(1)=\cdots=P(12)=\frac{1}{12}$，则得到 $P(A)=\frac{1}{2}$，$P(B)=\frac{7}{12}$，$P(AB)=\frac{4}{12}$，等等。

8.3 联合概率和条件概率；独立性

考虑一概率空间$(S,\mathscr{B},P)$，如果A和B是这空间中的两个事件，则AB也是一个事件，事件A与B的联合概率为$P(AB)$，其频率的解释为

$$P(A)\simeq\frac{n_A}{n}$$

$$P(B)\simeq\frac{n_B}{n}\quad \text{对大的 } n \text{ 值成立} \qquad (8.3\text{-}1)$$

$$P=(AB)\simeq\frac{n_{AB}}{n}$$

这里，n_{AB}是A与B都发生的次数。在B已发生的条件下A的条件概率定义为

$$P(A/B)=\frac{P(AB)}{P(B)}, P(B)>0 \tag{8.3-2}$$

频率的解释：由式(8.3-1)我们有

$$P(A/B)\simeq\frac{n_{AB}/n}{n_B/n}=\frac{n_{AB}}{n_B},\quad n_B>0 \tag{8.3-3}$$

这也就是A与B都发生的次数与至少有B发生的次数的比。

由式(8.3-2)我们得到$P(AB)=P(A/B)P(B)$。如果

$$P(AB)=P(A)P(B) \tag{8.3-4}$$

则称事件A与事件B是相互独立的。

解释：如果$P(A/B)=P(A)$，则事件B发生与否并不影响事件A的概率，因此我们说A与B是相互独立的。推广一步，如果

$$P(A_1\cdots A_n)=\prod_{i=1}^{n}P(A_i) \tag{8.3-5}$$

则称$A_1,\cdots,A_n$为相互独立。

8.4 全概率与贝叶斯定理

设$A_1,\cdots,A_n$是n个互斥的事件，且$\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$，而B则是在同一个概率空间内的任意一个事件，我们有

$$P(B)=P(B/A_1)P(A_1)+\cdots+P(B/A_n)P(A_n) \tag{8.4-1}$$

证：因为$A_iA_j=\varnothing$，$i\neq j$，我们便得到

$$BS=B=B(A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_n)=\bigcup_{i=1}^{n}BA_i \tag{8.4-2}$$

但因$A_iA_j=\varnothing$，故有$B(A_i)B(A_j)=\varnothing$，因而有

$$P(BA_1\cup\cdots\cup BA_n)=P(BA_1)+\cdots+P(BA_n)$$

再利用

$$P(BA_i)=P(B/A_i)P(A_i)$$

我们便得到

$$P(B)=P\left[\bigcup_{i=1}^{n}(BA_i)\right]=\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)P(A_i) \qquad (8.4\text{-}3)$$

有时也把式(8.4-3)中的 $P(B)$ 称为事件 B 的全概率（无条件概率)。

贝叶斯定理

贝叶斯定理广泛应用在统计通信理论、模式识别和统计推断中，从上面已得出的一些结果，我们不难推导出这个定理。设 $P(A_i)>0$, $i=1,\cdots,n$, $P(B)>0$, $\bigcup_{i=1}^{n}A_i=S$, 且当 $i\neq j$ 时 $A_iA_j=\varnothing$, 我们便得到

$$P(A_j/B)=\frac{P(A_jB)}{P(B)}=\frac{P(B/A_j)P(A_j)}{\sum_{i=1}^{n}P(B/A_i)P(A_i)} \qquad (8.4\text{-}4)$$

概率 $P(A_j/B)$ 有时被称为当 B 已发生时事件 A_j 的后验概率。利用先验条件概率 $P(B/A_i)$，式(8.4-4)能够用来计算后验概率。

举例

1. 在某一通信系统中，传输 0 或 1 的概率分别为 $P(X=0)\equiv P_0$, $P(X=1)\equiv P_1=1-P_0$，由于信道中有噪声而使得发 0 而收到 1 及发 1 而收到 0 的概率都为 β；现在收到的是 1，求所发来的确是 1 的概率。

