微积分学导論

曹一華 江体乾 編譯

科学技術出版社

电子学研究所图
51.611
565

高等学校教学用書

微积分学导論

曹一华　江体乾　編譯

中國科學院圖書館

科学技術出版社

3301682

DS100/29

内 容 提 要

本書以苏联 И. И. 普里瓦洛夫及 С. А. 加里别倫合著的“无穷小分析基础”一書为藍本，經改編增补而成，就微积分学的基础理論和应用作了全面的叙述。

本書适于有高中程度的学生、职工作自学之用，也可供工科夜大学、技术学校和高等学校的非数学專业作教材及参考之用。

微 积 分 学 导 論

編譯者　曹一华　江体乾

*

科学技術出版社出版

（上海南京西路2004号）

上海市書刊出版业營业許可証出 079 号

上海启智印刷厂印刷　新华書店上海发行所总經售

*

統一書号 13119·122

开本 850×1168 耗 1/32，印張 10 3/16，字數 247,000

1958年3月第1版

1958年3月第1次印刷 · 印数 1—4,000

定价：(10) 1.20 元

序

我們在教課余暇，閱讀了苏联著名数学家伊万·伊万諾維奇·普里瓦洛夫及斯·阿·加里別倫合著的“无穷小分析基础”一書，感覺这本書內容簡要，說理清楚，适合我国高中毕业生未能升入大学者自学及技术学校教本或广大职工业余自修之用，我們譯出后經科技出版社的提議，增加应用材料，改为編譯，俾兼能适合我国各厂矿职工夜大学，及其他非数学專业的高等学校数学参考之用，我們除对微分方面、积分方面改編和增补了不少应用材料和計算方法外，又新添了多元函数的微积分学概要一章，而对于多元函数的极限連續等理論，一概未提，好在本書第二章对于一元函数已討論得較詳，就本書的目的言，此处可以不需要詳述。

为了使讀者知道高等数学的辯証唯物观点、学习方法、及我国古代数学的成就与其今后发展的光輝前途，我們特别写了緒論一篇，虽說是內容較多，但对于讀者或能得到一些鼓舞。

我們覺得編譯高深的專門書籍对于科学研究的帮助固然很大，关于編写适合广大群众需要，能够提高一般科学文化水平的基础科学書籍，如本書的內容，也是目前不可缺少的工作。我們对这种工作，限于时間，做得很不够，然而做一点总比不做要好些，虽然做的缺点自知难免，但是仍旧拿出来，希望讀者多加批評和指教！

編譯者　曹一华　江体乾

华东化工学院

目　录

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

緒　論

讀者研究分析数学时，首先应該了解这門課程的目标和它在自然科学与技术訓練系統中的重要性，并且也須知道数学，尤其是分析数学的发展与社会的关系以及祖国数学家的貢献.

恩格斯对数学所下的定义和数学的辯証唯物观点

恩格斯在"反杜林論"里曾說:"純粹数学的对象是現实世界中的空間形狀与数量关系……是非常現实的內容，虽然这內容以极端抽象的形式出現，但那只能略微掩飾它起源于外間世界的事实". 这是对于数学的最准确而又令人滿意的定义. 从数学形式上看，它似乎是极其抽象，似乎是根据些不可証明的少数所謂基本原理、原則及若干个从头腦中純粹思維出来的定义，运用数理邏輯加以演繹推理而成的一种学問，例如英国罗素說:"数学是一种不知它說些什么，也不知所說的正确与否的一种科学"，又說"数学是符号的遊戏"，杜林亦曾說过:"数学离开世界而独立存在"，这样說法，都是那些資产阶級主观唯心主义者居心玩弄玄虛自欺欺人的說法. 恩格斯曾告訴我們:"数学就是数量的科学". 数量的起源既然是由于生活的需要，沒有生活就沒有数学. 数学是从物質世界中把与生活不可分离的事物的形和数抽象出来，首先归納成一些簡單道理，叫做公理或定义，再逐步的根据具体事物的关系和結果发展而成一門系統科学. 这种科学不仅符合現实世界的客观規律，而且能根据其推算可以"預見自然"，將尙未被人知道的宇宙間自然規律預先揭发出来. 預先証明起来，如法国学者列佛利(U. J.

Leverrier (1811～1877)]研究太阳系中行星运动問題用函数关系的推算便断定某时間某位置应有一新的行星. 后人根据它的推算即发現了海王星. 十九世紀末及二十世紀初的莫斯科著名力学彙复变数函数論敎授儒可夫斯基(Н. Е. Жиковский)用高等数学的方法找出公式和定理, 預先証明了高級飞行技术中翻筋斗的可能性. 不久就有俄罗斯陆軍上尉湼斯捷洛夫(Л. Н. Нестеров)就根据儒氏理論实現了飞机第一次翻筋斗的壯举. 由此可見, 唯心派的說法完全是一派胡言. **所以数学是一連串的抽象理論与計算方法**,它从实踐中,获得数量与形象的概念, 由感性認識提高到理性認識,再把它用到实踐中去加以証实和发展,如是实踐認識再实踐再認識,逐步发展以至无穷, 恩格斯說"……要辯証而又唯物的了解自然就必須熟悉数学……". 由此可見,数学是一門唯物而辯証的科学.

高等数学中微积分学的基本概念

一般統称初等数学系指初等代数,初等几何及三角而言,而高等数学一般系指解析几何以上的各类数学, 如微积分,微分方程,积分方程,級数論,微分几何等等种类甚多,不胜枚举,但我們也不能說出一个絕对的准則以分别哪些是初等数学,哪些是高等数学. **然初等数学所研究的对象总是些不变的量或图形, 而高等数学則是研究参与变化过程的各个量的相互变化的情形,至于在方法上,初等代数与几何的理論是各自独立構造出来的, 沒有总的原理能解釋所有代数問題的几何意义. 而高等数学則以座标观念为一个总的原理,用它能証明代数的关系和几何的定理.**

高等数学中特别是微积分学**是研究变量間的依从关系的**. 恩格斯說"笛卡儿的变量是数学上的轉折点,有了变量, 数学里就有了运动与辯証法, 有了变量不久就需要有微积分法, 而微积分法也就在那时产生, 并且总的說来它是在牛頓和萊布尼茲两人手上

完成的，不是他們凭空发明的”(1948 年版俄文本“自然辯証法”208 頁)．我們知道**微积分是研究变量变化的順序，范圍和趋势(就是研究变量的极限)的一种專門数学**，是牛頓和萊布尼茲二人同时发明的，不过牛頓是从物理方面运动速度的变化研究出来的，而萊布尼茲則从几何方面割綫位置变化研究出来的．他們的出发点虽然不同，但其实質上則同样的归結到二个基本概念．

第一个基本概念是确定函数的增量与自变数的增量的比率，且研究当自变数增量趋于零时此比率的极限．

第二个基本概念是求总和的极限，且研究当此总和的項数无限增多而每項均等速的趋向于零时总和的极限．

这两个基本概念在几何上和自然科学上及技术科学上具有一系列的重要应用．但是这两个基本概念同样是以无穷小的方法將非均匀变化的問題，归結到均匀变化的情形去处理它們．倘若自始至終都是均匀变化的問題，例如求等速运动的距离和多边形的面积等，則不需要高等数学，仅用初等数学的方法就可解決．但是研究非均匀变化时則問題就相当复杂，首先需要求出非均匀变化的变化率，例如求不等速运动的瞬时速度，則需要想出无穷小的运算方法才能加以解決，即在很短的时間內我們把非均匀运动的速度認为是各个很短时間的均匀运动的距离与时間之比，如此所造成的誤差，只要所取时間縮短就不会太大，这就是瞬时速度的近似值；一直到时間縮短得趋于零时求出这个比的极限，則誤差就沒有了．那就是瞬时速度的精确值．这样便引导出我們在以后所要說的导数的概念，就是微分学中的基本概念．

我們研究积分时恰恰也是如此．例如求在 x 軸上曲綫所圍成的面积．我們把整个在 x 軸上的积分区間分成很多的小区間，以便在这种小区間的各个分点上求出曲綫的各个縱坐标，再連接縱坐标的分点將非均匀变化的曲綫圍成的面积，化为以各个弦为边的許多梯形面积的和(弦是直綫，是均匀变化)，如是所造成的誤差，

只要区間的个数增多而每个区間的距离縮小就不会太大．若再使区間的个数无穷增多而最大的区間縮小到趋向于零，則就没有誤差．这便引导出我們在以后所要說的定积分的基本概念．