解 这信道的模型示于图 8.4-1 中，因而

$$P(X=1/Y=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(Y=1)}$$

$$=\frac{P(Y=1/X=1)P(X=1)}{P(Y=1/X=1)P(X=1)+P(Y=1/X=0)P(X=0)}$$

$$=\frac{P_1(1-\beta)}{P_1(1-\beta)+P_0\beta}$$

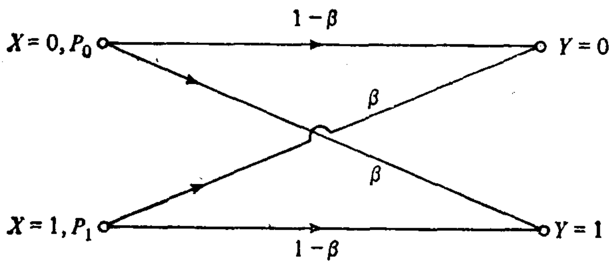


图 8.4-1

若$P_0=P_1=\frac{1}{2}$，则后验概率$P(X=1/Y=1)$取决于β(见图 8.4-2)；若 $\beta=1$ 或 $\beta=0$，则称信道是无噪声信道。

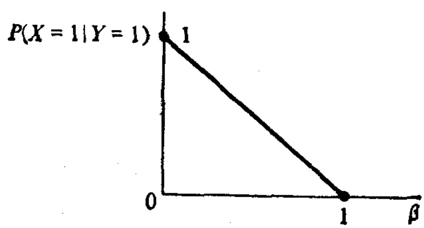


图 8.4-2

2. ([8-1], P. 119)设有一个(虚构的)关于癌症的检验，具有以下特性。现令

事件A为“经检验指出受检验者有癌症”；

事件B为“该人有癌症”；

事件 A^c 为“经检验指出受检验者无癌症”；

事件 B^c 为“该人无癌症”。

已知 $P(A/B)=P(A^c/B^c)=0.95$ 及 $P(B)=0.005$，问这是否一个良好的检验方法？

解 要回答这个问题，我们需要求出当检验指出该人有癌症

时该人确有癌症的似然性有多大，亦即需求出$P(B/A)$，于是有

$$P(B/A)=\frac{P(B)P(A/B)}{P(A/B)P(B)+P(A/B^c)P(B^c)}$$

$$=\frac{(0.005)(0.95)}{(0.95)(0.005)+(0.05)(0.995)}=0.087$$

因此，在这个具体情况下，在这检验得出阳性结果时，这人确有癌症的概率仅为8.7%，亦即这检验具有非常高的误判阳性率，因而在这个意义上不能认为这是个良好的检验方法。

8.5 伯努利试验

现在考虑一个非常简单的试验，它在每次试验中的结果X仅有两种情况：试验成功$\{X=s\}$的概率为p，失败$\{X=f\}$的概率为$q=1-p$。于是，$P(s)=p, P(f)=q$，其样本描述空间为$S=\{s,f\}$。

设我们把这个试验重复进行两次，则新样本描述空间为S_2，记为$S_2=S\times S$,，它是所有有序二重($2tuple$)的集：

$$S_2=\{SS,Sf,fS,ff\}$$

积 $S\times S$ 称为笛卡儿(乘)积；如果我们进行n次独立试验，则样本空间为

$$S_n=\underbrace{S\times S\times\cdots\times S}_{n\text{次}}$$

它含有2^n个基本结果，每个都是一个有序n重($ntuple$)。这样

$$S_n=\{a_1,\cdots,a_M\}\text{，在这里}M=2^n$$

而$a_i=z_1z_2\cdots z_n$，这里$z_j=s$或f。因为每个结果z_j与其它各个结果相互独立，所以联合概率$P(z_1\cdots z_n)=P(z_1)P(z_2)\cdots P(z_n)$。这样，很容易算得一个具有$k$次成功和$(n-k)$次失败的试验有序集的概率为$p^kq^{n-k}$；例如，若我们连续三次抛掷一枚硬币，设$p=P(H)$，$q=P(T)$，则事件$\{HTH\}$的概率便是$pqp=p^2q$，而事件$\{THH\}$的概率也是$p^2q$。在这里，所有包括两次正和一次反的不