但是微分与积分除了把非均匀的問題在无穷小的基础上同样的看作为均匀的問題而加以处理外，乍看起来，微分与积分似乎毫无連系，所以在历史上有一个很長时期是各管各的．到 17 世紀末叶，牛頓和萊布尼兹才將微分和积分連系起来，积分在实質上可以算作是微分的反运算．

积分比微分較为困难．如果說我們很容易求出初等函数的导数，但也不能說容易求出其积分．事实上，連一些簡單的函数，如 $\frac{1}{\ln x}$，或 $\frac{\sin x}{x}$ 也不能够用已知初等函数去表达出它們的积分来．

我們熟知某数的乘方只有一个答案，而其反运算某数的平方根則答案就不是一个，例如 3 的平方是 9，而 9 的平方根則是 3 和 -3，微分和积分的关系也是如此．初等函数的微分答案仅有一个，但其积分則答案就不仅一个，而他們彼此相差一个任意常数，因此微分的反运算就成为不定积分．

至于我們初学微积分时須要具备哪些預备知識，可由下面馬克思給恩格斯的一封信中看出．1863 年 7 月 6 日，馬克思在写給恩格斯的信中說，"利用空閒的时間我在鉆研微积分学，在我这儿有很多关于这方面的書籍，如果你需要的話，我很高兴送給你一些，我想这对于你的职业几乎是不可缺少的．此外，这是数学中最容易的部分（只关于純粹技术方面），譬如和代数的高級部門相比較，預备知識除普通代数和三角法而外，什么也不需要，但是，关于圓錐曲綫的一般知識还是必要的，"这就是表明微积分的运算不难，只要代数三角与解析几何能有基础即可以研究；由此也可看出微积分学对于研究社会科学和自然科学的人都是不可缺少的．对于工程师来說微积分更是其研究理論和技术的极便利的工具．我們知道，任何工程施工之前必先有設計藍图，而进行設計时就脫离不

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com

了实用数学中最关重要的微积分学. 可見要想解决科学及工程上的任何問題,如果从整体去認識时,数学,更重要的是微积分学,是不可少的东西. 所謂"数学是掌握技术的鑰匙"的話是完全正确的.

我国数学成就的簡要介紹

我們祖国数学发明甚早,其成就亦甚巨大,兹簡要介紹于下:

我国古算書九章算术內方田章里有分数算法,有通法約法,及分数加减乘法,**粟米**及別章里有分数的除法都与現在的算法相同,后来印度阿拉伯人的分数算法是我国傳过去的, **盈不足**术傳到阿拉伯, 阿拉伯人十分重視編入他們的代数書內, 有契丹算法的称謂,其后由阿拉伯傳到欧洲,十六世紀中,欧洲代数書普遍采用,改称双假借法.

印度人認識負数是从中国九章算术內**方程**章里解联立一次方程的方法中学去的(印度人將中国各項籌式改为横式).

晋**祖冲之**圓周率 (3.1415926 盈及 3.1415927 朒). 是第五世紀世界发明最早最精的圓周率, 其时古文明之印度仅知 3.1416, 而所謂文明之欧洲亦才知道 3.141552.

唐朝国学內习書算者有 3260 人,日本亦派留学生到中国学算学,并仿行算学考試制度.

朝鮮在王氏高丽王朝的太祖时代开始建学校,光宋朝(中国五代后周时)設科取士,仿唐制有書算等科. **九章算法**,**算学启蒙**及**楊輝**算法是宋、元、明,时相繼傳入朝鮮的. 数論的余数定理世界公認是"中国余数定理",宋賈先**增乘开平方法**,載于賈先的**皇帝九章細草**(約公元 1200 年),实际与 19 世紀的**和涅氏**法 (Horner's 法) 完全类似, 可算早在和涅之前六百年就解决了高次方程求无理根的方法. 朱世傑所著**四元玉鑑**曾发明高級等差級数及各种堆垛法, 而二項式定理宋**秦九韶**(1247 年)即已发明. 所謂巴斯加三角形,

楊輝在 1261 年也已发明，都远比欧洲为早，(早約三百多年)〔例如三角垛 $1+(1+2)+\cdots\cdots+(1+2+3\cdots\cdots+n)=\frac{1}{3!}n(n+1)(n+2)$等等〕.

我国数学的发展

我国数学发明虽早由于以下几种原因所以中間进步較迟

(1)由于封建制度的限制，統治者或者輕視它，認为小技不加提倡，或者利用它作剝削劳动人民的工具，故不能普遍发展；(2)古数学都用籌碼計算，其优点在于运算簡捷，其缺点則为不易精研理論；(3)中国古代所用数学的符号不甚簡化，不易运用于公式的推广；(4)定义多含糊，証明不严謹，其方法不是唯物辯証的，故发明虽早而进展較慢；(5)我国封建社会的时期太長，生产落后，故数学不易发展.

及至現代，中华人民共和国成立后至今虽仅短短八年，但是我們社会主义建設的成績空前巨大，我們的数学和工业一样呈現了光輝的远景．在中央“向科学进軍”的号召下，科学院业已作出我国科学发展十二年規划．我們一方面向苏联、各人民民主国家及一切科学先进国家学习，一方面將全国高級知識分子組織起来，分数学为若干类，分类集体来研究，务必在最近期間能够使我国数学的研究，不是少数人的而要是普遍的、多方面的能够迎头赶上国际水平．因此現在从中学起业已注意数学，各种技术学校，业余夜大学、以及在职干部所选讀的函授学校等，多半已要求研习数学，在这样全国上下一致努力研习之下，我国数学一定能够迅速发展．我国当代的数学專家享有国际荣譽者頗不乏人，例如**华罗庚**对数論方面的研究，**陈建功**在分析数学方面的成就，**苏步青**在几何方面的貢献都是世界数学家所乐于称道极为佩仰的人士，其所論著对于促进近代数学的发展也有一定的功績.

学习数学中的思考方法

数学的論証方法是根据假設而推定結果的，假設是已知的条件，結果是求証的答案．証明一新定理时要引用已經被証明的原有定理或公理、公法、定义等作根据，但必須考慮此原有定理的假設条件是否与須要証明的新定理的条件完全符合．假如有一个条件不合，其推定的結果，也就不成立．做习题所应用的公式也是如此，要看公式成立的条件，不能盲目的死代公式．例如多項式的組合原則及交換原則都能成立，但对于交錯級数及矢量代数則这些原則就不完全成立．又如数学中有一个不許用0去乘除任何数的原則，假如違反了这个原則，就会导致极不相等的奇怪結果，但是以趋近于0的变量做分母則問題又当別論了．

其次考虑一个命題的条件，要注意这条件的普遍性，不可任意的另添条件把普遍性暗中变成特殊性，例如明明規定的是四边形，如果在証明中改添为平行四边形，于是結果就必然会錯誤了．

数学中的定理有四方面

正定理　逆定理
否定理　否逆定理

在同一对角綫上的定理同时成立，或同时不成立．

高等数学上証明定理为便利計不常从假設直接推到結論，往往根据正定理和否逆定理同时成立的原則反过来假定結論不成立，然后推出与假設相矛盾的結果，即假設也不成立，于是正定理就成立了，同时有了正定理要想証明否定理或逆定理也成立，只要証明其中一个就行了．例如二等边三角形的底角相等，是正定理，其逆定理是底角相等的三角形为二等边三角形，其否定理为不是二等边三角形的底角不相等，其否逆定理为底角不相等的三角形不是二等边三角形，这种正定理和逆定理同时成立，因而其对角綫順次所指的否逆定理及否定理也同时成立．凡一种假設使命題的

正定理与逆定理同时成立的，这假設就叫做結論的必要和充分条件(或者說結論是假設的必要和充分条件).

如果仅能使正定理的結論成立，但不能使否定理或逆定理成立的假設，則叫它做結論的充分条件，而不是必要条件，同时，此結論即为假設的必要条件，但不是充分条件，比方：如果二角是对頂角，則必相等．此中，对頂角是相等的充分条件而不是必要条件，因为其逆定理或否定理都不成立，同时二角相等，又是对頂角的必要条件，但不是充分条件．

数学的論証要注意严密性，虽然一二字也不可忽略．比方，在必要而且充分的条件时往往用"当且仅当"或"作且仅作"等字眼去表示．例如在欧几里得几何中，过一已知直綫外的一点，可作且仅可作一直綫与已知直綫平行，如果把最先"可作"二字略去，則失去作平行綫的可能，如果把其后的"仅可作"三字略去則使人怀疑有作許多平行綫的可能．

这里仅略述数学上最重要的思考方法，以后还要逐步培养起邏輯思考能力．至于考慮問題必須要全面深入和客观，不仅学习数学須如此，处理其他任何問題也应如此，否則便成为經驗主义者或教条主义者，这都是毛主席所一再告誡我們不容許犯这錯誤的．我們为了使論証命題的方法正确可靠，我們今后对于思考的邏輯性也是应当特別注意的．

初学高等数学的同志应当注意的事项

学高等数学的預备知識，誠如本緖論第二节所引馬克思給恩格斯信中所說"預备知識除普通代数三角法而外什么也不需要，但是关于圓錐曲綫的一般知識还是必要的"．因此有初等代数三角及平面几何少許知識后，就应看一些淺近的解析几何書籍，然后即可閱讀本書．一方面讀，一方面自行选做本書所附习題，不必將每章全部习題一一做完，只要开始能做大部分，也就可以繼續讀下

去了．微积分的基础是建筑在极限論上的，如果极限的理論搞不清楚則高等数学就无法研究．我們初学高等数学的同志切不可仅仅死記公式（当然必要公式也应該記住的），以为依照公式能做很多算題，就是学好微积分了，这是不对的．我們必須搞懂微积分的基础理論，就是极限論，然后將极限的理論应用到微分积分中去，了解微分和积分的分析概念及其几何意义，才能繼續研究下去，否則虽然能做了些代代公式的題目，对于工程和技术的应用固然无多俾益，对于研究自然科学或工程理論更无多大帮助．

本書对于一元函数分析方面的初等理論頗为詳細，初学的同志正好利用它打好微积分的基础，而对于一元函数的微分和积分的应用方面已由編者增添了不少例題、方法和其他必要的內容，这对于初学的同志說来，是比較有用的，希望在注意极限理論的同时，也能注意到这些应用問題的解答．

本書原著沒有談到多元函数的微积分学，編者認为多元函数的微积分在实际应用上較一元函数更为广泛，因此增添了多元函数微积分概要一章，仅仅講了些重要方法，因限于篇幅，未能詳述其理論，好者一元函数的理論基础打得好，多元函数的理論也容易研究．如果讀者希望閱讀較詳細的微积分学，建議在讀完本書后閱讀菲赫金哥尔茨著（有中譯本）微积分学教程共三卷八分册，此書內容頗为詳尽，理論亦很严密．

讀了微积分后，应当再讀些微分方程及复变函数論，实变函数論等專門書籍，然后才可以算知道了分析数学的大概情况．

同志們！祖国正在需要我們向科学大进軍呢！我們共同努力吧！！

第一章　函数概念

§ 1-1. 量的測量、数学量

在各种应用科学上，非碰到各种各样本性不同的量不可．比方說，在物理学中常常必須談到比重，密度，溫度；在物理学的問題中我們也考慮到力，速度，加速度和时間；在几何学中我們研究那种象綫段的長度，面积，体积，諸如此类的量．

为了便于把这些量加以数学的分析，便选取那与自己本性相同的任意量作为測量單位：例如，以"米"作为長度的測量單位，以"克"作为重量的測量單位，以"秒"作为时間的測量單位，等等．当已給的具体量对測量單位作比例时，其比值將是抽象的数，它指出已給的具体量是測量單位的多少倍数．測量結果所获得的数，叫做已給具体量的值．

于是，若把任何具体量的本性抽去不管，結果就構成了在数学分析中所研究的数学量．致于它本来是否代表溫度，面积，質量等等，从数学的观点看来是无足輕重的；对我們重要的仅是我們有某量，把它用字母，譬如 x，記下来，并且我們能借助于数字来表示該量的值．数学量具有一个特性——可变性，即具有能够变成小些的或大些的性質．

总之，数学量是一个能取得任何数值的簡單字母．数学分析研究抽象了的量的一般性質．賴有数学所造成的这种結果，所以能够把它应用到各种不同的实用知識上去，因为在自然界中我們不管碰到了什么样的量，仅把它記作 x，而把在它測量結果中所获

试读结束：需要全本请在线购买： www.ertongbook.com